Introducción a la lógica

L. T. F. Gamut

udeba

Introducción a la lógica

L. T. F. Gamut

eudeba

160 Gamut, L. T. F.
GAM Introducción a la lógica.- 1º ed.- Buenos Aires : Editorial Universitaria de Buenos Aires, 2002.
312 p. ; 23x16 cm.- (Lógica)

ISBN 950-23-1224-4

I Duran, Cecilia, trad. II. Título 1. Lógica

Eudeba
Universidad de Buenos Aires

1ª edición: marzo de 2002

Traducción del inglés: Cecilia Durán
Revisión Técnica: Gladys Palau

Diseño de tapa: *Silvina Simondet*
Corrección general: *Eudeba*

ISBN 950-23-1224-4
Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que establece la ley 11.723

Enciclopedia Lógica

En nuestros días, resulta prácticamente imposible circunscribir con precisión el ámbito de la lógica. Si bien la argumentación es una actividad que está presente en muchas de nuestras conversaciones, discusiones y debates, no resulta sencillo elaborar una teoría general que logre separar los buenos de los malos argumentos. No resulta fácil ofrecer, por lo tanto, criterios que reconstruyan plenamente la idea de convencimiento racional. Sabemos que sostener un enunciado a partir de otros es lo característico de la práctica argumentativa. Pero no podemos dar explicación completa de los criterios que constituyen esta práctica.

Aun así, resulta plausible pensar que esos criterios están estrechamente relacionados con el significado de ciertas expresiones especiales. Esas expresiones constituyen los operadores lógicos. No es posible dar una lista completa de todos ellos. Sin embargo, sabemos que las conjunciones, las disyunciones, los condicionales, las equivalencias, las negaciones, los cuantificadores, las modalidades, las expresiones que hablan acerca de estados epistémicos son algunos de los signos cuyo significado debemos investigar, si queremos tener una reconstrucción aceptable de las razones a favor o en contra de los enunciados involucrados en una disputa.

¿Por qué no resulta racionalmente posible rechazar que "los conjuntos son entidades abstractas" si hemos aceptado que "los conjuntos son entidades reales y abstractas"? ¿Por qué nadie puede dejar de admitir que "o hay conjuntos o no los hay"? Una respuesta posible a estos interrogantes nos pide que prestemos atención a cómo empleamos sistemáticamente la conjunción, la disyunción y la negación. Lo que debemos hacer es elaborar una serie de principios o reglas elementales que hagan explícitas las condiciones de corrección de las prácticas inferenciales que involucran a tales expresiones. Esta tarea se realiza rescatando los aspectos formales del proceso, evitando toda característica relacionada con las condiciones de verdad de los enunciados involucrados en el proceso. No hay nada extralingüístico a lo que se preste atención. Sólo hay que elaborar los principios que regulen la práctica de introducir y eliminar las expresiones lógicas en el transcurso de una discusión. Por supuesto, conviene elaborar esta explicación respecto de un lenguaje artificial que represente el lenguaje que hablamos. Estos principios son llamados reglas de inferencia y, al proceso de obtener un enunciado de otros, deducción natural. Un sistema de deducción natural es simplemente una colección de reglas de inferencia.

Otra respuesta posible consiste en prestar atención a los aspectos semánticos del desarrollo argumentativo, recurriendo a la idea de verdad. Para nuestros propósitos necesitamos sólo suponer que los enunciados tienen un valor veritativo.

Lo que advertimos es que no hay ninguna posibilidad de considerar que no sea verdadero el enunciado "los conjuntos son entidades abstractas" siempre que hayamos aceptado como verdadero el enunciado "los conjuntos son entidades reales y abstractas" y lo mismo ocurriría con cualquier interpretación que asignara valores veritativos a un par de enunciados con la misma forma lógica que los anteriores. Tampoco podemos dar una interpretación que no satisfaga la forma "p o no p", lo que muestra por qué no podemos rechazar "O hay conjunto o no los hay". Las estructuras con las que se abordan estos aspectos semánticos reciben el nombre de modelos. En función de ellos, logramos analizar la noción de validez de un argumentos y la de validez universal de un enunciado.

Esta colección intenta brindar una visión integral de los principales temas de la lógica contemporánea. En ella se incluyen cuestiones relacionadas tanto con los aspectos formales como con los semánticos antes mencionados. En esta oportunidad, he privilegiado la idea de incluir una visión semántica de ambos aspectos. *Introducción a la lógica* es el primer volumen de *Lógica, lenguaje y significado* elaborado por el seudónimo colectivo L. T. F. Gamut. Completa la obra *Lógica intensional y gramática lógica*. Este último será editado más adelante. En *Introducción a la lógica* encontramos una excelente presentación de la lógica clásica, sus alcances y sus límites. El libro es preciso, claro y completamente accesible para todos aquellos interesados en estos temas.

Quiero agradecer a la Dra. Atocha Eliseda por su apoyo, expresar mi reconocimiento a los profesores J. van Benthem, J. Groenendijk, D. de Jongh, M. Stokhof y H. Verkuyl, por su confianza y por el entusiasmo que manifestaron al conocer la idea de la publicación. Quiero agradecer a la Dra. Gladys Palau. Sin su esfuerzo este proyecto no se hubiera concretado. Quiero agradecer a las autoridades de Eudeba, especialmente a Alicia Camilloni y Víctor Palacios.

Eduardo Alejandro Barrio
Director de la colección
Buenos Aires, julio de 2001

Índice

Presentación a la edición española

En el año 1962, esta misma editorial publicó la primera traducción al español del libro de Irving Copi, *Introducción a la lógica*. Exactamente a los diez años e inmediatamente después de la aparición de la nueva edición en inglés corregida y aumentada, publicó también su traducción. Menciono este hecho por dos razones: por un lado, porque en esos años Eudeba emergía como la primer editorial universitaria de lengua hispana y, en segundo lugar, porque en tanto tal, tomó a su cargo la tarea esencial de introducir en nuestro mundo intelectual las nuevas corrientes de pensamiento ignoradas hasta ese momento en nuestro país. En efecto, mientras que en Europa y Estados Unidos la llamada lógica matemática, simbólica o, simplemente, *logística* se imponía como campo de investigación propio y como poderosa herramienta en la metodología de las ciencias y el análisis filosófico; por causas políticas e ideológicas, en nuestras universidades se seguía enseñando y estudiando lógica con textos escritos bajo el enfoque fenomenológico de la lógica, plasmado en el libro de A. Pfänder, *Logik*, de 1921, y reproducido en nuestro medio en los textos de K J. Grau (1928, 1937) y de Romero-Pucciarelli (1945), por citar los más conocidos.

A partir de esta primera ruptura con la tradición intelectual, comenzaron a aparecer numerosas traducciones al español de importantes libros introductorios de prestigiosos lógicos como Quine, Jeffrey, Kleene, Enderton, entre otros. En estos últimos años también han surgido, en particular en España, una gran variedad de textos elaborados por estudiosos de esta disciplina, varios de ellos rápidamente instalados como libros de texto en nuestro medio. Sin embargo, todas las obras mencionadas tienen la marca común de estar pensados en función del pensamiento matemático y de no hacer referencia alguna a los profundos cambios que se han venido produciendo desde hace ya más de treinta años en el campo de las investigaciones lógicas. Este libro viene a llenar ese vacío, convirtiéndose por ello en el primer texto de lógica publicado en lengua hispana, con la peculiaridad de estar expresamente dirigido a estudiosos de la filosofía, la lingüística e incluso de la inteligencia artificial y las ciencias cognitivas. Aun en la presentación de los temas tradicionales de la lógica tiene un estilo diferente, pues todos ellos están pensados teniendo en cuenta el lenguaje natural, incluso en sus aspectos pragmáticos. Al mismo tiempo, provee al lector del tecnicismo indispensable para abordar tanto el estudio de la semántica filosófica actual como el de la gramática formal. Para los interesados en la lógica misma, tiene también la virtud de plantear, desde el comienzo, la existencia de otros sistemas lógicos distintos de los clásicos y de introducir al estudiante, con sencillez expositiva y rigor, tanto en sus formalismos como en sus motivaciones filosóficas.

.cto con este libro hace ya vari s. En una de las varias
'royecto ALFA "Tools for Teachos añ gic", dirigido por María
Universidad de Salamanca, conocí ung L n a uno de sus autores, el
Iniversidad de Amsterdam, D. H. tamb ngh. Desde ese entonces,
traducción se convirtió para m I. de J en una obsesión. Pero,
era una tarea difícil, no solo porqu i casi ía encontrar una editorial,
nbién implicaba encontrar un estu e se de la lógica. conocedor del
y dispuesto a realizar la tradu dioso in remuneración alguna.
hacerme cargo de la catedra cción gica en la Facultad de
de la Universidad Nacional de La de L me reencontré, después de
con la profesora Cecilia Durán, Plata, ofreció a llevar a cabo la
Sin ella, esta traducción habría s uien posible La perseverancia y
fue, sin duda alguna, la tarea más ido im Finalmente, la entusiasta
. Dr. Eduardo Barrio, director de la sencil ion y profesor en la catedra
a Facultad de Filosofía y Letras d colec iversidad de Buenos Aires,
u publicación, lográndose así que e la U a repitiera aquella ya casi
ña. De ahora en más, nuestro esfu Eude ará dirigido a la traducción
olicación del volumen 2. erzo e

GLADYS PALAU

Nota del traductor

Esta traducción se basa en la versión en inglés del texto y no en la versión original en holandés. Debe tenerse en cuenta que se ha dado preferencia a la transmisión exacta de los conceptos y nociones técnicas más que al estilo en que fueron trasladadas al español. En algunos pocos casos hemos debido alterar los ejemplos del original, debido a que en una traducción literal no se producían las situaciones lingüísticas que los autores intentaban presentar. A los efectos de no distraer la lectura de la obra con comentarios marginales, no se han introducido notas del traductor. En su lugar, y en los casos en que se consideró conveniente, se ha colocado una sucinta acotación entre paréntesis consignando la expresión en inglés, a fin de que el lector advierta que la traducción no es exacta o resulta un tanto forzada. De la misma forma, se han preservado entre paréntesis algunas expresiones en inglés cuando el uso de las mismas se encuentra lo suficientemente difundido en el lenguaje técnico de la disciplina.

Quisiera agradecer la atenta supervisión de la Dra. Gladys Palau, sin cuya dedicación esta traducción seguramente no se hubiera realizado. Asimismo, reconozco sinceramente la colaboración de los profesores Martín Daguerre, por su cuidadosa corrección de todos los capítulos que componen la obra, y Susana Lamas, por su participación en la fase inicial del proyecto. A todos ellos deslindo de la responsabilidad de cualquier error en el que pueda haber incurrido.

CECILIA DURAN

Prefacio

Lógica, lenguaje y significado consta de dos volúmenes que pueden ser leídos en forma independiente el uno del otro: volumen 1, *Introducción a la Lógica*, y volumen 2, *Lógica intensional y gramática lógica*. Conjuntamente constituyen un estudio de la lógica moderna desde la perspectiva del análisis del lenguaje natural. Representan los esfuerzos combinados de dos lógicos, dos filósofos y un lingüista. Se intentó integrar las contribuciones de esas disciplinas diferentes en una única totalidad consistente. Esta iniciativa se inspiró en la convicción, compartida por todos los autores, de que la lógica y el lenguaje son inseparables, en particular cuando se trata del análisis del significado. La investigación combinada de la lógica y el lenguaje constituye una tradición filosófica que puede rastrearse en el pasado hasta Aristóteles. El advenimiento de la lógica matemática, por un lado, y de la lingüística estructuralista, por el otro, dieron lugar a un período de desarrollo separado; pero, a medida que dichas disciplinas maduraron, su relevancia mutua se ha puesto de manifiesto nuevamente. Ha surgido una nueva región interdisciplinaria que se ubica entre los límites de la filosofia, la lógica y la lingüística; y *Lógica, lenguaje y significado* es una introducción a este campo. Este volumen 1 establece una base firme en lógica proposicional y lógica de predicados clásicas. El volumen 2 amplía esta base mediante un estudio de ciertos sistemas lógicos más ricos, tales como la lógica intensional y la teoría de los tipos; y muestra la aplicación de estos sistemas en una gramática lógica.

En el volumen 1 se introduce la lógica desde una perspectiva lingüística; no obstante, se intenta mantener el interés de los lectores que sólo quieren aprender lógica (con la excepción, tal vez, de quienes tengan un interés puramente matemático en el tema). Por ello, se incluyeron algunos temas que no se encuentran en textos introductorios, tales como lógica multivalente, lógica de segundo orden, y la relación entre lógica y lingüística matemática. Además, se realiza un primer intento por abordar una pragmática lógica. También se abordan otros temas más tradicionales, tales como la teoría de las descripciones definidas y el papel de la investigación acerca de los fundamentos de la matemática.

El volumen 2 supone tener conocimientos de lógica proposicional y de predicados, pero no necesariamente obtenidos del volumen 1. La primera mitad aborda diferentes sistemas de lógica intensional y la teoría de los tipos. La interacción entre los orígenes de estos sistemas en lógica y filosofia, y el papel que tienen que desempeñar en el desarrollo de las teorías intensionales del significado, es un hilo temático común que corre a lo largo de esos capítulos. A medida que avanza la exposición, el lector atento se familiarizará gradualmente con la lógica y la filosofia, lo cual resulta adecuado para una comprensión apropiada de la gramática lógica. Se describe detalladamente la gramática de Montague, la forma mejor conocida de gramática lógica, y se la aplica a un fragmento de la lengua inglesa. A continuación, se presta atención a algunos desarrollos más recientes en el ámbito de la gramática lógica, tales como la teoría de la cuantificación generalizada y la teoría representacional del discurso.

Un objetivo importante de este libro consiste en introducir a los lectores en la inmensa diversidad que uno descubre en el campo de la lógica formal. Se familiarizarán con muchas lógicas diferentes –es decir, combinaciones de lenguajes formales, interpretaciones semánticas y nociones de consecuencia lógica– cada una con su campo de aplicación propio. A menudo, en ciencia uno sólo es capaz de apreciar lo que explican las teorías y la forma en que podrían ser modificadas o reemplazadas, cuando uno se aproxima y examina el fenómeno de cerca. También en este campo, es el análisis formal y riguroso de patrones y teorías del razonamiento el que lleva al desarrollo de alternativas. Aquí la precisión formal y la creatividad van de la mano.

Los autores esperan que el lector desarrolle una comprensión activa de los temas presentados, que finalmente considere a los métodos formales como métodos flexibles para responder a cuestiones semánticas, y que, eventualmente, se encuentre en condiciones de aplicarlos como tales. En razón de este objetivo, se incluyen muchos ejercicios. Éstos deberían ayudar a que los dos volúmenes sean apropiados como libros de texto para el dictado de cursos de diversa amplitud y profundidad. Asimismo, se incluyen las soluciones de los ejercicios para facilitar el estudio individual. Algunos ejercicios son un poco más difíciles y están marcados con ◇. No es necesario dominar estos ejercicios antes de avanzar en el texto.

Para enfatizar su visión común, los autores de estos dos volúmenes han fusionado su identidad en la de L. T. F. Gamut. Gamut trabaja (o al menos trabajó en el momento en que se escribía el libro) en tres universidades diferentes de Holanda: Johan van Benthem como lógico en la Universidad de Groningen; Jeroen Groenendijk como filósofo, Dick de Jongh como lógico y Martin Stokhof como filósofo en la Universidad de Amsterdam; y Henk Verkuyl como lingüista en la Universidad de Utrecht.

Este trabajo no surgió de la nada. Partes del mismo circularon como apuntes de clase para los estudiantes. Los ejercicios en particular fueron tomados de un acervo construido a través de los años por los autores y sus colegas. Los autores quieren expresar su agradecimiento a quienes contribuyeron de alguna manera con este libro. Agradecemos especialmente a Piet Rodemburg, quien ayudó a escribirlo en sus comienzos, a Michael Morreau, por su traducción del volumen 1 y partes del volumen 2, y a Babette Greiner, por su traducción de la mayor parte del volumen 2.

Sumario del volumen 1

En el capítulo 1 se introduce la lógica como teoría del razonamiento. Se formulan algunos comentarios sistemáticos acerca de la vinculación entre lógica y significado, y se examinan las relaciones entre lógica, filosofía y lingüística desde una perspectiva histórica. Además, se discute el papel de los lenguajes formales y la forma en que se los usa.

El capítulo 2 se ocupa de la lógica proposicional, enfatizando su aspecto semántico. A continuación de la exposición del método usual de las tablas de verdad, se presenta la interpretación de las conectivas como funciones de verdad. Relacionado con esto y también para un uso futuro, se introduce el concepto de función. El capítulo 2 concluye con una sección en la que se desarrolla la sintaxis de los lenguajes proposicionales en forma más afín con la sintaxis de los lenguajes naturales. El propósito de esa sección –que no es presupuesta en los siguientes capítulos– es el de ilustrar la flexibilidad del aparato lógico.

El capítulo 3 se ocupa de la lógica de predicados. Aquí también se enfatiza el aspecto semántico. Se presta mucha atención a la traducción de oraciones del lenguaje natural al lenguaje de la lógica de predicados. Se define la interpretación de los cuantificadores de dos maneras: por sustitución y por asignación. Se introducen conjuntos, relaciones y funciones en forma minuciosa. A pesar de que en este libro se presta especial atención al lenguaje y al significado, la introducción de la lógica proposicional y de predicados clásicas presentada en los capítulos 2 y 3, ha sido realizada de forma tal que la misma sea apta para propósitos generales.

Debido a esto, el capítulo 4, que trata acerca de la teoría de la inferencia, contiene no sólo una caracterización semántica sino también una caracterización sintáctica de los esquemas de argumento válidos. Hemos elegido la deducción natural para este tratamiento sintáctico de la inferencia. A pesar de que en diversos lugares del volumen 1 y 2 se hace referencia a este capítulo sobre deducción natural, no se presupone su conocimiento.

En el capítulo 5 se tratan diversos temas que, en mayor o menor medida, trascienden los límites de la lógica proposicional y de predicados clásicas de los capítulos 2 a 4. Las descripciones definidas constituyen un tema no estándar usual que desempeña un papel importante en la literatura filosófica. El carácter flexible de la lógica queda ilustrado en las secciones referidas a la cuantificación restringida, la lógica de predicados multivariada y la eliminación de variables. El tratamiento de la lógica de segundo orden es un peldaño hacia la lógica de los tipos, abordada en el volumen 2. A diferencia de los temas recién mencionados, los cuales presuponen la lógica de predicados, la sección sobre lógica multivalente puede leerse a continuación del capítulo 2. Se realiza un extenso desarrollo del análisis de las presuposiciones semánticas por medio de las lógicas multivalentes.

De la misma manera, el capítulo 6 sólo presupone el conocimiento de la lógica proposicional. Se abordan algunos aspectos del significado de las conjunciones en el lenguaje natural que no parecen estar contemplados por las conectivas de la lógica proposicional. Se ofrece una explicación pragmática de dichos aspectos del significado siguiendo las líneas de la teoría de las implicaturas conversacionales de Grice. El capítulo 6 sugiere la forma en que puede desarrollarse una pragmática lógica en la que se puedan describir, con la ayuda de técnicas lógicas, los aspectos del significado que no dependan de las condiciones de verdad.

El capítulo 7 aborda otro tema que también es común a la lógica y a la lingüística, a saber, el transfondo matemático de la sintaxis formal. Aquí se lo trata mayormente en términos del concepto de autómata que reconoce y genera lenguajes. De esta forma, se discuten paralelismos obvios entre la sintaxis de un lenguaje formal y la sintaxis de un lenguaje natural.

Este volumen concluye con notas bibliográficas respecto de la literatura relevante, que no pretenden ser exhaustivas.

1 Introducción

1.1 Argumentos, argumentos válidos y esquemas de argumento

Podría decirse que la lógica es la ciencia del razonamiento. El razonar tiene diversas aplicaciones, y tradicionalmente la *argumentación* es una aplicación importante. Los razonamientos que estudia la lógica aú
n se siguen denominando *argumentos*, o *esquemas de argumento*. La tarea de la lógica consiste en descubrir lo que hace que un argumento válido (o una inferencia válida) sea válido.

Para nuestros propósitos es conveniente considerar a un argumento como una secuencia de oraciones tal que las *premisas* están al comienzo y la *conclusión* al final del argumento. Un argumento puede estar formado por pequeños pasos, subargumentos, cuyas conclusiones sirven como premisas del argumento principal. Pero podemos ignorar esta complicación y otras similares sin perder nada esencial (véase §4.1).

Un argumento válido es un argumento cuyas premisas y conclusión son tales que la verdad de las primeras implica la de la última: *si* las premisas de un argumento válido son todas verdaderas, *entonces* su conclusión también debe ser verdadera. Adviértase que no se dice que de hecho las premisas sean verdaderas. La validez de un argumento es independiente del hecho de que sus premisas y conclusión sean verdaderas. Se dice que la conclusión de un argumento válido es una *consecuencia lógica* de sus premisas.

A continuación consignamos algunos ejemplos sencillos de argumentos válidos:

(1) Juan vendrá a la fiesta o María vendrá a la fiesta.
Juan no vendrá a la fiesta.
____
María vendrá a la fiesta.

(2) Juan vendrá a la fiesta o María vendrá a la fiesta.
Si Juan no consigue una niñera, no vendrá a la fiesta.
Juan no consiguió una niñera.
____
María vendrá a la fiesta.

(3) Todos los aviones pueden estrellarse.
Todos los DC-10 son aviones.
___
Todos los DC-10 pueden estrellarse.

(4) Juan es maestro.
Juan es simpático.
___
No todos los maestros son antipáticos.

(5) Todos los peces son mamíferos.
Moby Dick es un pez.
___
Moby Dick es un mamífero.

Todos estos ejemplos son válidos: cualquiera que acepte que sus premisas son verdaderas también tendrá que aceptar que sus conclusiones son verdaderas. Por ejemplo, consideremos (1). Cualquiera puede advertir que (1) es un argumento válido aunque no pueda determinar la verdad o falsedad de sus premisas. Para decir que este argumento es válido, o sea, para decir que *si* las premisas son todas verdaderas, *entonces* también debe serlo su conclusión, evidentemente ni siquiera se requiere saber quiénes son Maria y Juan, ni cuál es su comportamiento respecto de las fiestas. Una vez más, la validez de un argumento no tiene nada que ver con el hecho de que las premisas resulten ser verdaderas. En el ejemplo (5) queda de manifiesto que las premisas de un argumento válido pueden incluso ser evidentemente falsas. Obviamente las dos premisas de este argumento son falsas, pero esto no impide que el argumento en su conjunto sea válido. Dado que si se aceptara que las premisas son verdaderas, entonces también tendria que aceptarse la conclusión. No se puede pensar en ninguna situación en la cual las premisas sean todas verdaderas sin que automáticamente se trate de una situación en la cual la conclusión también lo sea.

La verdad fáctica de las premisas no sólo no es necesaria sino que tampoco es suficiente para que un argumento sea válido. Esto queda claro a partir del siguiente ejemplo:

(6) Todos los caballos son mamíferos.
Todos los caballos son vertebrados.
___
Todos los mamíferos son vertebrados.

Tanto las premisas como la conclusión de (6) son verdaderas, pero esto no hace que (6) sea válido. Aceptar la verdad de sus premisas no implica aceptar la de la conclusión, dado que resulta sencillo imaginar situaciones en las que las primeras sean verdaderas, mientras que, como resultado de una evolución un poco diferente de los mamíferos, la última sea falsa.

Pero si la verdad o falsedad de las premisas y de la conclusión de un razonamiento no es lo que determina su validez, ¿qué es lo que la determina? Volvamos al ejemplo (1). Hemos señalado que para decir que el argumento es válido no necesitamos ni siquiera saber quién es Juan. De hecho, la validez del argumento no tiene nada que ver con la persona de Juan, como puede advertirse si lo cambiamos por otra persona, por ejemplo por Pedro. Si escribimos *Pedro* en lugar de *Juan*, el argumento sigue siendo válido:

(7) Pedro vendrá a la fiesta o María vendrá a la fiesta.
Pedro no vendrá a la fiesta.

María vendrá a la fiesta.

El nombre *Juan* no es la única expresión que puede cambiarse por otra reteniendo, al mismo tiempo, la validez del argumento:

(8) Pedro vendrá a la reunión o María vendrá a la reunión.
Pedro no vendrá a la reunión.

María vendrá a la reunión.

Si probamos todas las alternativas, resultará que *o* y *no* son las únicas expresiones que no pueden cambiarse por otras. Así, por ejemplo, (9) y (10) no son argumentos válidos:

(9) Juan vendrá a la fiesta o María vendrá a la fiesta.
Juan vendrá a la fiesta.

María vendrá a la fiesta.

(10) Juan vendrá a la fiesta, si María viene a la fiesta.
Juan no vendrá a la fiesta.

María vendrá a la fiesta.

A partir de lo expuesto queda claro que la validez de (1) depende sólo del hecho de que una de las premisas consiste en dos oraciones vinculadas mediante la conjunción *o*, que la otra premisa es una negación de la primera oración de la primera premisa, y que la conclusión es la segunda oración de la primera premisa. Además, (1) no es el único argumento cuya validez depende de este hecho. Lo mismo se aplica, por ejemplo, a (7) y a (8). Decimos que (1), (7) y (8) tienen una *forma* particular en común, y que esta forma es la responsable de su validez. Esta forma común puede representarse esquemáticamente como sigue:

(11) A o B
No A
B

A estas representaciones esquemáticas de argumentos se les denomina *esquemas de argumento*. Las letras *A* y *B* representan oraciones arbitrarias. Si las sustituimos por oraciones reales, obtenemos argumentos reales. Cualquier sustitución de este tipo del esquema (11) da como resultado un argumento válido, y por esta razón decimos que (11) es un *esquema de argumento válido*.

La 'forma' que puede ser representada por (11) es algo más que una simple construcción sintáctica. La primer premisa no consiste simplemente en dos oraciones vinculadas por una conjunción, ya que también es importante el tipo de conjunción de que se trate. Si se reemplaza la conjunción *o* de (11) por otra conjunción, por ejemplo *si*, obtenemos un esquema de argumento diferente:

(12) A si B
No A
―――――
B

Este esquema no es válido. Por ejemplo, una de las sustituciones para *A* y *B* es (10), y éste no es un argumento válido. Si examinamos el ejemplo (5) con mayor profundidad queda de manifiesto que otras expresiones distintas de las conjunciones pueden conducir a argumentos válidos. Consideraciones similares a las realizadas respecto de (1) llevan al siguiente esquema de argumento para (5):

(13) Todos los P son Q
a es P
―――――
a es Q

En este esquema las letras *P* y *Q* reemplazan expresiones que se refieren a propiedades, y *a* reemplaza una expresión que se refiere a un individuo o una entidad, es decir, un objeto material o abstracto. Quedará claro que toda sustitución de *a*, *P* y *Q* da como resultado un argumento válido: (5) es un ejemplo de ello. La validez de este esquema deriva, entre otras cosas, del significado de la expresión cuantificadora *todos*. Otros ejemplos de expresiones cuantificadoras que pueden aparecer en los esquemas de argumento son *algunos* y *ninguno*.

La lógica, en tanto que ciencia del razonamiento, investiga la validez de los argumentos mediante el estudio de la validez de los esquemas de argumento. Esto en virtud de que los esquemas de argumento son abstracciones que eliminan de los argumentos concretos todos los elementos que no tengan relación con su validez. Como ya hemos visto, los esquemas de argumento pueden formarse a partir de una diversidad de expresiones y construcciones sintácticas. Habitualmente no se los considera a todos conjuntamente sino que se los estudia por grupos. Así, por ejemplo, podemos concentrarnos en aquellos esquemas de argumento que pueden formarse exclusivamente con oraciones, conjunciones gramaticales tales como *o* y *si... entonces*, y la negación. O podemos escoger argumentos que contengan expresiones cuantificadoras. Pero, antes de avanzar más en esta cuestión, consideraremos brevemente las relaciones entre lógica y significado.

1.2 Lógica y significado

Tal como lo señaláramos, el significado de ciertos tipos de expresiones desempeña un papel esencial en la determinación de la validez de los esquemas en los que aparecen. De manera que, en la medida en que la lógica se ocupa de la validez de esquemas de argumento, también se ocupa del significado de expresiones. Por ejemplo, considérese la conjunción *o*; su significado es parcialmente responsable de la validez del esquema de argumento (11). Por lo tanto, al investigar la validez del esquema en el que esta conjunción cumple un papel, también estamos investigando su significado. Y si logramos determinar exactamente cuáles de esos esquemas son válidos y cuáles no, lo cual es tarea de la lógica, en alguna medida habremos logrado determinar el significado de *o*. Lo mismo se aplica, obviamente, a todas las otras expresiones que pueden gravitar en la validez de los esquemas de argumento, como las otras conjunciones, la negación y las expresiones cuantificadoras. Pero, habiendo caracterizado todos los esquemas de argumento válidos en los que aparecen las expresiones dadas, ¿habremos logrado determinar el significado completo de esas expresiones? Retomaremos esta cuestión en los capítulos 2 y 6. Por ahora diremos solamente que de esa forma podemos determinar al menos una parte considerable e importante del significado de una expresión. Conocer el significado de la palabra *y* involucra obviamente conocer que la conclusión *A* (y la conclusión *B*) puede ser inferida de la expresión *A y B*.

Investigar la validez de los argumentos implica estudiar una relación particular que se da entre los significados de las oraciones, la relación de *consecuencia lógica*, y por ende, implica también estudiar el significado de las expresiones particulares. Anteriormente dijimos que los argumentos válidos son aquellos cuyas conclusiones son consecuencia lógica de sus premisas. Por lo tanto, una caracterización de los argumentos válidos es una caracterización de cuáles oraciones se siguen de cuáles otras. La relación de *consecuencia lógica* , que como veremos puede definirse en términos de la noción semántica más simple de *verdad*, puede a su vez usarse para caracterizar otras relaciones que se dan entre los significados de las oraciones y otros tipos de expresiones.

Lo que hace a la lógica interesante desde un punto de vista lingüístico es la vinculación entre lógica y significado. Además, la contribución que puede hacer la lógica a la lingüística no se limita a proporcionar descripciones precisas de los significados de las conjunciones gramaticales, la negación, las expresiones cuantificadoras, etc. Debe hacerse notar que la lógica proporciona interpretaciones semánticas de las operaciones sintácticas. Con esto queremos significar que, cuando investigamos los argumentos que son válidos sobre la base del significado de las conjunciones gramaticales y la negación, no nos interesa el significado real de las oraciones vinculadas por medio de esas conjunciones. No consideramos argumentos reales como (1) y (10), sino esquemas de argumento como (11) y (12). Pero, aun así decimos algo acerca del significado de las oraciones; por ello, en algún punto debemos decir qué *tipo* de entidades son los significados de las oraciones y *de qué forma* el significado de las oraciones compuestas depende del significado de sus partes componentes. En otras palabras, debe otorgarse mayor precisión a la naturaleza del concepto ‘significado de una oración’, y se debe dar una interpretación semántica de las operaciones sintácticas mediante las cuales pueden obtenerse unas oraciones a partir de otras. Por ello no nos ocupamos del significado real de las expresiones predicativas particulares, pero determinamos la naturaleza de su significado y damos una interpretación semántica de las reglas sintácticas mediante las cuales se pueden obtener oraciones a partir de expresiones predicativas y cuantificadoras. Así, la lógica otorga un contenido preciso al principio según el cual el significado de una expresión compuesta debe construirse a partir del significado de sus partes componentes. Este principio, que generalmente se atribuye a Frege, se conoce como *el principio de composicionalidad del significado*.

Además, los campos a los cuales se aplica la lógica pueden ampliarse en dos direcciones. Por un lado, la lógica puede usarse para argumentos que analizan expresiones distintas de las conjunciones, la negación y las expresiones cuantificadoras, como por ejemplo, construcciones temporales, expresiones modales, y similares. Luego diremos más acerca de esto. Por otro lado, podemos tratar de realizar un análisis semántico de las oraciones que no son declarativas. En el pasado la lógica se ocupó principalmente de los razoñamientos, lo cual dio como resultado que sólo se consideraran las *oraciones declarativas*, oraciones que expresan algún estado de cosas y que son verdaderas o falsas. Un argumento se compone de oraciones declarativas. No contiene, por ejemplo, preguntas. Sin embargo, en el estudio de las *oraciones no declarativas* es posible aplicar las nociones semánticas desarrolladas para las oraciones declarativas. También hay relaciones entre los significados de las últimas, y a menudo hay analogías con las relaciones que se cumplen entre las oraciones declarativas. Por ejemplo, compárese la relación entre (14a) y (b) con la relaciones entre (15a) y (b), y lo mismo para (16) y (17):

(14) a. Juan y María están caminando calle abajo.
b. Juan está caminando calle abajo.

(15) a. ¿Juan y María están caminando calle abajo?
b. ¿Juan está caminando calle abajo?

(16) a. Todos aman a todos.
b. Todo hombre ama a toda mujer.

(17) a. ¿Quién ama a quién?
b. ¿Qué hombre ama a qué mujer?

Aquí no podremos ahondar en el análisis semántico de las oraciones no declarativas, pero el lector debe tener en cuenta que la restricción a oraciones declarativas es meramente tradicional, no se fundamenta en ningún principio.

Siendo así, en el campo de la semántica se espera una gran contribución de la lógica a la lingüística, y esta contribución es el tema principal del volumen 2. Tenderemos a adoptar un enfoque semántico de las teorías lógicas, resaltando menos el enfoque sintáctico. Ignoraremos casi por completo una parte muy importante de la lógica moderna, el campo de la metalógica, el cual investiga los sistemas lógicos mismos desde un punto de vista matemático. No obstante, se discutirán brevemente algunos de sus resultados más importantes en §4.4.

1.3 Constantes lógicas y sistemas lógicos

Sea que consideremos a la lógica como la ciencia del razonamiento o la ciencia de las relaciones entre significados, en ningún caso existe una lógica universal que caracterice a *todos* los argumentos válidos o a las relaciones entre los significados de *todas* las expresiones. En la práctica, se desarrollan diferentes *sistemas lógicos*, cada uno con su propia clase particular de argumentos. La composición de esta clase depende de los tipos de expresiones del lenguaje lógico que usa el sistema lógico.

Por ejemplo, el sistema de *lógica proposicional*, tema del capítulo 2, se ocupa de formas de argumento cuya validez depende del significado de las expresiones *y*, *o*, *si* (... *entonces*), *si y sólo si* y la negación *no*. Se deja fuera toda otra cosa que afecte la validez de los argumentos. De esta manera, los esquemas de argumento como (11) y (12) forman parte de la lógica proposicional, mientras que los esquemas como (13) no lo hacen. El segundo sistema lógico importante que trataremos, el sistema de *lógica de predicados* discutido en el capítulo 3, se ocupa no sólo de esquemas de argumento proposicionales sino también de esquemas de argumento que contienen expresiones cuantificadoras, como *todo* y *alguno*. Este sistema incluye esquemas de argumento como (13).

Así, cada sistema lógico caracteriza su propia clase de esquemas de argumento válidos: su validez se basa en el significado de ciertas expresiones que emplea el sistema. Las expresiones que desempeñan este papel en un sistema lógico se denominan sus *constantes lógicas*, dado que dentro de ese sistema su significado es absolutamente fijo.

¿Qué tipos de expresiones pueden ser tratadas como constantes lógicas en un sistema lógico? Esta es una pregunta interesante. Un hecho importante y que podría ayudarnos es que en lógica nos interesa la *estructura* de los argumentos, esto es, los esquemas de argumento. Los argumentos deben ser válidos sólo en virtud de su forma externa y no en virtud de su contenido. Así, una expresión debe otorgar validez estructural a un esquema de argumento si se la puede considerar como una constante lógica. Este criterio deja fuera los términos puramente descriptivos tales como *mamífero*, *fiesta* o *avión*. Y las expresiones como *y*, *o*, *si* (... *entonces*), *si y sólo si*, la negación *no* y las expresiones cuantificadoras *todo* y *alguno* son claros ejemplos de construcciones que pueden otorgar validez estructural a formas de argumento. Ciertamente ésta es su única función en el lenguaje. Dado que no tienen contenido descriptivo, su significado está enteramente determinado por el papel que cumplen en los argumentos. Así, las conjunciones *y*, *o*, *si* (... *entonces*), *si y sólo si*, y la negación *no* se consideran como las constantes lógicas de la lógica proposicional; y éstas conjuntamente con las expresiones cuantificadoras *todo* y *alguno* constituyen las constantes de la lógica de predicados.

Hay otros sistemas lógicos además de los mencionados, cada uno con su propio conjunto de constantes lógicas. Como veremos, las conjunciones, la negación y las expresiones cuantificadoras del lenguaje natural a menudo forman parte de estos otros sistemas. Dichos sistemas lógicos han sido creados agregando constantes lógicas a las de la lógica proposicional. Estas últimas parecen ser tan fundamentales que no tendría sentido desarrollar una noción de validez sin ellas.

Sin embargo, debe advertirse que ésta no es la única manera en que se pueden desarrollar nuevos sistemas lógicos. También podemos considerar el mismo conjunto de constantes lógicas bajo una nueva interpretación. Esto también da como resultado una clase diferente de esquemas de argumento válidos. Así, además de la denominada lógica proposicional clásica tenemos, entre otras alternativas, la lógica proposicional intuicionista (véase §4.3.5), en la que las mismas constantes lógicas reciben una interpretación levemente diferente. Por consiguiente, en sentido estricto un sistema lógico queda caracterizado por sus constantes lógicas conjuntamente con la interpretación que se hace de ellas.

Las otras constantes lógicas distintas de las mencionadas hasta aquí son, por ejemplo, expresiones modales tales como *posiblemente* y *necesariamente*, estudiadas por la lógica modal (véase vol. 2), y expresiones temporales y construcciones como *era el caso que*, *será el caso que*, *alguna vez*, *nunca* y los tiempos verbales, estudiados por la *lógica temporal* (también en vol. 2). Todas estas expresiones y construcciones desempeñan un papel estructural en la validez de los argumentos. Pero, a diferencia de las constantes lógicas de la lógica proposicional y de la de predicados, ellas parecen tener, adicionalmente, un cierto contenido descriptivo y estar estrechamente vinculadas con conceptos filosóficos tradicionales como *necesidad* y *tiempo*, lo cual constituye una de las principales razones para que los sistemas lógicos cuyas constantes lógicas son estas expresiones, se desarrollaran en primer lugar. La misma vinculación con cuestiones filosóficas fue también la fuerza motora subyacente al desarrollo de la *lógica epistémica*, núcleo lógico lo forman nociones tales como *creencia* y *conocimiento* y la lógica deóntica, que se ocupa de nociones tales como *permiso* y *obligación*.

El conjunto de constantes lógicas posibles es abierto. Podríamos dar algunos ejemplos más de expresiones y construcciones con las que de hecho se han desarrollado sistemas lógicos, pero resultaría excesivamente complicado especificar el conjunto de todas las expresiones y construcciones para las cuales tendría sentido hacerlo. Los sistemas lógicos que emplean las constantes mencionadas anteriormente tienen sentido, pero un sistema lógico en el que la validez de los argumentos estuviera enteramente basada en el contenido descriptivo de ciertos términos no tendría sentido. Cualquier sistema de este tipo no sería una descripción de los factores estructurales que determinan la validez o invalidez de esquemas de argumento sino una descripción del mundo real, y éste no es el cometido de la lógica. Sin embargo, no se puede trazar un límite preciso entre los términos puramente descriptivos y el resto, debido a que hay expresiones que son dudosas al respecto. Aquí hay un claro paralelo con el problema de decir qué es lo que las teorías lingüísticas del significado deberían explicar y qué es lo que deberían ignorar. Parece haber una transición gradual desde los aspectos estructurales del significado, que caen dentro del alcance de las teorías lingüísticas, y el contenido descriptivo, que no lo hace.

A continuación formularemos algunos comentarios acerca de las aplicaciones de la lógica a la lingüística. En primer lugar, si decimos que se aplica *la lógica*, entonces lo que realmente queremos decir es que se está aplicando algún sistema lógico. En segundo lugar, y a pesar de nuestros comentarios previos acerca de las vinculaciones entre lógica y significado, no se puede esperar que la lógica proporcione una teoría del significado completa para el lenguaje natural. La inspiración lingüística a veces influye en el desarrollo de teorías lógicas, pero en general los tipos de problemas que dan lugar a teorías lógicas son más bien diferentes de los que originan teorías lingüísticas. Pero, a pesar de las diferencias en parte históricas y en parte sistemáticas ya mencionadas, parece haber un creciente reconocimiento de que existen vínculos esenciales entre los dos campos.

Según nuestra opinión, la contribución de la lógica a la lingüística es doble. En primer lugar, la lógica contribuye con sistemas que dan una descripción precisa de un grupo de expresiones que, debido a su importancia en el razonamiento, no pueden ser ignoradas por una teoría lingüística del significado. Esta descripción proporciona una caracterización de los diversos tipos de significado que pueden adscribirse a diferentes categorías sintácticas y de la forma en que el significado de una expresión compleja puede construirse a partir del significado de sus partes componentes. En segundo lugar, la lógica contribuye con métodos y conceptos útiles para el análisis de expresiones y construcciones de las que tradicionalmente no se ha ocupado la lógica en tanto teoría del razonamiento, pero que deben ser explicadas por una teoría lingüística del significado. Ambas contribuciones serán ilustradas en lo que sigue.

En §1.4 y §1.5 discutiremos además los vínculos históricos entre lógica y lingüística. Esto debería colocar a este libro en un contexto más amplio y ayudar a explicar la creciente importancia de la semántica del lenguaje natural para la lingüística, la filosofía y la lógica.

1.4 Lógica y lingüística antes del siglo XX

La ciencia de la lógica surgió hace más de dos mil años, cuando Aristóteles reunió y organizó ciertas ideas filosóficas acerca del razonamiento, dando origen así a su *lógica silogística*. Los silogismos son tipos particulares de inferencias en las que la conclusión se obtiene a partir de dos premisas, como en (5), (6) y (18):

(18) Todos los niños son egoístas.
Algunas personas no son egoístas.
―――――――――――――――
Algunas personas no son niños.

La teoría del silogismo de Aristóteles indica cuáles de estos tipos de inferencias son válidos y cuáles no.

Sólo los siguientes tipos de proposiciones sujeto/predicado pueden aparecer en silogismos:

(19)	Todo A es B	(Universal Afirmativa)
	Todo A es no-B	(Universal Negativa)
	Algún A es B	(Particular Afirmativa)
	Algún A es no-B	(Particular Negativa)

A y B son denominados *términos*. Éstos se refieren a conceptos tales como 'niños', 'egoísta', 'personas', etc. Aristóteles sabía que el lenguaje contiene muchos otros tipos de expresiones, por ejemplo expresiones *singulares* tales como:

(20) a es B (Singular Afirmativa)
a es no-B (Singular Negativa)

Pero su lógica sólo intentaba describir el razonamiento científico. Y, según Aristóteles, las oraciones singulares no forman parte del razonamiento científico. Aristóteles también mencionó otras formas de inferencia, como el bien conocido *Modus Ponens*:

(21) Si él está ebrio, entonces él es peligroso.
El está ebrio.

El es peligroso.

Mientras que la validez de las inferencias silogísticas como (18) depende primordialmente del significado de las expresiones cuantificadoras como *todo* y *algún*, la validez de (21) depende de la conjunción *si* (... *entonces*).

Los Estoicos (±400-200 a.C.) fueron los responsables del desarrollo sistemático de este último tipo de inferencia. Además, también se interesaron por diversas cuestiones semánticas, tales como la naturaleza de la verdad. Ellos (en particular Eubúlides, siglo IV a.C.) fueron los primeros que formularon la bien conocida 'paradoja del mentiroso'. La siguiente es una versión moderna de la misma:

(22) La oración (22) del capítulo 1 es falsa.

¿La oración (22) es verdadera o falsa? Por un lado, si (22) es verdadera, entonces lo que dice es falso: esto es, (22) es falsa. Pero, por otro lado, si (22) es falsa, entonces lo que dice es verdadero, por ende (22) es verdadera. Parece que el preocuparse excesivamente por este dilema resultó fatal para Philitas de Cos. En el siglo XX, el eminente lógico polaco Alfred Tarski convirtió aquello que había sido una curiosidad histórica en la piedra de toque de su teoría semántica. La paradoja lo llevó a trazar una distinción metodológica entre el lenguaje en tanto objeto de discusión, el *lenguaje objeto*, y el lenguaje como medio en el que dicha discusión toma lugar, el *metalenguaje*. La confusión entre estos dos niveles es lo que torna paradójica a (22).

Lo que se intenta mostrar aquí es que algunos problemas centrales de la lógica moderna ya existían en tiempos clásicos: eran de importancia los problemas relacionados con las expresiones cuantificadoras, las conjunciones gramaticales y las inferencias que éstas permiten, así como diversos problemas concernientes a la naturaleza de la verdad. Es importante hacer notar que la lógica silogística de Aristóteles sólo se ocupó de la *cuantificación simple*, es decir, de proposiciones que contienen una sola expresión cuantificadora.

Aristóteles también ocupa un lugar especial en la historia de la lingüística en tanto que fue el creador del pensamiento lingüístico sistemático. Tanto el *análisis gramatical* (en el que las oraciones se dividen en palabras y grupos de palabras según su función) como el *análisis morfo-sintáctico* (en el que se categorizan las palabras individuales) pueden rastrearse en ideas de Aristóteles. Por ejemplo, la distinción que el análisis lingüístico traza entre sujeto y predicado guarda un estrecho paralelismo con la mencionada distinción sujeto/predicado de Aristóteles. Asimismo, en su trabajo pueden encontrarse indicaciones para clasificar las palabras en categorías tales como sustantivos propios, nombres, etc. De acuerdo con Peter Geach, incluso la gramática categorial moderna (véase vol. 2) puede ser rastreada hasta Aristóteles. Las oraciones simples como

(23) Sócrates está volando.

se analizan gramaticalmente como sustantivo-predicado (en griego: onoma-rhèma). Las oraciones más complejas como

(24) Todo hombre está volando.

¿deben analizarse gramaticalmente de la misma forma como (*Todo hombre*) *-está volando*? Aristóteles lo niega, en *De Interpretatione*, en razón de que (23) y (24) se comportan en forma diferente respecto de la negación. La negación de (23) es:

(25) Sócrates no está volando.

mientras que la negación de (24) no es (26) sino (27):

(26) Todo hombre no está volando.

(27) No todo hombre está volando.

Para formar *no todo hombre* en (27) se adiciona *No* a *todo hombre*, pero en la negación de (23) no es aceptable una construcción similar: (*No Sócrates*)*-está volando* es claramente un análisis incorrecto. Geach concluye que Aristóteles estaba al tanto de las diferencias (que existen, de acuerdo con Geach) entre *Sócrates* y *todo hombre*.

Las primeras escuelas de gramática conocidas, las de Pérgamo y Alejandría, estaban fuertemente influenciadas por la filosofía. Alejandría levantó la bandera aristotélica, como queda evidenciado por su convicción de que el lenguaje es un sistema convencional. La escuela de Pérgamo evidencia una influencia estoica por el énfasis otorgado a lo que se considera la irregularidad esencial del lenguaje. Este énfasis no favorecía el desarrollo de teorías gramaticales sistemáticas, de manera que no es sorprendente que la primera gramática verdadera, la de Dionisio de Tracia (±100 a.C.) se haya desarrollado dentro de la escuela de Alejandría.

Aplicando los principios aristotélicos de clasificación, Dionisio elaboró una clasificación del lenguaje en categorías que aun hoy nos resultan familiares: sustantivo, verbo, participio, artículo, pronombre, preposición, adverbio y conjunción. No obstante, según algunos estudiosos, su terminología deriva de fuentes estoicas. Es interesante advertir que para Dionisio los objetivos del estudio de la gramática son: la lectura correcta (en voz alta) de textos literarios, la explicación de figuras literarias y temas elegidos, una inspección de las regularidades gramaticales y (aun más importante) una mejor comprensión de la literatura.

Volviendo a la lógica, durante la Edad Media encontramos, además de teorías de la inferencia esencialmente clásicas, teorías bastante desarrolladas acerca de la forma y el significado. Hubo una considerable sensibilidad respecto de la inmensa diversidad del lenguaje, y se buscaron explicaciones para cada tipo de expresión diferente. La bien conocida *teoría de la suposición* puede ser considerada como un intento por realizar un análisis semántico de los términos y de sus combinaciones tal como se encuentran en el lenguaje. En tanto tal, la teoría de la suposición declinó juntamente con el resto del escolasticismo. Sin embargo, aun hoy se conservan algunas de las distinciones trazadas en ese momento. Por ejemplo, la distinción entre *suppositio formalis* y *suppositio materialis* se conoce ahora como la distinción *uso/mención*. Esta distinción queda manifiesta en la diferencia entre las oraciones (28) y (29):

(28) Amsterdam es la ciudad capital de Holanda.

(29) Amsterdam tiene nueve letras.

Los escolásticos dijeron que el término *Amsterdam* en (28) tiene *suppositio formalis*, es decir, es *usado* para referirse a esa ciudad holandesa. Pero en (29) el término tiene *suppositio materialis*: se refiere a la palabra *Amsterdam*; el término es *mencionado*. En este libro hacemos una distinción tipográfica entre uso y mención, escribiendo (29) bajo la forma de (30):

(30) *Amsterdam* tiene nueve letras.

La teoría de la *distribución de los términos*, que hasta hace poco tiempo fue memorizada por muchas generaciones de estudiantes, es otra reliquia de la Edad Media. En la oración universal afirmativa *Todos los A son B*, el término *A* está 'distribuido': la oración dice algo acerca de la totalidad del concepto *A*. Por otro lado, el término *B* no está distribuido: la oración no necesariamente dice algo acerca de todos los *B*, sino sólo acerca de los A que haya entre ellos.

Debe advertirse que la teoría de la suposición también debía ocuparse de los problemas que plantean las oraciones que tienen más de un cuantificador. Como ya lo mencionáramos, dichas oraciones no estaban incluidas en la teoría aristotélica del silogismo. Pero, ya en el siglo XIII, Guillermo de Shyreswood estudió la validez de las inferencias como (31):

(31) Alguien es visto por todos. (*suppositio determinata*)
____
Todos ven a alguien. (*suppositio confusa tantum*)

Nótese que la inferencia inversa no es válida. Resulta sorprendente lo conformes que quedaban Aristóteles y algunos filósofos medievales al emplear la inversa (inválida) de (31) cuando les servía para sus propósitos metafísicos. Así, por ejemplo, la conclusión de que hay una causa que es la causa de todo acontecimiento era inferida de la premisa que afirma que todo acontecimiento tiene una causa.

Los escolásticos no lograron dar cuenta en forma satisfactoria de las oraciones con más de una expresión cuantificadora. De hecho, no fue hasta 1879, con la publicación de *Begriffschrift* de Frege, que se resolvió definitivamente el problema de la cuantificación múltiple.

Durante la Edad Media, la lingüística se preocupó principalmente por encontrar bases racionales para las reglas de la gramática. No era suficiente con que esas reglas 'funcionaran' en el análisis de textos literarios; lo que importaba era la forma en que se relacionaban con, o reflejaban, la naturaleza del pensamiento. Los gramáticos con orientación filosófica que consideraban al lenguaje desde este punto de vista eran conocidos como Modistas. Además de elaborarse gramáticas descriptivas para propósitos prácticos, también se desarrollaron gramáticas especulativas (*speculum*). El ideal de una *gramática universal* ganó popularidad. Después de todo, si el pensamiento humano es el mismo en todos lados, entonces la gramática ideal también debe serlo. De acuerdo con este enfoque de la gramática, los diferentes lenguajes son variaciones sobre y aproximaciones a este tema ideal.

En la siguiente cita de Alberto Magno (siglo XIII) queda de manifiesto que los gramáticos consideraban que la lógica es indispensable: "Un gramático no versado (en lógica) es a un gramático versado en lógica, lo que un idiota es a un hombre sabio". Asimismo, la lógica comenzó a ocuparse cada vez más de los aspectos lingüísticos del razonamiento, como queda de manifiesto en la opinión de Guillermo de Shyreswood, para quien la gramática nos enseña a hablar correctamente, la retórica nos enseña a hablar elegantemente y la lógica nos enseña a hablar con la verdad.

Para los gramáticos con orientación filosófica la lógica no era una *scientia rationalis*, o sea, una ciencia de los conceptos, sino más bien una *scientia sermocinalis*, es decir, una ciencia del discurso que se ocupa de los términos. Uno de los productos de este interés por los términos y su semántica fue la distinción entre términos *categoremáticos*, como *hombre* o *enfermo*, que refieren a algo y términos *sincategoremáticos*, como *cada* o *no*, que supuestamente no tienen referencia propia pero que desde un punto de vista lógico, son esenciales para el significado de las oraciones y las relaciones lógicas que se dan entre ellas.

Pero, a medida que transcurría la Edad Media, el desarrollo de la lógica pareció detenerse gradualmente. En 1789, en el prefacio de la segunda edición de la *Crítica de la Razón Pura*, Immanuel Kant escribió que la lógica no había perdido terreno desde Aristóteles, pero que tampoco lo había ganado y que había indicios de que ya no avanzaría más. Pero Kant se equivocó. Cien años antes, el matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien trabajaba en la misma época y bajo el mismo aislamiento que la escuela de Port-Royal, propuso un programa para la lógica y desarrolló ideas que siguen estando presentes en las teorías lógicas modernas. Sugirió que se desarrollara una *caracteristica universalis*, un lenguaje universal en el cual pudiera representarse el lenguaje en forma directa, sin las ambigüedades, vaguedades y figuras del habla que son propias de los lenguajes naturales. Así, la manipulación de los símbolos de este lenguaje universal, el *ars combinatoria*, se corresponderia directamente con las operaciones que realizamos en nuestro pensamiento. Por consiguiente, sería posible constatar la validez de las cadenas de razonamientos de este lenguaje por medio del cálculo, en el *calculus ratiocinator*. Este filósofo optimista pensó que las diferencias de opinión, podrían ser resueltas en forma sencilla por medio de cálculos: "Entonces, en caso de que hubiera diferencias de opinión, no se requeriría ya más de ninguna discusión entre dos filósofos, como (no se la requiere) entre dos calculadores. A ellos les alcanzará con tomar un lápiz en la mano, colocarse frente al ábaco (si así lo quieren, invitados por un amigo) y decir: *calculemus*". La visión de Leibniz era aun más sorprendente ya que, según él, todas las verdades, inclusive las que aparentemente son accidentales, en realidad son necesarias, de manera que en principio todas las verdades serían accesibles empleando este método de cálculo.

El optimismo de Leibniz fue excesivo. Leibniz no pudo concretar gran parte de este programa para la lógica, y ahora lo que importa son las ideas que subyacen al programa. Estas han sido extremadamente influyentes. La búsqueda de un sistema simbólico de ideas y la matematización del concepto de validez de cadenas de razonamiento son características esenciales de la lógica moderna. Pero no fue sino hasta el siglo XIX con el trabajo de pioneros como Bernard Bolzano, George Boole, Charles Saunders Peirce, y por encima de todos, Gottlob Frege que comenzó a progresarse en la dirección señalada por Leibniz. Finalmente, en la lógica de predicados de Frege se desarrolló un lenguaje simbólico mucho más poderoso que el de la lógica silogística aristotélica. Para partes considerables de este lenguaje, la verificación de la validez lógica de las inferencias resultó ser verdaderamente una cuestión de cálculo. Sin embargo, puede probarse que no existe ningún método mecánico para poner a prueba la validez lógica de inferencias arbitrarias entre oraciones del lenguaje: se dice que la lógica de predicados es *indecidible* (véase §4.4). Por lo tanto, se ha demostrado que el programa de Leibniz es irrealizable. No obstante, el mismo siempre ha sido una valiosa fuente de inspiración para la investigación lógica.

La lógica de predicados, tal como la desarrolló Frege, combina la silogística aristotélica con las ideas estoicas acerca de las conectivas lógicas. También resuelve los problemas medievales de la cuantificación múltiple y todo ello mediante unas pocas ideas simples sin necesidad de apelar a una sofisticación técnica extrema. En el capítulo 3 nos ocuparemos extensamente de la lógica de predicados. Sin embargo, para contextualizarlo históricamente, anticiparemos algunas de las características más importantes del sistema.

Frege adopta la idea básica aristotélica de la forma sujeto-predicado de las proposiciones:

(32) a es P

Aquí se predica la propiedad P de una entidad a. Pero, aparte de esta forma, Frege también comprendió la importancia de formas relacionales del tipo:

(33) a_1 R a_2 (a_1 tiene la relación R con a_2)

propia de las oraciones como *Juan decepciona a María* o *Dos es menor que tres*. Además de estas relaciones binarias, también hay relaciones ternarias entre tres cosas, como *está entre* y *prefiere* (como en *Juan prefiere a Matilde en vez de a María*), relaciones cuaternarias, etc. Desde un punto de vista filosófico esto constituyó toda una innovación. Anteriormente las relaciones no habían sido consideradas tan fundamentales como las propiedades y siempre habían sido reducidas a otros conceptos. Incluso Leibniz se excedió tratando de reducir las proposiciones relacionales a proposiciones de la forma sujeto-predicado. Un ejemplo de esto es que (34) es parafraseado como (35):

(34) Tito es más alto que Gayo.

(35) Tito es alto en la misma medida en que Gayo es bajo.

Frege destituyó a la noción gramatical de sujeto del lugar central que había ocupado con anterioridad en la lógica. La misma da paso al concepto de *componente*, un término que se refiere a una entidad. En las proposiciones relacionales puede figurar un número cualquiera de componentes diferentes, y ninguno goza de una posición privilegiada en relación con los otros. No hay necesidad de identificar un único sujeto en particular. El ejemplo dado por el mismo Frege motivó el abandono de la práctica tradicional y sigue siendo bastante instructivo. Frege advierte que la oración

(36) Los griegos derrotaron a los persas en Palatea.

que parece referirse a los griegos (en tanto que sujeto), de hecho es sinónima de la construcción pasiva:

(37) Los persas fueron derrotados por los griegos en Palatea.

Si debemos identificar un único sujeto en cada caso, los persas parece ser el sujeto de (37). La lección que se debe extraer de esto es que ninguno de los dos componentes, ni *los griegos* ni *los persas*, es lógicamente más importante que el otro. Si entre (36) y (37) hay diferencias, éstas no pertenecen a la lógica.

Frege considera que las palabras clave de su teoría lógica son: *no* (para la negación de oraciones), *si* (... *entonces*) (para la implicación material), *todo* (para la generalización universal) y *es* (para la relación de identidad). Como veremos más adelante, se pueden definir otras constantes en términos de estas cuatro.

Este arsenal de expresiones no era desconocido por los lógicos anteriores. El gran avance consistió en que no se requiere nada más que estas expresiones para manejar fenómenos tales como la cuantificación múltiple, siempre y cuando –y ésta era la idea fundamental de Frege– uno se asegure de que toda oración, sin importar su complejidad, pueda ser considerada como el resultado de un proceso de construcción sistemática que adiciona palabras lógicas una a una. De esta forma, una oración con dos expresiones cuantificadoras, como por ejemplo *Todos miran a alguien*, puede considerarse como el resultado de una construcción que tiene exactamente los siguientes pasos: primero, una oración básica de la forma *Juan mira a José* es generalizada existencialmente como *Juan mira a alguien* y segundo, esta última es generalizada universalmente como *Todos miran a alguien*. Mientras todas las oraciones se obtengan de esta forma, puede realizarse una interpretación semántica de las mismas simplemente interpretando las oraciones básicas y luego haciendo un paralelo semántico de los pasos de la construcción sintáctica. Y en cada paso se debe dar cuenta de una sola expresión cuantificadora.

A esta idea de Frege se le conoce ahora como el *principio de* *composicionalidad del significado*, o el *principio de Frege*. Si la sintaxis no se complejiza, es posible dar una semántica paralela, y las teorías de la inferencia pueden basarse en pasos inferenciales que se ocupen de las nociones lógicas de a una. Como sucede con muchos descubrimientos, el de Frege es de una asombrosa simplicidad y obviedad; debido a ello nos cuesta imaginar por qué todo parecía tan difícil con anterioridad.

La lógica de predicados, tal como la desarrolló Frege en *Begriffsschrift*, pretendía ser una descripción de la forma en que se usa el lenguaje en matemática. Dicha lógica formó parte de los instrumentos empleados por la escuela denominada *logicismo*, ocupada en investigar los fundamentos de la matemática. El objetivo del logicismo era reducir los conceptos y principios fundamentales de la matemática a conceptos y principios exclusivamente lógicos. A pesar de que en general se considera que el programa logicista ha fracasado, como muchos otros programas tan amplios, fue una vigorosa fuente de nuevas ideas. Desde entonces se establecieron vinculaciones estrechas entre la matemática y la lógica. A partir de Frege los desarrollos en lógica se han producido mayormente en el campo de la *metalógica*, ámbito en el que se explora la lógica de predicados y otros sistemas lógicos mediante técnicas matemáticas. (En este libro no podremos dedicarle mucho tiempo a esos desarrollos; pero §4.4 resume algunos de los resultados más importantes.)

Frege mismo mostró interés creciente por el lenguaje natural, como se evidencia en sus últimas publicaciones. Frege estaba particularmente interesado en la relación entre su lenguaje formal, que pretendía ser una notación para la forma lógica de las oraciones (la cual determina su comportamiento lógico en la inferencia), y el lenguaje natural. Otros lógicos, como Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Rudolf Carnap y Hans Reichenbach, heredarían este interés de Frege. Frege traza una comparación instructiva por un lado,entre el lenguaje natural y los lenguajes formales y por el otro, entre el ojo desnudo y el microscopio. Si lo que se requiere es precisión, el microscopio tiene una resolución mucho mayor y, por ende, nos permite ver mucho más. Pero el microscopio carece de la naturalidad y la diversidad de aplicaciones que son características del ojo desnudo. Para obtener algo de esta diversidad deberíamos desarrollar toda una gama de lenguajes formales que pudiera ser ampliada en caso de ser necesario. Este libro presenta precisamente una tal gama de sistemas lógicos formales, todos ellos basados en la lógica de predicados. Los capítulos sobre lógica intensional y teoría de los tipos presentados en el volumen 2, son de particular importancia desde el punto de vista del lenguaje natural.

1.5 El siglo XX

1.5.1 *Forma lógica versus forma gramatical*

La bien conocida e influyente tesis de Russell acerca de la forma engañosa siguió los pasos de la solución de Frege a los problemas de larga data acerca de las proposiciones relacionales y de la cuantificación múltiple. Como hemos visto, la solución de Frege parte de la idea de que toda oración, cualquiera sea su complejidad, debe ser considerada como el resultado de un proceso de construcción sistemática paso a paso; en cada paso se aplica una regla sintáctica significativa desde el punto de vista semántico. Esto resultó en una tensión entre la forma lógica de una oración y lo que entonces era considerado como su forma gramatical. A comienzos del siglo XX, Russell expresó esta fricción en su tesis de la forma gramatical engañosa. Russell sostiene que la forma gramatical de una oración, que hoy en día podríamos describir como su estructura superficial, a menudo es engañosa. La forma gramatical de una oración puede diferir de su forma lógica 'subyacente' en forma tal que parezca admitir inferencias que de hecho no están justificadas. Por ende, una de las tareas del análisis filosófico consiste en mostrar las formas gramaticales engañosas de las oraciones del lenguaje natural en tanto tales y revelar sus verdaderas formas lógicas.

Podemos hallar un ejemplo clásico de esto en la teoría de Russell acerca de las descripciones definidas, expuesta en su artículo de 1905 "On Denoting". Allí Russell toma posición en contra del argumento filosófico conocido como *la barba de Platón*. Este argumento trata de mostrar que para negar que algo existe, primero debe suponerse que existe. Si alguien dice *Pegaso no existe*, entonces para responder a la pregunta *¿Qué no existe?* deberá responder: *Pegaso*. Esta respuesta aparentemente lo compromete con la existencia de aquello a lo cual hace referencia el nombre.

Argumentos tales han llevado a algunos filósofos, y entre ellos a A. Meinong, a postular una categoría ontológica de cosas que no existen, además de la categoría más corriente de cosas que existen. Otros, como Russell, han entendido que el problema reside en el argumento mismo. De acuerdo con Russell, la forma gramatical de las oraciones se desvía de su forma lógica de manera engañosa. En el artículo antes mencionado, Russell se ocupa principalmente de oraciones que contienen descripciones definidas tales como *el actual rey de Francia*, *la montaña de oro* y *el círculo cuadrado*. Su posición es que, a pesar de su forma gramatical, estas expresiones no se refieren a una entidad. Se las debe analizar como expresiones complejas que, entre otras cosas, afirman que dicha entidad existe. Una oración del tipo *El actual rey de Francia es calvo* afirma, entre otras cosas, que hay una entidad que tiene la propiedad de ser el actual rey de Francia. A diferencia de su forma gramatical, la verdadera forma lógica de la oración *El rey de Francia no existe* no contiene ninguna expresión que refiera a un rey de Francia inexistente. Se trata simplemente de la negación de la proposición que afirma que existe un individuo tal. Por consiguiente, mediante la suposición de que la forma gramatical superficial de ciertos tipos de expresiones se desvía de su forma lógica, Russell evita las complicaciones ontológicas esbozadas más arriba. (Para una discusión de las descripciones definidas en lógica de predicados, véase §5.2.)

Esta tesis de Russell ejerció una influencia considerable en el desarrollo de las dos tradiciones filosóficas principales del siglo XX acerca del lenguaje: *el positivismo lógico* y *la filosofía analítica*.

El positivismo lógico es un movimiento filosófico que se desarrolló en la década de los años 20 del siglo XX y que procede de la más antigua tradición empirista y fuertemente antimetafísica. El positivismo lógico insiste en que el conocimiento puede obtenerse sólo mediante métodos desarrollados en ciencia, negando así que haya métodos filosóficos especiales para obtener conocimiento. Esta idea socava toda disciplina filosófica que, como la metafísica, se base en métodos filosóficos para obtener conocimiento. De acuerdo con el positivismo lógico, la tarea de la filosofía consiste en clarificar lo que es genuino conocimiento y descartar todo lo demás.

El positivismo lógico empuñó principalmente dos armas en su asalto a la metafísica: (i) *el criterio de verificabilidad*, y (ii) *la tesis de la incorrección gramatical*. (i) y (ii) trataban de demostrar que las oraciones metafísicas son sinsentidos. El criterio de verificabilidad establece, a grandes rasgos, que una proposición tiene sentido sólo si hay alguna forma de verificarla empíricamente. Pero, por aplicación de este criterio, además de las oraciones de la metafísica deberían descartarse muchas oraciones de la ciencia que tampoco pueden ser verificadas. Para evitar esto, el criterio se modificó y se reinterpretó numerosas veces pero finalmente tuvo una muerte silenciosa. En su artículo de 1950, "Problemas and Changes in the Empiricist Criterion of Meaning", Carl Hempel relata la historia de este deceso. La influencia de la tesis de Russell sobre la forma engañosa tal vez sea más evidente en la segunda de las armas del arsenal del positivismo lógico. La tesis de la incorrección gramatical explicaba la falta de sentido de las proposiciones metafísicas en términos de su incorrección gramatical. En su artículo fuertemente polémico de 1932 titulado "The Elimination of Metaphysics through Logical Analysis of Language", Carnap estableció esta tesis con claridad. En el mismo artículo Carnap distinguió dos tipos de incorrección gramatical que pueden tener las expresiones: (i) errores sintácticos, como en *César es un* y (ii) errores categoriales, como en la oración *César es un número primo*. El primer tipo de error no produce ningún daño, dado que todos pueden ver que tales expresiones son gramaticalmente incorrectas y por ende, no expresan proposiciones con sentido. Pero con el segundo tipo de error, las cosas pueden complicarse. A primera vista, argumenta Carnap, *César es un número primo* parecería ser una oración gramaticalmente correcta que resulta ser falsa. Carnap sostiene que se trata de un ejemplo de una 'pseudoafirmación', y que la metafísica nos proporciona muchos otros ejemplos similares.

Carnap ilustra su posición con ejemplos tomados de un artículo del bien conocido metafísico Heidegger. En su artículo de 1929, "Was ist Metaphysik", el filósofo alemán escribe: "Sólo debe ser investigado lo que es, y fuera de esto nada... Pero, ¿qué es nada? ¿Dónde debe buscarse esta nada?". Según Carnap, al formular preguntas tales como *¿Dónde debe buscarse esta nada?* estamos siendo engañados por el lenguaje natural. Hay una analogía entre *¿Qué hay afuera? Nieve* y *¿Qué hay afuera? Nada*. La analogía sólo se consolida por la similitud superficial de las dos oraciones como en *Nieve hay afuera* y *Nada hay afuera*. (*There is snow outside* y *There is nothing outside*). Pero el análisis lógico muestra que, aunque la forma gramatical de las dos oraciones es similar, ambas tienen formas lógicas completamente diferentes. Carnap sostiene que el lenguaje natural es engañoso porque no está claramente definido y no es lo suficientemente sistemático. Las reglas sintácticas que gobiernan la formación de las oraciones del lenguaje natural no nos permiten distinguir entre afirmaciones y pseudoafirmaciones. Las reglas permiten formular tanto afirmaciones con sentido, como por ejemplo 17 *es un número primo*, como afirmaciones sin sentido, como por ejemplo, *César es un número primo*. Por esta razón, los positivistas lógicos descartaron al lenguaje natural como medio apropiado para el debate filosófico y científico significativo. Los positivistas lógicos consideraron que una de las tareas más importantes de la filosofía consistía en construir lenguajes artificiales cuya sintaxis fuera lo suficientemente rigurosa como para impedir la formación de pseudoafirmaciones. No es sorprendente que consideraran a la lógica como un auxiliar ideal para este cometido.

Resulta dudoso que lo que esté mal en una oración del tipo *César es un número primo* pueda ser explicado en términos sintácticos. Actualmente parecería mucho más natural explicarlo en términos semánticos. Probablemente fue la ausencia de una semántica apropiada lo que llevó a Carnap a intentar otro enfoque, dado que en ese momento no se disponía de una semántica rigurosa ni para el lenguaje natural ni para los lenguajes lógicos artificiales (véase el comentario en §5.3). Puede brindarse un tratamiento semántico en términos de las llamadas restricciones en la selección o de la denominada corrección categorial. La mayoría de las propiedades sólo pueden ser atribuidas con sentido a ciertos tipos de objetos. En *César es un número primo*, se predica una propiedad aplicable a los números de algo que no es un número sino un tipo de objeto totalmente diferente, una persona.

El positivismo lógico adoptó la crítica de Carnap según la cual el lenguaje natural es inapropiado para el debate filosófico y científico; en ese sentido se llevaron a cabo intentos por construir lenguajes artificiales que funcionaran mejor. El análisis del lenguaje natural se interrumpió temporariamente. O al menos casi se interrumpió, ya que en 1947 Hans Reichenbach publicó un libro importante, *Elements of Symbolic Logic*, dedicado al análisis lógico del lenguaje natural. Algunas de sus ideas acerca de la semántica de los tiempos verbales y de los adverbios siguen teniendo importancia, pero, desde un punto de vista lingüístico, su análisis sintáctico del lenguaje natural no es completamente satisfactorio.

1.5.2 *Filosofía del lenguaje ordinario*

Una segunda escuela importante del siglo XX y que estuvo muy influenciada por la tesis de la forma engañosa de Russell, es la *filosofía analítica*. En su influyente *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) Wittgenstein escribió: "Toda la filosofía es una 'crítica del lenguaje' [...] Russell fue quien brindó el servicio de mostrar que la forma lógica aparente de una proposición no era necesariamente la real." (*Tractatus* 4.00.31). Wittgenstein también suscribió a la opinión según la cual la forma gramatical de una oración en el lenguaje natural puede diferir de su forma lógica real. Más aún, si no se las distingue cuidadosamente, pueden surgir todo tipo de pseudoproblemas y emplearse todo tipo de pseudoteorías para tratar de resolverlos. Por esta razón Wittgenstein consideró que la tarea de la filosofía es terapéutica: el objetivo del análisis filosófico consiste en una clarificación lógica de nuestros pensamientos, los cuales son a menudo confusos cuando "el lenguaje se va de fiesta", tal como sostuvo en su obra posterior *Philosophische Untersuchungen* (*Investigaciones Filosóficas*) (1953).

En 1931, una figura clave de la filosofía analítica en Inglaterra, Gilbert Ryle, publicó un artículo titulado "Systematically Misleading Expressions" Ryle afirma que la filosofía debe tratar de descubrir las formas lingüísticas que constituyen una fuente de producción continua de puntos de vista erróneos y teorías sin sentido en filosofía. De esta manera, Ryle también considera que el lenguaje natural lleva al pensamiento a conclusiones erróneas. Pero hay una diferencia importante entre Ryle y positivistas lógicos como Carnap. La reacción de los positivistas a lo que ellos consideraban como deficiencias del lenguaje natural consistió en construir lenguajes artificiales que las superaran. Los positivistas lógicos no estaban muy interesados en identificar las expresiones y construcciones que llevan a confusión filosófica. Pero Ryle, al igual que muchos otros filósofos analíticos, consideró que un análisis tal del lenguaje natural era uno de los desafíos filosóficos más importantes. El artículo mencionado más arriba puede ser tenido por uno de los primeros intentos por hacer frente a ese desafío.

El interés por el lenguaje natural llevó a un cambio en las concepciones acerca del lenguaje natural y de la relación entre el análisis lingüístico y la filosofía. Los efectos de un análisis riguroso del lenguaje natural no son sólo terapéuticos sino que también pueden conducir a una mejor comprensión de la forma en que pueden expresarse y usarse ciertos conceptos en el lenguaje natural. El análisis crítico del lenguaje se señaló así una nueva tarea, la del análisis conceptual, y, junto con esta tarea, un nuevo método. Se dio por sentado que puede estudiarse un concepto dado, tomemos por caso el concepto de conocimiento, mediante la cuidadosa consideración de la manera en que el sustantivo *conocimiento* y el verbo *conocer* podrían, por ejemplo, ser empleados en un lenguaje natural. Siendo así, la filosofía analítica llega a considerar al lenguaje natural no sólo como una fuente de confusión filosófica sino también como una fuente de ideas filosóficas valiosas. Esto no implicó el rechazo de la tesis de Russell acerca de la forma engañosa, la cual fue una importante fuente de inspiración para la filosofía analítica; pero implicó una reinterpretación de la tesis y una reevaluación de su importancia.

En el análisis de las descripciones definidas desarrollado por Strawson en su artículo "On Referring" (1950), se encuentra un buen ejemplo de una alternativa a la teoría de Russell. Russell pensaba que la forma lógica subyacente de una descripción definida es muy diferente de su forma gramatical superficial. Para evitar la conclusión de que las descripciones definidas que no tienen referencia se refieren a entidades no existentes, propuso que la forma lógica de una descripción definida como *el actual rey de Francia* incluya la proposición que afirma que el objeto descripto existe de hecho; de manera que una oración que contenga una descripción definida que no tiene referencia, como *el actual rey de Francia es calvo*, pueda ser tomada por falsa. Strawson, por el contrario, era de la opinión de que el uso de una descripción definida lleva consigo la *presuposición* de que la entidad a que se refiere existe. De acuerdo con él, las oraciones que contienen descripciones que carecen de referencia no son ni verdaderas ni falsas y, por consiguiente, no expresan realmente una afirmación. (En §5.5 discutiremos extensamente esto en relación con las presuposiciones y las lógicas multivalentes.) Strawson no encontró ninguna razón para distinguir entre la forma gramatical superficial de las oraciones y su forma lógica subyacente. Sin embargo, esta rehabilitación parcial del lenguaje natural no implica un rechazo total de la tesis de Russell. Strawson pensaba que el lenguaje natural no tiene una lógica exacta y que, si las formas gramaticales de las oraciones sugieren que debería haber una lógica tal, las formas gramaticales se tornarían engañosas.

La convicción de que no hay una lógica exacta del lenguaje natural, y que, por consiguiente, el lenguaje no se presta a un análisis en términos de nociones y reglas lógicas precisas, es compartida por casi todos los filósofos analíticos, incluyendo a los más interesados en el lenguaje natural, como el último Wittgenstein y sobre todo J. L. Austin. Este sostiene claramente que el análisis del lenguaje natural puede proporcionar conocimiento filosófico. Incluso, su obra llega a ser denominada *fenomenología lingüística*. En un artículo publicado en 1956, "A Plea for Excuses", Austin observa lo siguiente acerca del lenguaje natural: "nuestro acervo común de palabras incorpora todas las distinciones que el hombre consideró valioso trazar y las conexiones que encontró valioso establecer durante el transcurso de muchas generaciones: seguramente éstas serán razonablemente más numerosas, más sólidas, ya que se mantuvieron ante el prolongado test de supervivencia del más apto, y más sutiles, al menos en todas las cuestiones prácticas ordinarias y razonables, que cualquier cosa que a Usted o a mí se nos ocurriera pensar mientras estamos sentados en nuestros sillones durante la tarde –el método alternativo predilecto–". En el método de Austin, el diccionario es una fuente importante de información filosófica relevante y el análisis filosófico debe llevarse a cabo con un diccionario al alcance de la mano. Esto no significa que Austin piense que los problemas filosóficos pueden resolverse simplemente consultando un buen diccionario. El lenguaje natural no proporciona respuestas prefabricadas sino distinciones y conexiones valiosas entre los conceptos de los que nos ocupamos. Austin escribe: "Por ende, ciertamente el lenguaje *no* es la última palabra: en principio siempre puede ser complementado, perfeccionado y superado. Sólo recuérdese que *es* la *primera* palabra" (1956). Aquí resuenan ecos, aunque bastante débiles, de la tesis de Russell sobre la forma engañosa. El lenguaje natural puede ser inadecuado y puede ser perfeccionado. En opinión de Austin, esto puede suceder especialmente si consideramos algún problema que ha sido tratado largamente por los filósofos del pasado, dado que el lenguaje del que disponemos para discutir tales problemas está oscurecido por la jerga de teorías filosóficas abandonadas hace tiempo. En tales casos, el lenguaje natural puede engañar y confundir.

1.5.3 *Lingüística y filosofía*

¿Cuánta influencia han tenido los desarrollos de la lingüística en el siglo XX sobre la filosofía moderna y, en particular, sobre la filosofía analítica interesada en los hechos y las observaciones lingüísticas? Casi ninguna hasta el desarrollo de la gramática generativo-transformacional. La filosofía analítica parece haber ignorado a la lingüística estructural moderna de Saussure a Bloomfield, Harris, Bloch y otros; y en el positivismo lógico hizo algo semejante. El artículo "Logical Syntax and Semantics" (1953) escrito por Yehoshua Bar-Hillel, un estudiante de Carnap, constituye una excepción. Bar-Hillel sugiere que la lingüística estructural, que se basa principalmente en métodos distributivos, puede ser ampliada tanto en la sintaxis como en la semántica mediante el empleo de métodos lógicos. En este artículo se socava, cuanto menos, la idea original de que el lenguaje natural es demasiado vago y poco sistemático como para recibir un tratamiento riguroso. Además, aparentemente se trata de la primera defensa de la aplicación de semánticas del tipo de las desarrolladas en lógica al lenguaje natural. Los lingüistas no quedaron muy impresionados. En "Logical Syntax and Semantics: Their Linguistic Relevance" (1954) Chomsky responde a Bar-Hillel que, a nivel descriptivo, la lingüística no necesita de métodos y nociones lógicas. Los conceptos lógicos y matemáticos serían bienvenidos en tanto auxiliares metodológicos sólo en la teoría de los formalismos de la gramática. Hasta bastantes años después de 1960, no hubo una significativa estimulación mutua entre la lingüística por un lado y la filosofía y la lógica por el otro, con la excepción del intento de reconciliación de Bar-Hillel y el trabajo de Reichenbach mencionado con anterioridad. El propio trabajo de Chomsky en lingüística matemática, con sus claros rastros de lógica matemática, no constituye una excepción a esto si tenemos en cuenta que para Chomsky los métodos lógicos no pertenecen a la lingüística *descriptiva*.

La introducción y el éxito subsecuente de la gramática generativo-transformacional trajo aparejado un cambio drástico en el desarrollo independiente de la lingüística y la filosofía. En los comienzos, y como resultado de las innovaciones en lingüística, se produjo un cambio en las concepciones acerca del lenguaje natural sostenidas en círculos analíticos y posteriormente en círculos más lógicos. Pero, hacia fines de los años 60 las concepciones lógicas y filosóficas comenzaron a influir sobre la lingüística, en parte como resultado de que en la gramática generativo-transformacional se le otorgó cada vez más importancia a la semántica. Numerosos son los aspectos de la gramática generativo-transformacional que tienen que ver con enfoques filosóficos acerca del lenguaje. Por ejemplo, puede considerarse que la hipótesis de Chomsky acerca del innatismo de la capacidad para aprender un lenguaje contribuye al debate filosófico tradicional entre el empirismo y el racionalismo. Pero, para nuestros propósitos, es más importante la distinción que se hace en lingüística entre estructura profunda y estructura superficial, ya que ésta parecería proporcionar una interpretación empírica a la distinción filosófica entre forma gramatical y forma lógica de una oración. El vínculo entre estas dos distinciones se fortaleció a comienzos de los años 60, cuando la semántica comenzó a ocupar un lugar permanente en la gramática generativo transformacional. Katz y Postal (1964) sostuvieron que la interpretación semántica debe realizarse a nivel de la estructura sintáctica profunda. Esta idea condujo a especular acerca de la posibilidad de identificar la estructura profunda de una oración con su forma lógica. Dicha identificación es problemática, pero la idea parecía tan atractiva que hacia fines de los años 60 y comienzos de los 70 surgió una nueva tendencia en lingüística, la *semántica generativa*, que rechazaba una noción de estructura profunda estrictamente sintáctica, en favor de una noción semántica de estructura profunda, la cual debía identificarse con la forma lógica. Pero durante los años 70 y 80 los desarrollos de la gramática generativo-transformacional siguieron un camino diferente. Una vez más se distingue estrictamente la forma lógica de la forma gramatical introduciendo en la gramática un componente distinto, denominado *forma ló*[illegible], como complemento de los niveles de representación proporcionados por el componente sintáctico. A fin de explicar ciertos aspectos estructurales del significado de las oraciones sin considerar el significado de las palabras o los aspectos pragmáticos del lenguaje, la forma lógica contiene estructuras que derivan del componente sintáctico.

Inicialmente, los desarrollos de la gramática generativo-transformacional causaron una suerte de 'crisis' en los fundamentos de la filosofía analítica. Esto sucedió porque la filosofía analítica, y especialmente la 'fenomenología lingüística', abordaban los problemas filosóficos mediante investigaciones detalladas acerca de la forma en que las expresiones y formulaciones referentes a esos problemas se emplean en el lenguaje natural. Así pues, la descripción y análisis del lenguaje natural pretenecía al ámbito de trabajo propio de los filósofos analíticos. Pero, en forma muy rápida, la gramática generativa produjo una gran cantidad de material descriptivo; además, presentó este material bajo una forma sistemática. Había muchas observaciones acerca del lenguaje, pero mejor aún, se contaba con una teoría de la estructura del lenguaje. Parecía que los lingüistas y los filósofos se estaban convirtiendo en rivales, y algunos alentaron esta idea. Por ejemplo, Katz y Fodor, en su artículo "What's Wrong with Philosophy of Language?" (1962), critican a la filosofía analítica por su carencia de un marco teórico en el cual pudieran integrarse sus numerosas observaciones y descripciones útiles. Argumentan que la gramática generativa tiene tal marco teórico y que la filosofía analítica debería proseguir su trabajo dentro de este marco. Posteriormente Katz repitió la crítica en su libro *Philosophy of Language* (1966), en el que, además, da rienda suelta a la gramática generativa, y en particular al componente semántico que él mismo le otorgó, al tratar ciertas cuestiones filosóficas tradicionales como, por ejemplo, la naturaleza de la distinción entre proposiciones *analíticas* y *sintéticas*. Pero la idea de que la filosofía analítica es realmente una rama de la lingüística empírica nunca tuvo amplia aceptación. En primer lugar, los filósofos no creyeron que podrían resolver problemas filosóficos simplemente recurriendo al lenguaje natural; Austin lo expresó sucintamente cuando dijo que el lenguaje tiene la primera palabra pero no la última. En segundo lugar, se aceptaba la idea general de que las proposiciones de la lingüística son esencialmente diferentes de las de la filosofía y se ocupan de tipos de cosas diferentes. Las proposiciones de la lingüística se ocupan del lenguaje, sea de uno o más lenguajes naturales específicos o de lenguajes naturales en general. Por consiguiente, son empíricas. Por otro lado, las proposiciones de la filosofía no son empíricas, dado que se ocupan de conceptos. El filósofo sólo se interesa por clarificar y precisar conceptos. Sus proposiciones no son empíricas. En la tarea de clarificar conceptos, el filósofo puede estar agradecido por el material empírico reunido por sus colegas del departamento de lingüística, pero esto no lo convierte en un lingüista empírico. En Vendler, "Linguistics in Philosophy" (1967) se puede encontrar una defensa de la filosofía analítica que sigue estas líneas.

Cuando la gramática generativo-transformacional se hizo popular, el positivismo lógico declinó, pero muchas de sus ideas están presentes hoy en día en disciplinas filosóficas tales como la filosofía de la ciencia y la lógica. El escepticismo de los círculos lógicos acerca de la posibilidad de describir el lenguaje natural empleando métodos lógicos no difiere mucho del manifestado por el positivismo lógico. Tarski, por ejemplo, pensaba que resultaría problemático aplicar a lenguajes naturales la semántica que él había desarrollado para lenguajes lógicos. Una de las razones que esgrimió era que una semántica tal supone la formulación precisa de una sintaxis, y pensaba que esto no era realizable para lenguajes naturales. Los desarrollos que se produjeron en el ámbito de la gramática generativa hicieron pensar que se podía formular una sintaxis precisa para los lenguajes naturales; de esta forma alentaron la esperanza de que los métodos lógicos de análisis semántico serían aplicables a los lenguajes naturales. Davidson, quien estaba interesado en transferir la semántica de Tarski a lenguajes naturales, escribió "El trabajo reciente de Chomsky y otros está haciendo mucho por colocar las complejidades del lenguaje natural dentro del alcance de una teoría semántica seria" (1967). Montague parecía compartir esta esperanza, como lo manifiesta en el siguiente extracto de su artículo "Universal Grammar": "En mi opinión no existe una diferencia importante entre los lenguajes naturales y los lenguajes artificiales de los lógicos; en verdad, considero posible que la sintaxis y la semántica de ambos tipos de lenguajes queden comprehendidas por una única teoría natural y matemáticamente precisa. Sobre este punto difiero respecto de algunos filósofos, pero creo estar de acuerdo con Chomsky y sus asociados" (1970). Mientras que los positivistas lógicos pensaban que necesitamos de los lenguajes formales para evitar las trampas inherentes a los lenguajes naturales, Montague sostiene que no existe una diferencia fundamental entre los dos y que ambos tipos de lenguajes pueden describirse de la misma manera.

Los desarrollos que se produjeron en el ámbito de la gramática generativa contribuyeron a dar forma a lo que los lógicos y los filósofos piensan acerca del lenguaje natural. Pero las ideas lógicas y filosóficas también fueron asimiladas por la lingüística. Esto queda de manifiesto en el uso creciente de la notación lógica en el aparato descriptivo, ahora que la semántica juega un papel cada vez más importante en la gramática generativa. Además, la teoría generativa también anexó conceptos lógicos, tales como *predicado*, *argumento*, *proposición*, *abstracción lambda*, *ambigüedad del alcance* en expresiones con cuantificación múltiple, y muchas otras más, aunque se emplean versiones que a veces son un poco exóticas si se las considera desde un punto de vista lógico. Otro ejemplo más es el concepto de *presuposición*, ya presente en los escritos de Frege, que fue 'reinventado' por Strawson en el artículo antes mencionado. La teoría de los actos de habla, delineada por Austin en su libro "How To Do Things With Words" (1962a) y ampliada por el filósofo Searle en su libro "Speech Acts" (1969), inicialmente tuvo cierta influencia sobre la sintaxis (en la hipótesis performativa de Ross), pero posteriormente también sentó las bases para una pragmática lingüística.

Creemos que la contribución más importante que la lógica puede hacer a la lingüística reside en la aplicación de la semántica formal a la descripción del lenguaje natural. La teoría de Montague, conocida como *gramática de Montague*, tal vez sea el ejemplo más general y extendido del empleo de métodos lógicos en la lingüística descriptiva. Discutiremos la gramática de Montague en el volumen 2. Davidson y Harman, los editores de "Semantics of Natural Language" (1972), una colección de artículos seminales del campo interdisciplinario entre la filosofía, la lingüística y la lógica, expresaron en esa obra la idea de que en dicha empresa la lógica es algo más que una simple herramienta y que la lingüística es más que una víctima pasiva. En su introducción afirmaron: "El propósito de este volumen consiste en [...] alentar el intercambio activo de ideas entre los lógicos, los filósofos y los lingüistas que trabajan en la semántica para lenguajes naturales. Confiamos en que se estará de acuerdo con que esto consiste en algo más que en la tarea habitual de frotar dos o más disciplinas unas contra otras con la expectativa de que se produzca calor y la esperanza de que se haga la luz. En el caso presente, ya existe una empresa común: nuestro objetivo es convertirla en cooperativa".

1.6 Lenguajes formales

Antes de comenzar la exposición del primer sistema lógico, el de la lógica proposicional, que haremos en el capítulo 2, debemos decir algo más acerca de la noción de lenguaje formal y acerca de su uso en la teorización lógica.

Una característica de la lógica moderna es que no se ocupa tanto de los argumentos que pueden construirse en uno u otro lenguaje natural como de los razonamientos en los *lenguajes formales*. Esto obedece a varias razones.

La primera es que, como lo señaláramos anteriormente, la lógica se interesa por los esquemas de argumento. Las expresiones que conjuntamente forman un esquema de argumento no son expresiones de un lenguaje natural sino que están tomadas de un lenguaje formal. Así como un argumento es una cadena de oraciones de un lenguaje natural, los esquemas de argumento pueden considerarse como una cadena de oraciones tomadas de un lenguaje formal. Por consiguiente, nuestras investigaciones acerca de los esquemas de argumento se reducen a investigaciones acerca de argumentos en uno u otro lenguaje formal. El lenguaje formal que empleemos dependerá de nuestros intereses. Por ejemplo, en lógica proposicional, estamos interesados en argumentos cuya validez depende de las conjunciones del lenguaje natural y de la negación. En este caso, elegiremos un lenguaje formal que tenga como constantes lógicas a las *conectivas*, dado que dichos símbolos son la contrapartida formal de las conjunciones y de la negación del lenguaje natural. Las letras p, q, r representan a las oraciones más simples de este lenguaje formal; con ellas pueden construirse oraciones complejas por medio de las conectivas. Así, trazamos una distinción formal entre lo que nos interesa principalmente, las conectivas, y los elementos cuyo significado exacto no nos interesa, las oraciones más simples. A estas últimas expresiones, que a diferencia de las constantes lógicas no tienen significado fijo, las denominamos las *variables lógicas* del lenguaje en cuestión.

Una segunda razón a favor de la idea según la cual los lenguajes naturales no son idealmente los apropiados para investigar la validez de los argumentos es que contienen ambigüedades. Estas ambigüedades pueden hacer que sea imposible decidir si un argumento dado es válido o no. Por ejemplo, considérese el siguiente argumento:

(38) Las mujeres y los hombres ancianos tienen prioridad.
Mi madre es mujer.
Mi madre tiene prioridad.

La validez de (38) depende de la lectura que se haga de su primera premisa. El argumento es válido sólo si *anciano* aquí no se aplica a *mujeres*. En un lenguaje formal apropiado, tales ambigüedades se resolverían mediante el uso de paréntesis o de un artificio similar que explicite la estructura.

Una tercera razón para emplear lenguajes formales en las investigaciones sobre la validez de los argumentos es que en dichas investigaciones se deben expresar afirmaciones generales acerca de todas las oraciones o al menos acerca de todas las oraciones que tengan una forma particular. La verdad de dichas oraciones puede probarse sólo si disponemos de una caracterización explícita de todas las oraciones del lenguaje en cuestión. A pesar de lo sorprendente que ha sido el progreso de la lingüística moderna, aun no disponemos de dicha caracterización para un lenguaje natural. Pero, dado que un lenguaje formal es algo que debe definirse, la creación de un lenguaje formal se realiza precisamente mediante una caracterización tal. A pesar de esto, si las investigaciones sobre la validez de los argumentos formales deben echar luz acerca de los argumentos expresados en un lenguaje natural, entonces tendrá que haber alguna correspondencia entre los lenguajes formales y naturales en cuestión. Los fragmentos de lenguaje natural que son importantes para el tipo de razonamiento del que se trate deberán ser 'traducibles' al lenguaje formal. Presupondremos tales correspondencias cuando expliquemos los diversos sistemas lógicos. En el volumen 2 nos extenderemos en el tema de la traducción.

Un lenguaje formal se caracteriza mediante su *vocabulario* y su *sintaxis*. El vocabulario de un lenguaje formal es lo que determina cuáles son las *expresiones básicas* que contiene. Estas pueden subdividirse en tres clases distintas: las constantes lógicas, las variables lógicas y los *signos auxiliares*. Este último grupo contiene cosas que son necesarias para estructurar el lenguaje, tales como los paréntesis. A nivel de la sintaxis del lenguaje se proporciona una definición de las *expresiones compuestas* del lenguaje. La definición consta de un cierto número de reglas explícitas que estipulan la forma en que pueden combinarse las expresiones entre sí para crear otras expresiones. El principio de composicionalidad preside el proceso: el significado de una expresión compuesta debe quedar completamente determinado por el significado de sus partes componentes y de la regla sintáctica empleada para formarlo.

A medida que avancemos en el estudio de la validez de los argumentos, a menudo necesitaremos decir cosas acerca del lenguaje formal en el que se expresan los argumentos. Para decir esas cosas usamos un lenguaje: en este libro el lenguaje es el español. En lógica denominamos *lenguaje objeto* al lenguaje acerca del cual hablamos, y denominamos *metalenguaje* al lenguaje con el cual se habla acerca de un lenguaje objeto. El mismo lenguaje objeto puede, obviamente, discutirse con diferentes metalenguajes: en la versión original de este libro, el holandés ocupaba el lugar del español como metalenguaje, a pesar de que los lenguajes objeto bajo consideración eran los mismos. A veces es conveniente ampliar el metalenguaje agregando símbolos que faciliten el hablar acerca del lenguaje objeto, por ejemplo, símbolos que se refieran a expresiones arbitrarias del lenguaje objeto. No nos asombra que dichos símbolos se denominen metavariables. Hay, además, otros símbolos que usaremos en el metalenguaje de este libro.

No hay razón por la cual el lenguaje objeto y el metalenguaje deban ser diferentes. Un lenguaje como el español es lo suficientemente rico como para poder hablar acerca de sí mismo. En verdad, la oración precedente es prueba de ello. La cuestión es que los términos *lenguaje objeto* y *metalenguaje* se refieren a las *funciones* que puede tener un lenguaje en un contexto particular. La distinción entre estas dos funciones de los lenguajes se vincula estrechamente con la distinción entre *uso* y *mención* que realizáramos con anterioridad, y que fue ilustrada por medio de:

(39) Amsterdam es la ciudad capital de Holanda.

(40) *Amsterdam* tiene nueve letras.

En (39) la expresión *Amsterdam* se refiere a una ciudad holandesa (uso). En (40) la misma expresión se refiere a una palabra (mención).

Aunque parezca sorprendente, en realidad nunca es necesario exhibir los símbolos de un lenguaje formal. Así como no tenemos que construir la ciudad de Amsterdam para decir, como en (39), que es la ciudad capital de Holanda, podemos decir todo lo que necesitamos acerca de un lenguaje objeto por medio de los nombres que se asignan en el metalenguaje a los símbolos del lenguaje objeto. Por ejemplo, en nuestra discusion sobre lógica proposicional, las expresiones p, q y r, etc., son los nombres empleados en el lenguaje español para *referirse* a expresiones del lenguaje de la lógica proposicional. Esto nos permite desligarnos de las frecuentes dificultades respecto de la distinción uso/mención que de otra forma podrían surgir en la descripción de los lenguajes formales: los símbolos y las fórmulas nunca se refieren a sí mismos; sólo nos referimos a ellos por medio de nombres.

2 Lógica proposicional

2.1 Conectivas veritativo-funcionales

La lógica proposicional es el sistema lógico más simple y básico que existe. Sus constantes lógicas son las *conectivas* y la *negación*; las primeras vinculan dos oraciones para formar una nueva oración compuesta, y la última opera sobre una sola oración. Parece natural comenzar por una clase de conectivas sugerida por la restricción a oraciones declarativas, mencionada en §1.2, es decir, a oraciones que son o bien verdaderas o bien falsas. Para aclarar cuáles son, primero debemos introducir el concepto de *valor de verdad*. Decimos que el valor de verdad de una oración es 1 si la oración es verdadera y 0 si la oración es falsa. Aquí nos ocupamos sólo de oraciones que son verdaderas o falsas, de manera que su valor de verdad es o bien 1 o bien 0. El principio de composicionalidad (§1.2, §1.4) requiere que el significado (y, por ende, el valor de verdad) de una oración compuesta dependa sólo del significado (los valores de verdad) de las oraciones que la componen.

A manera de ilustración, considérense las siguientes oraciones:

(1) Juan se golpeó la cabeza y está llorando.

(2) Juan está llorando porque se golpeó la cabeza.

(3) Juan está llorando.

(4) Juan se golpeó la cabeza.

Supongamos que Juan de hecho se golpeó la cabeza y que ciertamente está llorando. Siendo así, (1) es verdadero. Ahora nótese que en lugar de (3), *Juan está llorando* (asumimos que esto es lo que significa *él está llorando*) hubiéramos podido escribir igualmente cualquier otra oración verdadera, tal como, por ejemplo, *está lloviendo* (si esto es lo que de hecho está sucediendo). Luego, la oración *Juan se golpeó la cabeza y está lloviendo* también sería verdadera. El caso (2) es muy diferente: si Juan de hecho se golpeó la cabeza y ciertamente está llorando entonces (2) bien puede ser verdadera, pero ciertamente no es necesario que lo sea (tal vez esté llorando porque María no lo ama); y a la inversa, si (2) es verdadera entonces *Juan está llorando porque está lloviendo es falsa incluso si está lloviendo.*

Esta diferencia entre el comportamiento de *y* y el de *porque* puede ser formulada como sigue. La oración (1) es verdadera si (3) y (4) son ambas verdaderas, y falsa si una de las dos es falsa. El valor de verdad de una oración con *y* depende sólo del valor de verdad de las dos partes que la componen. Pero esto no se aplica a la oración (2), cuya verdad no depende solamente de la verdad de las oraciones, (3) y (4), que la componen. De las conectivas que dan lugar a oraciones cuyo valor de verdad depende sólo del valor de verdad de las oraciones conectadas se dice que son *veritativo-funcionales*. De manera que *y* es una conectiva veritativo-funcional mientras que *porque* no lo es.

Dado que aquí circunscribimos el significado de las oraciones a su valor de verdad, la composicionalidad requiere que consideremos sólo conectivas veritativo-funcionales y las correspondientes conjunciones del lenguaje natural. Dado que sólo consideraremos tales conectivas, estudiar la forma en que los valores de verdad de las oraciones dependen unos de otros y, en particular, estudiar la validez de esquemas de razonamiento en los que figuran conectivas, resulta muy sencillo. Para determinar el valor de verdad de una oración *A*, sólo necesitamos prestar atención a las oraciones que en última instancia componen a *A*. Esta restricción respecto del significado de las oraciones puede parecer excesivamente rigurosa de antemano, pero en la práctica la restricción ha resultado muy productiva.

2.2 Conectivas y tablas de verdad

El vocabulario de un lenguaje para la lógica proposicional incluye *conectivas* como sus constantes lógicas. Y, como variables lógicas, hay símbolos para representar afirmaciones (es decir, 'proposiciones'). Estos símbolos se denominan *letras proposicionales* o *variables proposicionales*. En general las designaremos mediante las letras p, q y r, si es necesario con subíndices tal como en p_1, r_2, q_3, etc. Es habitual emplear letras diferentes para símbolos proposicionales diferentes. Las letras proposicionales y las expresiones compuestas formadas a partir de las mismas por medio de las conectivas se clasifican conjuntamente como *oraciones* o *fórmulas*. Estas se designan mediante las letras ϕ y ψ, etc. Respecto de estas metavariables, a diferencia de las variables p, q y r, no rige la convención de que letras diferentes deben designar fórmulas diferentes.

La tabla 2.1 resume las conectivas que encontraremos en los lenguajes proposicionales en este capítulo, cada una con un ejemplo de una oración formada por medio de la misma y el significado de dicha oración. Respecto de las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ decimos que son binarias, y respecto de $\neg$ decimos que es unaria (o monádica); esto corresponde a la cantidad de oraciones que requiere la conectiva en cuestión.

Tabla 2.1 Conectivas y sus significados

Símbolo	Oración compuesta	Significado
$\neg$ (negación)	$\neg$ p (negación de p)	no es el caso que p
$\wedge$ (conjunción)	(p $\wedge$ q) (conjunción de p y q)	p y q
$\vee$ (disyunción)	(p $\vee$ q) (disyunción de p y q)	p o q
$\rightarrow$ (implicación)	(p $\rightarrow$ q) (implicación material de p y q)	si p entonces q
$\leftrightarrow$ (equivalencia)	(p $\leftrightarrow$ q) (equivalencia material de p y q)	p si y sólo si q

Decimos que p es el primer miembro (o *conjuntivo*) de la conjunción (p $\wedge$ q) y q es el segundo. Lo mismo se aplica a las implicaciones, disyunciones y equivalencias, a pesar de que al primer y segundo miembro de una implicación algunas veces se les denomina su *antecedente* y su *consecuente* respectivamente, mientras que los dos miembros de una disyunción son denominados sus *disyuntivos*.

Nuestra elección de las conectivas es en cierto sentido arbitraria. Algunas son obviamente importantes. Nos ocuparemos de las cinco en forma separada y examinaremos en qué medida las expresiones correspondientes del lenguaje natural pueden considerarse como veritativo-funcionales. Asimismo, haremos algunos comentarios sobre otras conectivas posibles que no han sido incluidas en esta lista.

Las reglas sintácticas de los lenguajes proposicionales nos permiten vincular, mediante conectivas, no sólo letras proposicionales (a las que también se les denomina fórmulas *atómicas*), sino también fórmulas compuestas. La terminología es la misma: si ϕ y ψ son fórmulas, entonces decimos que $\neg\phi$ es la negación de ϕ, $(\phi \wedge \psi)$ es la conjunción de ϕ y ψ, etc.; $\neg\phi$ se refiere en forma natural a la cadena de símbolos obtenida prefijando $\neg$ a la cadena ϕ; $(\phi \wedge \psi)$ se refiere a la cadena consistente en un paréntesis izquierdo, seguido por la cadena ϕ, seguido por la conectiva $\wedge$, seguido por la cadena ψ y cerrada por un paréntesis derecho.

Los paréntesis sirven para eliminar ambigüedades. De no ser por ellos una oración como p $\vee$ q $\wedge$ r podría tener dos significados distintos. Puede ser (a) la disyunción de p, por un lado y la conjunción de q y r por el otro; o (b) la conjunción de la disyunción de p y q, por un lado y r por el otro. Mediante los ejemplos (5) y (6) puede apreciarse en forma sencilla que ambas alternativas tienen distinto significado:

(5) McX ha sido electo, o Wyman ha sido electo y
ha comenzado una nueva era.

(6) McX ha sido electo o Wyman ha sido electo y
ha comenzado una nueva era.

El ejemplo (5) corresponde a (p $\vee$ (q $\wedge$ r)) que es una disyunción, mientras que (6) corresponde a ((p $\vee$ q) $\wedge$ r) que es una conjunción. En §2.3 volveremos sobre estas fórmulas más complejas. Ahora ampliaremos el tratamiento de los diferentes significados de las diversas conectivas.

Lo que nos concierne es la forma en que el valor de verdad de una oración compuesta, formada por una o dos oraciones más simples, depende de los valores de verdad de las oraciones componentes y de la conectiva empleada. Para cada conectiva, esto queda prescripto en una *tabla de verdad*. La discusión de la oración (1) muestra que la tabla de verdad de la conjunción es la que se consigna en (7):

(7)

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Al lado de cada combinación posible de los valores de verdad de ϕ y de ψ se consigna el valor de verdad resultante de $(\phi \wedge \psi)$. A la vista de esto, podría parecer que el comportamiento lógico de $\wedge$ es enteramente concordante con el de *y* del lenguaje natural. Sin embargo, el acuerdo no es perfecto. De acuerdo con la tabla de verdad, si alguien afirma (8) verazmente, entonces la oración (9) también es verdadera:

(8) Ana se quitó las medias y se metió en la cama.

(9) Ana se metió en la cama y se quitó las medias.

Pero, es probable que la persona en cuestión no estuviera inclinada a aceptar esto, ya que el hecho de colocar una oración después de la otra sugiere que éste fue también el orden en que sucedieron los eventos descriptos. Con todas las otras conectivas surgen complicaciones similares. En el capítulo 6 discutiremos si este tipo de fenómeno puede ser explicado en términos de *condiciones de uso*.

La columna de la izquierda de (10) es una lista de oraciones que tienen las mismas condiciones de verdad que la conjunción de las dos oraciones que están a su derecha.

(10)

Zandvoort y Haarlem están al oeste de Amsterdam.	Zandvoort está al oeste de Amsterdam.	Haarlem está al oeste de Amsterdam.
Juan y Pedro están casados con Ana y Beatriz respectivamente.	Juan está casado con Ana.	Pedro está casado con Beatriz.
Tanto los liberales como los socialistas favorecieron la moción.	Los liberales favorecieron la moción.	Los socialistas favorecieron la moción.

Juan está en su casa pero está dormido.	Juan está en su casa.	Juan está dormido.
Juan está en su casa pero Pedro no lo está.	Juan está en su casa.	Pedro no está en su casa.
Si bien hacía mucho frío, Juan no se quedó adentro.	Hacía mucho frío.	Juan no se quedó adentro.
A pesar de que afuera estaba hermoso, Juan se quedó adentro.	Afuera estaba hermoso.	Juan se quedó adentro.

Así, todas las oraciones de la columna de la izquierda expresan una conjunción lógica, a pesar de que desde un punto de vista estrictamente lingüístico no se trate de dos oraciones unidas mediante la inserción de *y* entre ellas. Evidentemente, las connotaciones que tienen *pero*, *si bien* y *a pesar de* no alteran las condiciones de verdad de las oraciones en las que aparecen esas palabras. Nótese también que no toda oración en la que figura *y* es una conjunción. La siguiente es un ejemplo que no lo es:

(11) Juan y Pedro son amigos.

Resulta un tanto forzado considerar a esta oración como una conjunción entre, digamos, *Juan es amigo* y *Pedro es amigo*. Tampoco la oración (12) significa lo mismo que la conjunción (13):

(12) Pedro y Pablo son divertidos en las fiestas.

(13) Pedro es divertido en las fiestas y Pablo es divertido en las fiestas.

ya que tal vez son divertidos sólo cuando están juntos.

La negación es también un asunto relativamente sencillo. La tabla de verdad consta solamente de dos filas; véase (14)

(14) ϕ	$\neg\phi$
1	0
0	1

Hay más formas de expresar la negación de una oración que por medio de *no* o *no es el caso que*. Véase, por ejemplo:

(15)

Los potros son indomables.	Los potros son domables.
Juan no está ni en su casa ni en la escuela.	Juan está o bien en su casa o bien en la escuela.
No hay nadie en casa.	Alguien está en casa.
Juan nunca está en su casa.	Juan está a veces en su casa.

Juan aún no llegó a su casa.	Juan ya llegó a su casa.
Juan no ha estado nunca en su casa.	Juan ha estado en alguna ocasión en su casa.

En (16) consignamos la tabla de verdad de la disyunción:

(16)

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ésta es la tabla de verdad obvia para *y/o*. En el lenguaje natural, *o* generalmente significa *y/o*. Este uso es denominado *inclusivo*.
El caso en que *o* sea usado de forma tal que excluya la posibilidad de que ambos disyuntivos sean verdadero, también se expresa mediante la construcción *o bien...o bien*, y entonces se dice que *o* es *exclusiva*. A veces se introduce una conectiva diferente para la disyunción exclusiva, cuya tabla de verdad se consigna en (17):

(17)

ϕ	ψ	$\phi \not\leftrightarrow \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En este libro, *o* será entendida como inclusiva, tal como se la entiende habitualmente en matemáticas, a menos que se especifique lo contrario.

En realidad, no es muy fácil encontrar un ejemplo corriente de una *o* exclusiva. Una oración como (18) no lo es:

(18) Llueve o no llueve.

En la oración (18) no habría ninguna diferencia en el valor de verdad si *o* fuera inclusiva o no, dado que no puede llover y no llover. Lo que necesitamos es un ejemplo de la forma *A o B* en el que haya una posibilidad real de que se cumplan tanto A como B; esta eventualidad queda excluida por la disyunción exclusiva. En el lenguaje natural esto se expresa habitualmente colocando un énfasis extra sobre la *o*, o por medio de *o bien... o bien*. Por ejemplo:

(19) O bien esta noche iremos a ver una película,
o bien iremos a la playa por la tarde.

Otra construcción que puede emplearse para expresar una disyunción exclusiva es la que emplea *a menos que*. La oración (19) tiene las mismas condiciones de verdad que la (20).

(20) Esta noche iremos a ver una película,
a menos que vayamos a la playa por la tarde.

En (21) consignamos la tabla de verdad de la implicación material:

(21)

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A menudo, *si* (..., *entonces*) no puede ser considerada como veritativo-funcional en el lenguaje cotidiano. En primer lugar, una oración como

(22) Si Juan se golpea la cabeza, llora.

habitualmente significa que en cualquier momento es el caso que Juan llora si se acaba de golpear la cabeza. Si se interpreta (22) como

(23) Si Juan se acaba de golpear la cabeza, ahora está llorando.

entonces evidentemente es verdadera si Juan acaba de golpearse la cabeza y de hecho está llorando y es falsa si acaba de golpearse la cabeza y en este momento no está llorando. ¿Y si Juan no acaba de golpearse la cabeza? Ciertamente no querríamos afirmar que en ese caso la oración deba ser siempre falsa, pero tampoco parece muy atractivo afirmar que deba ser siempre verdadera. Dado que hemos acordado que las oraciones declarativas son o bien verdaderas o bien falsas, elijamos la alternativa menos indeseable y digamos que los condicionales materiales son verdaderos si su antecedente no es verdadero. Luego, lo que obtenemos es (21).

Las implicaciones que encontramos en matemáticas son materiales y esto puede ser ilustrado como sigue. La oración (24) es considerada verdadera y por razones de claridad la expresamos como (25):

(24) Si un número es mayor que 5, entonces es mayor que 3.

(25) Para todo número x, si $x > 5$, entonces, $x > 3$.

La verdad de una oración universal como (25) implica la verdad de cada uno de sus casos, por ejemplo, (26):

(26) Si $6 > 5$, entonces $6 > 3$.
Si $4 > 5$, entonces $4 > 3$.
Si $2 > 5$, entonces $2 > 3$.

Estas tres combinaciones corresponden precisamente a las tres combinaciones diferentes de valores de verdad para las cuales $\phi \rightarrow \psi$ es verdadera: $6 > 5$ y $6 > 3$ son ambas verdaderas; $4 > 5$ es falsa y $4 > 3$ es verdadera, mientras que $2 > 5$ y $2 > 3$

son ambas falsas. Suponiendo que buscamos una tabla de verdad para la implicación material, la que hemos elegido es evidentemente la única elección real que tenemos. Respecto de la oración (22) se puede hacer un comentario similar. Si consideramos que (22) significa que Juan siempre llora si acaba de golpearse la cabeza, entonces, si aceptamos que (22) es verdadera, debemos aceptar que en cualquier punto del tiempo dado t hay sólo tres posibilidades:

(i) En el tiempo t Juan (acaba) de golpearse la cabeza y está llorando.
(ii) En el tiempo t Juan no (acaba) de golpearse la cabeza y está llorando.
(iii) En el tiempo t Juan no (acaba) de golpearse la cabeza y no está llorando.

La eventualidad de que en el tiempo t Juan (acaba) de golpearse la cabeza y no está llorando queda descartada porque hemos supuesto la verdad de (22). A partir de esto debería quedar claro que la implicación material cumple algún papel en el análisis de las implicaciones del lenguaje natural. En lógica se han estudiado otras formas distintas de implicación, por ejemplo en lógica intensional (véase vol. 2). En (27) se consigna una lista de oraciones que pueden ser consideradas como implicaciones:

(27)

$\rightarrow$ *implicación*	p (*antecedente*)	q (*consecuente*)
Juan llora si se ha golpeado la cabeza	Juan se ha golpeado la cabeza.	Juan llora.
Juan está malhumorado sólo si se acaba de levantar.	Juan está malhumorado.	Juan se acaba de levantar.
Para que el partido funcione mejor, es necesario que se establezca mayor contacto con el electorado.	El partido funciona mejor.	Se ha establecido mayor contacto con el electorado.
Para que el partido funcione mejor, es suficiente con que Pérez sea expulsado.	Pérez es expulsado.	El partido funciona mejor.

En (28) se consigna la tabla de verdad para la equivalencia material:

(28)

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Puede apreciarse que $\phi \leftrightarrow \psi$ es verdadera si ϕ y ψ tienen ambos el mismo valor de verdad y falsa si sus valores de verdad difieren. Otra forma de decir esto es que

$\phi \leftrightarrow \psi$ es verdadera sólo en caso de que ϕ implica materialmente a ψ y que ψ implica materialmente a ϕ. *Si y sólo si* es una conjunción muy rara en el lenguaje natural. Una conjunción más común de la cual es razonable pensar que tiene la misma tabla de verdad es *siempre y cuando*:

(29) Esta noche iremos a ver una película,
siempre y cuando la vajilla haya sido lavada.

En contextos matemáticos, en lugar de *si y sólo si*, habitualmente se escribe $\Leftrightarrow$ y *sii*.

2.3 Fórmulas

A continuación proporcionaremos definiciones precisas de los conceptos que hemos introducido más arriba.

Un *lenguaje L para la lógica proposicional* tiene su propia provisión de letras proposicionales. No las especificaremos; sencillamente acordaremos referirnos a las mismas por medio de las metavariables p, q y r y si es necesario les anexaremos subíndices. También consta de paréntesis y conectivas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ $\leftrightarrow$) que son comunes para todos los lenguajes de la lógica proposicional. Todos estos elementos conforman el vocabulario de L. En la sintaxis se define lo que significa *expresiones* (*fórmulas*, *oraciones*) *bien formadas* de L. La definición es la misma para todos los lenguajes proposicionales.

Definición 1

(i) Las letras proposicionales del vocabulario de L son fórmulas de L.

(ii) Si ψ es una fórmula de L, entonces $\neg\psi$ tambien lo es.

(iii) Si ϕ y ψ son fórmulas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ también lo son.

(iv) Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas (i)-(iii) en un número finito de pasos son fórmulas de L.

Las primeras tres cláusulas de la definición dan una receta para construir fórmulas; (iv) agrega que sólo lo que ha sido preparado de acuerdo con la receta es una fórmula.

Ilustraremos la definición examinando algunos ejemplos de cadenas de símbolos que, según esta definición, están bien formadas y algunos ejemplos de cadenas que no pueden ser consideradas bien formadas. De acuerdo con la definición 1, p, $\neg\neg\neg\neg p$, $((\neg p \wedge q) \wedge r)$ y $((\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r)$ son ejemplos de fórmulas, mientras que pq, $\neg(\neg\neg p)$, $\wedge p \neg q$ y $\neg((p \rightarrow q \vee r))$ no lo son.

La cláusula (i) enuncia que todas las letras proposicionales de L son fórmulas de L. De esta cláusula se sigue que p es una fórmula. De (i) y (ii) se sigue que $\neg\neg\neg\neg p$ es una fórmula: de acuerdo con (i), p es una fórmula y (ii) nos permite formar una nueva fórmula a partir de otra preexistente prefijándole el símbolo de la negación, operación que ha sido aplicada aquí cuatro veces seguidas. En

$((\neg p\wedge q)\wedge r)$ se aplicó la cláusula (iii) dos veces: se forma una nueva fórmula a partir de dos existentes al introducir primero un paréntesis de apertura, o izquierdo, luego la primer fórmula, seguida por el signo de la conjunción y la segunda fórmula y finalizando con un paréntesis de cierre, o derecho. Para formar $((\neg p\wedge q)\wedge r)$ la operación se aplicó primero a $\neg p$ y a q, obteniendo $(\neg p \wedge q)$ y luego se aplicó a este resultado y a r. Formar disyunciones, implicaciones y equivalencias también conlleva la introducción de paréntesis. Esto se aprecia con claridad en el cuarto ejemplo, $((\neg(p\vee q)\to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r)$, en el cual los paréntesis más externos se obtienen como resultado de formar la equivalencia entre $(\neg(p\vee q)\to \neg\neg\neg q)$ y r; los paréntesis interiores se introducen para construir la disyunción de p y q; los del medio se obtienen como resultado de la introducción del signo de implicación. Nótese que para formar la negación no se requiere introducir paréntesis. Esto no es necesario, porque no puede producirse confusión respecto de la parte de la fórmula a la cual se aplica el signo de la negación: o bien es prefijada a una letra proposicional, o a una fórmula que comienza con un signo de negación, o se coloca delante de una fórmula, en cuya construcción la cláusula (iii) fue la última en aplicarse. En ese caso, los paréntesis introducidos por (iii) dejan claro sin ambigüedad a qué se aplica el signo de la negación.

Ciertamente pq, esto es, la letra proposicional p seguida inmediatamente por la letra proposicional q, no es una fórmula: la única forma de tener dos letras proposicionales juntas para construir una fórmula es formando su conjunción, disyunción, implicación o equivalencia. La cadena $\neg(\neg\neg p)$ no es una fórmula porque en la misma aparecen paréntesis, pero ningún signo de conjunción, disyunción, implicación o equivalencia y éstos son los únicos que introducen paréntesis. Por supuesto, $\neg\neg\neg p$ *está* bien formada. En $\wedge\, p\, \neg q$, el signo de la conjunción aparece delante de los conjuntivos y no entre ellos tal y como lo prescribe la cláusula (iii). Además, faltan los paréntesis. Finalmente, en $\neg((p \to q \vee r))$ los paréntesis están mal colocados, generando ambigüedad respecto del resultado entre $\neg(p\to(q\vee r))$ y $\neg((p \to q) \vee r)$.

Ejercicio 1

Determine si cada una de las siguientes expresiones es una fórmula de la lógica proposicional.

(i) $\neg(\neg p \vee q)$

(ii) $p \vee (q)$

(iii) $\neg(q)$

(iv) $(p_2 \to (p_2 \to (p_2 \to p_2)))$

(v) $(p \to ((p \to q)))$

(vi) $((p \to p)\to(q \to q))$

(vii) $((p_2 \to p_3) \to p_4)$

(viii) $(p \to (p \to q) \to q)$

(ix) $(p \vee (q \vee r))$

(x) $(p \vee q \vee r)$

(xi) $(\neg p \vee \neg\neg p)$

(xii) $(p \vee p)$

Si quitamos los paréntesis externos de las fórmulas, se facilita su lectura sin ningún riesgo de provocar ambigüedades. En la mayor parte de lo que sigue preferimos abreviar $((\neg p \wedge q) \wedge r)$ como $(\neg p \wedge q) \wedge r$, $((\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r)$ como $(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r$, $((p \wedge q) \wedge (q \wedge p))$ como $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$, $(p \to q)$ como $p \to q$ y $(\neg p \to q)$ como $\neg p \to q$. Análogamente, escribiremos $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$, $\phi \wedge (\phi \vee \chi)$, etc.

La definición 1 nos permite asociar un único *árbol constructivo* a cada fórmula. $(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r$, por ejemplo, debe haber sido construida de acuerdo con el árbol consignado en la figura (30).

(30)

$(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r$ (iii, $\leftrightarrow$)

$(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q)$ (iii, $\to$) $\qquad$ r (i)

$\neg(p \vee q)$ (ii) $\qquad$ $\neg\neg\neg q$ (ii)

$p \vee q$ (iii, $\vee$) $\qquad$ $\neg\neg q$ (ii)

p (i) $\quad$ q (i) $\qquad$ $\neg q$ (ii)

q (i)

El hecho de que cada fórmula tenga un único árbol constructivo se debe a que, gracias a los paréntesis, las fórmulas lógicas no son ambiguas. Al costado de cada *nodo* del árbol se lee el número de la cláusula de la definición 1 según la cual la fórmula de ese nodo es una fórmula. De una fórmula obtenida mediante la aplicación de la cláusula (ii) se dice que es una negación y que su *signo principal* es $\neg$; en forma similar, el signo principal de una fórmula obtenida por aplicación de la cláusula (iii) es la conectiva que dicha cláusula introduce (en el ejemplo, está escrita al lado de la fórmula). Por ejemplo, el signo principal de la fórmula que está en el extremo superior del árbol es $\leftrightarrow$ y la fórmula es una equivalencia. Nótese que las fórmulas de los nodos inferiores son todas atómicas.

Una fórmula ϕ que aparece en el árbol constructivo de ψ se denomina *subfórmula* de ψ. Las subfórmulas de $\neg(p \vee q)$ son pues: p, q, $p \vee q$ y $\neg(p \vee q)$, mientras que las subfórmulas de $(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r$ son: p, q, r, $\neg q$, $\neg\neg q$, $\neg\neg\neg q$, $p \vee q$, $\neg(p \vee q)$, $\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q$ y $(\neg(p \vee q) \to \neg\neg\neg q) \leftrightarrow r$. Cualquier subfórmula ϕ de ψ es una cadena de símbolos consecutivos que aparece en la cadena de símbolos ψ y que en sí misma es una fórmula. Y a la inversa, puede mostrarse que cualquier cadena de símbolos consecutivos tomada de ψ, que es en sí misma una fórmula, es una subfórmula de ψ. Aquí omitiremos la prueba.

Ejercicio 2

(a) Dibuje el árbol constructivo de $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$, de $p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_2)$ y de $((p \vee q) \vee \neg r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee \neg r))$. En cada uno de los tres casos consigne las subfórmulas de la fórmula en cuestión.
(b) Consigne todas las fórmulas que pueden construirse con la siguiente secuencia de símbolos y mediante el agregado de paréntesis: $p \wedge \neg q \rightarrow r$. Además, consigne también sus árboles constructivos.
(c) Clasifique cada una de las siguientes oraciones como fórmula atómica, negación, conjunción, disyunción, implicación o equivalencia:

(i)	$p \rightarrow q$	(vi)	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \neg\neg p)$
(ii)	$\neg p$	(vii)	p_4
(iii)	p	(viii)	$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$
(iv)	$(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$	(ix)	$\neg(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg p_2$
(v)	$\neg(p \rightarrow q)$	(x)	$(p \wedge (q \wedge r)) \vee p$

Discutiremos ahora la naturaleza de la última cláusula de la definición 1, la cual afirma:

> Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas (i)-(iii) en un número finito de pasos son fórmulas de L.

A una cláusula de este tipo a veces se le denomina *cláusula de inducción* de una definición. La misma desempeña un papel importante. Si alguien definiera a una oveja como el vástago de dos ovejas, no lo encontraríamos muy satisfactorio. No parece decir mucho, dado que si no se sabe qué es una oveja, entonces no se sabrá mucho más a partir de esta definición. La definición de una oveja como el vástago de dos ovejas es *circular*. La definición 1 también podría parecer circular: la cláusula (ii), por ejemplo, afirma que un $\neg$ seguido por una fórmula es una fórmula. Pero, aquí no hay realmente un problema, dado que la fórmula ϕ que aparece después de $\neg$ es más simple que la fórmula $\neg\phi$, en el sentido de que contiene menos conectivas, o lo que es equivalente, que puede generarse en menos pasos mediante las cláusulas (i)-(iii). Si ϕ es una fórmula, debe ser una fórmula de acuerdo con las cláusulas (i)-(iii). Esto significa que o bien ϕ es una letra proposicional (y sabemos cuáles son éstas), o bien es una fórmula compuesta construida a partir de fórmulas más simples. De manera que en última instancia todo se reduce a letras proposicionales.

En una definición del tipo de la definición 1, se dice que los objetos tienen una cierta propiedad (en este caso, la de ser una fórmula) si pueden ser construidos a partir de otros objetos 'más simples' que tengan esa propiedad y en última instancia a partir de algún grupo de objetos de los cuales simplemente se dice que tienen esa propiedad. Tales definiciones se denominan *inductivas* o *recursivas*.

La definición circular de una oveja como el vástago de dos ovejas puede convertirse en una definición inductiva (i) estipulando dos ovejas ancestrales, llamémosles Adán y Eva; y (ii) estableciendo que son ovejas las cosas que cumplen con la cláusula (i) y con la cláusula según la cual el vástago de dos ovejas es una oveja. De acuerdo con esta definición, el árbol constructivo de toda oveja dada sería un árbol genealógico completo que se remontaría a los primeros ancestros Adán y Eva (aunque, contrariamente a los árboles genealógicos corrientes, Adán y Eva aparecerán en el extremo inferior).

La mayor parte de lo que sigue se aplica a todos los lenguajes proposicionales por igual, de manera que en vez de referirnos a las fórmulas de algún lenguaje proposicional en particular, nos referiremos a *las fórmulas de la lógica proposicional*.

Debido a que definimos el concepto de fórmula inductivamente, disponemos de un método sencillo para probar que todas las fórmulas tienen alguna propiedad particular en la que podemos estar interesados. A continuación consignamos el método. Para probar que todas las fórmulas tienen una propiedad A, es suficiente con mostrar que:

(i) Todas las letras proposicionales tienen la propiedad A.

(ii) Si la fórmula ϕ tiene A, entonces también debe tenerla $\neg\phi$.

(iii) Si ϕ y ψ tienen la propiedad A, entonces también deben tenerla $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Esto es suficiente debido a la cláusula (iv), la cual asegura que toda fórmula compuesta debe estar compuesta por alguna(s) fórmula(s) más simple(s) de la(s) cual(es) hereda la propiedad A. A una prueba de este tipo se le denomina *prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula* (o *prueba por inducción sobre la longitud de la fórmula*). Como ejemplo de una prueba por inducción sobre la complejidad de una fórmula, demostraremos en forma sencilla y rigurosa que todas las fórmulas de la lógica proposicional tienen exactamente tantos paréntesis izquierdos como derechos:

(i) Las letras proposicionales no tienen paréntesis.

(ii) Si ϕ tiene el mismo número de paréntesis derechos e izquierdos, entonces $\neg\phi$ también debe tener el mismo número debido a que no se le añaden ni quitan paréntesis.

(iii) Si tanto ϕ como ψ tienen el mismo número de paréntesis derechos e izquierdos, entonces también deben tenerlo $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$, ya que en todas ellas se ha agregado un paréntesis izquierdo y un paréntesis derecho.

En general, para cada definición inductiva hay un tipo de prueba por inducción.

Para lograr un rigor matemático absoluto, en muchos puntos de este libro deberíamos haber proporcionado pruebas inductivas. En su lugar preferimos sencillamente señalar los casos en los que, en sentido estricto, se requeriría de una prueba.

El hecho de que se haya definido el concepto de fórmula en forma estricta mediante la definición 1 nos permite dar definiciones inductivas estrictas de las nociones que se refieren a fórmulas. Por ejemplo, definase la función $(\phi)^0$ que hace corresponder a cada fórmula un número natural mediante:

$(p)^0 = 0$
$(\neg\phi)^0 = (\phi)^0$
$((\phi * \psi))^0 = (\phi)^0 + (\psi)^0 + 2$, para cada conectiva binaria*.

De esta manera, para cada fórmula ϕ, $(\phi)^0$ proporciona el número de paréntesis de la fórmula ϕ.

Ejercicio 3 ◇

a) El *operador profundidad* de una fórmula de la lógica proposicional es la longitud máxima de un 'nido'de operadores que aparece en la misma. Esto es, $((\neg p\wedge q)\wedge\neg r)$ tiene operador profundidad 3.
Proporcione una definición precisa de esta noción, empleando la definición inductiva de fórmula.
(b) Piense en los árboles constructivos de la fórmulas. ¿Qué conceptos se definen por medio de la siguiente inducción 'simultánea'?

$A(p)=1$	$B(p) = 1$
$A(\neg\psi) = A(\psi) + 1$	$B(\neg\psi) = \max(B(\psi), A(\psi) + 1)$
$A(\psi \circ \chi) = \max(A(\psi), (A\chi)) + 1$	$B(\psi \circ \chi) = \max(B(\psi), B(\chi),$
para conectivas binarias $\circ$	$A(\psi) + A(\chi) + 1)$.

Ejercicio 4 ◇

(a) ¿Qué nociones describen las siguientes definiciones por inducción sobre fórmulas?

$p^* = 0$	para letras proposicionales p
$(\neg\phi)^* = \phi^*$	
$(\phi \circ \psi)^* = \phi^* + \psi^* + 1$	para conectivas binarias $\circ$
$p^+ = 1$	
$(\neg\phi)^+ = \phi^+$	
$(\phi \circ \psi)^+ = \phi^+ + \psi^+$	para conectivas binarias $\circ$

(b) Pruebe por inducción que para todas las fórmulas ϕ, $\phi^+ = \phi^* + 1$.

Ejercicio 5

En este ejercicio, solicitamos al lector que traduzca oraciones del español a la lógica proposicional. Le proporcionamos un ejemplo de lo que se espera. Debemos traducir la oración:

Si he perdido si no puedo hacer ningún movimiento, entonces he perdido.

Durante una partida de ajedrez o damas, un jugador podría, por ejemplo, afirmar esta oración en caso de que no pudiera anticipar ningún movimiento por hacer y no supiera si esta situación implica su derrota.

Solución

Traducción: $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$

Diccionario: p: *Puedo hacer un movimiento*; q: *He perdido.*

Traduzca las siguientes oraciones a la lógica proposicional. Preserve lo máximo posible de su estructura y en cada caso consigne el diccionario.

1) Este motor no es ruidoso, pero consume mucha energía.
(2) No es el caso que Andrés venga si Pedro o Enrique vienen.
(3) No es el caso que Caín sea culpable y Abel no.
(4) Esto no ha sido escrito con un lápiz o una lapicera.
(5) Juan no sólo es estúpido sino también desagradable.
(6) Juan quiere que Papá Noel le traiga tanto un tren como una bicicleta, pero no recibirá ninguna de las dos cosas.
(7) Nadie rió o aplaudió.
(8) Iré a la playa o al cine a pie o en bicicleta.
(9) Carlos y Elsa son hermano y hermana o primo y prima.
(10) Carlos va a trabajar en auto, o en bicicleta y tren.
(11) Si Dios quiere, vendrá la paz.
(12) Si llueve mientras brilla el sol, aparecerá un arco iris.
(13) Si el clima es malo o muchos están enfermos, la fiesta no se hará.
(14) Juan irá a la escuela y si llueve también lo hará Pedro.
(15) Si no estamos en verano, entonces está húmedo y hace frío, si es de tarde o de noche.
(16) Si tú no me ayudas si yo te necesito, no te ayudaré si tú me necesitas.
(17) Si te quedas conmigo si no bebo más, entonces no beberé más.
(18) Carlos viene si Elsa lo hace y viceversa.
(19) Juan viene sólo si Pedro no lo hace.
(20) Juan viene si y sólo si Pedro no lo hace.
(21) Juan viene siempre y cuando Pedro se quede en su casa.
(22) Iremos, a menos que llueva.
(23) Si Juan viene, entonces es una desgracia si vienen Pedro y Juana.
(24) Si tanto mi padre como mi madre van, entonces yo no iré, pero si sólo mi padre va, entonces yo iré también.
(25) Si Juan es amable, Papá Noel le regalará una bicicleta, sea que la quiera o no.
(26) No quisiste decir eso y si lo quisiste, no te creo.
(27) Si Juan queda fuera, entonces es obligatorio que Pedro o Nicolás participen.

2.4 Funciones

Habiéndonos ocupado de la sintaxis de los lenguajes para la lógica proposicional, debemos ocuparnos de su semántica, la cual consiste en la forma en que se los interpreta. Lo anterior muestra que lo que tenemos en mente cuando hablamos de la interpretación de un lenguaje proposicional es la atribución de valores de verdad a sus oraciones. Dichas atribuciones son denominadas *valuaciones*. Pero estas valuaciones son funciones, de manera que primero debemos ocuparnos de las funciones.

Para expresarlo en forma bastante general, una función es una atribución de un único *valor* (a veces se le denomina, *imagen*) a cada entidad de un cierto tipo específico (en el caso de una valuación, las entidades son las oraciones del lenguaje en cuestión). Estas entidades son denominadas *argumentos* de la función y en su conjunto forman su *dominio*. Las entidades que figuran como los valores posibles de una función son denominadas colectivamente su *rango*. Si x es un argumento de la función f, entonces f(x) es el valor que se obtiene como resultado cuando *se aplica* f a x. No debe considerarse que la palabra *valor* aquí implica que se trata de un valor de verdad o cualquier otro tipo de número, dado que cualquier tipo de cosa podría aparecer en el rango de una función. El único requisito es que ningún argumento puede tener más de un único valor. En la tabla 2.2 se ofrecen algunos ejemplos de funciones. Se entiende que la columna de la izquierda de la tabla contiene nombres de funciones, de manera que, por ejemplo, *fecha de nacimiento de x* es el nombre de una función que acepta a personas como sus argumentos y les atribuye su fecha de nacimiento como valores. Por ejemplo, el valor de *la fecha de nacimiento de x* para el argumento Winston Churchill es 30 de noviembre de 1874.

Tabla 2.2 Ejemplos de funciones

Funciones	*Dominio*	*Rango*
Fecha de nacimiento de x	Personas	Fechas
Madre de x	Personas	Mujeres
Jefe de Estado de x	Países	Personas
Rodado de x	Bicicletas	Números
Negación de x	Fórmulas de la lógica proposicional	Fórmulas de la lógica proposicional
Ciudad capital de x	Países	Ciudades
Sexo de x	Personas	Los dos sexos (masculino, femenino)

Para aclarar lo que queremos decir compárense las siguientes expresiones que, aunque son similares a las que aparecen en la tabla, *no* pueden ser consideradas como nombres de funciones: *hermano mayor de x* (dominio: personas) no puede ser tomada por una función dado que como no todos tienen un hermano, no sería posible atribuirle un valor a todo argumento. *Progenitor de x* tampoco es una función, pero no porque algunas personas carezcan de progenitores: el problema es que todos tienen, o al menos tuvieron, no menos de dos progenitores. Por consiguiente, en este caso los valores no son únicos. En forma similar, *objeto* *directo de x* (dominio: oraciones en español) no es una función, porque no toda oración tiene un objeto directo y *verbo de x* no es una función dado que algunas oraciones tienen más de un verbo.

Además, también hay funciones que requieren dos o tres o más elementos del dominio para arrojar un valor. En la tabla 2.3 se muestran algunos ejemplos. Se dice que las funciones que requieren de dos argumentos del dominio para arrojar un valor son *binarias* y, generalizando, las funciones que requieren *n* argumentos son *n*-arias. El *cociente de x e y* (dominio: números) es un ejemplo de una expresión que acepta dos lugares de argumento, pero no expresa una función binaria. En este caso no se trata de una función porque el valor de esta expresión queda indefinido para toda x si se toma 0 como y.

Las funciones pueden aplicarse a sus propios valores o a los de otras funciones siempre que éstos sean del tipo apropiado, es decir, que se encuentren dentro del dominio de la función en cuestión. *Fecha de nacimiento de la madre de Juan*, *madre del jefe de Estado de Francia*, *madre de la madre de la madre de Pedro*, *sexo de la madre de Carlos* y *suma de la diferencia entre* 6 *y* 3 *y la diferencia entre* 4 *y* 2: (6 - 3) + (4 - 2) son ejemplos de funciones que se aplican unas a otras.

Tabla 2.3 Ejemplos de funciones binarias y ternarias

Función	*Dominio*	*Rango*
Suma de x e y	Números	Números
Diferencia entre x e y	Números	Números
Ruta más corta entre x e y	Ciudades	Rutas
Hora de partida del último tren desde x vía y con destino a z	Estaciones	Momentos del tiempo

Como ya lo enunciamos, cada función tiene su dominio y rango propios. Si A es el dominio de una función f y B es su rango, entonces escribimos f: A → B y decimos que f es una *función de A a B* y que f *proyecta* (mapea) *A en B*. Hay una importante asimetría entre el dominio de una función y su rango y es que mientras que una función debe hacer corresponder a cada elemento de su dominio algún elemento de su rango, lo inverso no es necesariamente verdadero: no es necesario que todo elemento del rango de una función aparezca como el valor de la función cuando se la aplica a algún elemento de su dominio. El rango contiene todos los valores *posibles* de una función y restringirlo a los valores que de hecho aparecen como valores de la función, resulta a menudo ineficaz. En los ejemplos dados precedentemente se eligió un rango más amplio que el que estrictamente se necesitaba: en el caso de *madre de x* se eligió a todas las mujeres en lugar de sólo aquellas que son madres, en *jefe de Estado de x* a todas las personas en lugar de sólo los jefes de estado y en *la ruta más corta entre x e y* se eligió a todas las rutas en lugar de las rutas que forman la ruta más corta entre ciudades. En el caso especial en el que todo elemento del rango B de una función f es imagen de algún elemento de su domino A, decimos que f es una función de A *sobre* B. De las funciones de la tabla 2.2, sólo *sexo de x* es una función sobre su rango y en la tabla 2.3 sólo las funciones suma y diferencia lo son, dado que todo número es la suma de otros dos números y también la diferencia de otros dos números

El orden de los argumentos de una función puede establecer una diferencia: la diferencia entre 1 y 3 es -2, mientras que la diferencia entre 3 y 1 es +2. Se dice que una función binaria en la que no importa el orden de los argumentos es *conmutativa*. La función suma es un ejemplo de función conmutativa, dado que la suma de x e y siempre es igual a la suma de y y x. El mismo objeto puede aparecer más de una vez como argumento: por ejemplo, hay un número que es la suma de 2 y 2.

El valor de una función f cuando se la aplica a argumentos x_1, ..., x_n se escribe generalmente en *notación prefija* como $f(x_1,\ldots,x_n)$, a pesar de que para algunas funciones binarias muy conocidas se emplea la notación *infija*, tal como es el caso de $x + y$ para la suma de x e y y $x - y$ para su diferencia, en vez de $+(x,y)$ y $-(x,y)$ respectivamente.

Se dice que una función f es *asociativa* si para objetos cualesquiera x, y, z de su dominio $f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)$, o, en notación infija, si $xf(yfz) = (xfy)fz$. Evidentemente esta noción sólo tiene sentido si el rango de f es parte de su dominio, dado que de otra forma no siempre será posible aplicarla a xfy y z. En otras palabras, f es asociativa si no importa si se la aplica primero a los dos primeros argumentos o primero a los dos segundos. La suma y el producto de dos números son funciones asociativas, dado que para números cualesquiera x, y, z tenemos: $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$. La función diferencia no es asociativa: $(4-2)-2 = 0$, pero $4-(2-2) = 4$. La asociatividad de una función f significa que podemos escribir $x_1fx_2fx_3 \ldots x_{n-1}fx_n$ sin tener que insertar paréntesis, dado que el valor de la expresión es independiente del lugar en que se los inserte. Luego, por ejemplo, tenemos: $(x_1+x_2)+(x_3+x_4) = x_1+((x_2+x_3)+x_4)$. Primero tenemos $(x_1+x_2)+(x_3+x_4) = x_1+(x_2+(x_3+x_4))$, dado que $(x+ y) +z =x +(y+z)$ para x, y, z cualesquiera, así en particular para $x =x_1$, $y = x_2$, y $z = x +x_4$. Y $x_1+ (x +(x_3+x_4)) = x_1+((x_2+x_3)+x_4)$, dado que $x_2+(x_3+ x_4) = (x_2+x_3)+x_4$.

2.5 La semántica de la lógica proposicional

Empleando la terminología que acabamos de introducir ahora podemos proceder a describir las valuaciones mencionadas anteriormente como funciones (unarias) que proyectan fórmulas sobre valores de verdad. Pero no cualquier función cuyo dominio sean fórmulas y cuyo rango sean valores de verdad podrá ser aceptada como valuación. Una valuación debe concordar con las interpretaciones de las conectivas dadas en sus tablas de verdad. Por ejemplo, una función que atribuya el valor 1 tanto a p como a $\neg p$ no podrá aceptarse como una valuación, dado que no concuerda con la interpretación de la negación. La tabla de verdad para $\neg$ (véase (14)) establece que para toda valuación V y para toda fórmula ϕ:

(i) $V(\neg\phi) = 1$ sii $V(\phi) = 0$.

Esto es así porque en la tabla de verdad se escribe el valor de verdad 1 bajo $\neg\phi$ sólo en el caso que se escriba 0 bajo ϕ. Dado que $\neg\phi$ sólo puede tener 1 ó 0 como su valor de verdad (el rango de V contiene sólo 1 y 0), podemos expresar lo mismo de la siguiente forma:

(i') $V(\neg\phi) = 0$ sii $V(\phi) = 1$.

O sea, se escribe un 0 debajo de $\neg\phi$ sólo en caso de que se escriba 1 debajo de ϕ. En forma similar, de acuerdo con las otras tablas de verdad tenemos:

(ii) $V(\phi \wedge \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 1$.

(iii) $V(\phi \vee \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 1$ ó $V(\psi) = 1$.

(iv) $V(\phi \rightarrow \psi) = 0$ sii $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 0$.

(v) $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ sii $V(\phi) = V(\psi)$.

Recuérdese que *o* es interpretado como *y/o*. La cláusula (iii) puede ser parafraseada como $V(\phi \vee \psi) = 0$ sii $V(\phi) = 0$ y $V(\psi) = 0$; la (iv) como $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 0$ ó $V(\psi) = 1$ (*o* = *y/o*). Y si, en forma quizá un poco artificial, tratamos a los valores de verdad 1 y 0 como números ordinarios, también podemos parafrasear (iv) como: $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$ sii $V(\phi) \leqslant V(\psi)$ (dado que mientras que $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$ y $1 \leqslant 1$, no se da $1 \leqslant 0$).

Una valuación V queda completamente determinada por los valores de verdad que atribuye a las letras proposicionales. Una vez que sabemos lo que la valuación V hace con las proposiciones, podemos calcular la valuación V de cualquier fórmula ϕ mediante el árbol constructivo de ϕ. Si, por ejemplo, $V(p) = 1$ y $V(q) = 1$, entonces $V(\neg(\neg p \wedge \neg q))$ puede calcularse como sigue. Tenemos que $V(\neg p) = 0$ y $V(\neg q) = 0$, así $V(\neg p \wedge \neg q) = 0$ y así $V(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = 1$. Ahora debe quedar claro que sólo los valores que la valuación V atribuye a las letras proposicionales que aparecen en ϕ pueden tener influencia sobre $V(\phi)$. De manera que, para apreciar cómo varía el valor de verdad de ϕ con las valuaciones, es suficiente con trazar lo que se denomina su *tabla de verdad compuesta*, en la cual se calculan los valores de verdad de todas las subfórmulas de ϕ para toda distribución posible de los valores de verdad de las letras proposicionales que aparecen en ϕ. Para seguir con el mismo ejemplo, en (31) damos la tabla de verdad compuesta para la fórmula $\neg(\neg p \wedge \neg q)$:

(31)

	1	2	3	4	5	6
	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V_1	1	1	0	0	0	1
V_2	1	0	0	1	0	1
V_3	0	1	1	0	0	1
V_4	0	0	1	1	1	0

En las columnas 1 y 2 están las cuatro distribuciones diferentes de valores de verdad entre p y q. En las columnas 3 y 4 se dan los valores de verdad correspondientes a $\neg p$ y a $\neg q$; se calcularon de acuerdo con la tabla de verdad de la negación. Luego, en la columna 5, se dan los valores de verdad de $\neg p \wedge \neg q$ calculados a partir de las columnas 3 y 4 empleando la tabla de verdad de la conjunción. Y, finalmente, en la columna 6 se dan los valores de verdad de $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ correspondientes a cada una de las cuatro distribuciones posibles de valores de verdad entre p y q, que se calculan a partir de la columna 5 mediante la tabla de verdad de la negación.

El número de filas de la tabla de verdad compuesta para una fórmula depende sólo del número de letras proposicionales diferentes que aparecen en esa fórmula. Dos letras proposicionales diferentes dan lugar a cuatro filas y en general, podemos decir que n letras proposicionales dan lugar a 2^n filas, dado que ése es el número de distribuciones diferentes de los dos valores de verdad entre n proposiciones. Cada valuación corresponde a solamente una fila en una tabla de verdad. Así, si nos restringimos a las letras proposicionales p y q, hay solamente cuatro valuaciones posibles: las V_1, V_2, V_3 y V_4 dadas en (31). Y estas cuatro son las únicas valuaciones que interesan para fórmulas cuyas únicas letras proposicionales son p y q, dado que, como acabamos de ver, lo que la valuación V hace con ϕ queda totalmente determinado por lo que la valuación V hace con las letras proposicionales que aparecen en ϕ. Esto significa que podemos agregar nuevas columnas en (31) a fin de evaluar tantas fórmulas como queramos que estén compuestas sólo por las letras p y q conjuntamente con conectivas. Esto es importante, como veremos a continuación.

Nótese que la fórmula compuesta $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ es verdadera siempre que alguna de las letras proposicionales p o q sea verdadera y falsa si tanto p como q son falsas. Esta es justamente la disyunción inclusiva de p y q. Ahora considérese la tabla de verdad compuesta (32):

(32)	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
V_1	1	1	0	0	0	1	1
V_2	1	0	0	1	0	1	1
V_3	0	1	1	0	0	1	1
V_4	0	0	1	1	1	0	0

Hemos agregado una nueva columna a la tabla de verdad anterior. En la columna agregada se consigna el valor de verdad de $p \vee q$ para cada distribución de valores de verdad entre p y q y esto se calcula de acuerdo con la tabla de verdad de la disyunción. Esto muestra claramente que los valores de verdad de $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ y de $p \vee q$ son los mismos bajo toda valuación, dado que

$V_1(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = V_1(p \vee q) = 1;$
$V_2(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = V_2(p \vee q) = 1;$
$V_3(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = V_3(p \vee q) = 1;$
$V_4(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = V_4(p \vee q) = 0.$

Por lo tanto, para cada valuación V tenemos: $V(\neg(\neg p \wedge \neg q)) = V(p \vee q)$. Las fórmulas $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ y $p \vee q$ son *lógicamente equivalentes*. Formulado más claramente: se dice que ϕ y ψ son *lógicamente equivalentes* sólo en caso de que para cada valuación V: V(ϕ) = V(ψ). El calificativo *lógico* se agrega para evitar toda confusión con la *equivalencia material*.

Para apreciar cómo se comportan todas las fórmulas de la forma $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ y $(\phi \vee \psi)$ bajo toda posible valuación, se puede trazar una tabla de verdad compuesta similar a (32) empleando las tablas de verdad de la negación, la conjunción y la disyunción. En (33) se presentan los resultados:

(33)

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$	$\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$	$\phi \vee \psi$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

En esta tabla de verdad se puede ver con claridad que la equivalencia entre fórmulas de la forma $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ y $\phi \vee \psi$ es bastante general (para una explicación general de las relaciones de este tipo, véase el teorema 13 en §4.2.2).

Considérese otro ejemplo. Todas las fórmulas de las formas $\neg\neg\phi$ y ϕ son equivalentes, como se aprecia en (34):

(34)

ϕ	$\neg\phi$	$\neg\neg\phi$
1	0	1
0	1	0

Esta equivalencia es conocida como la *ley de la doble negación*. El último ejemplo que daremos es la tabla de verdad que demuestra que $(\phi \vee \psi)\vee\chi$ es equivalente a $\phi \vee (\psi \vee \chi)$ y $(\phi \wedge \psi)\wedge\chi$ lo es a $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$; véase:

(35)

ϕ	ψ	χ	$\phi \vee \psi$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi$	$\psi \vee \chi$	$\phi \vee (\psi \vee \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

ϕ	ψ	χ	$\phi \wedge \psi$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$	$\psi \wedge \chi$	$\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Las dos últimas equivalencias son conocidas como la *asociatividad de* $\wedge$ y la *asociatividad de* $\vee$ respectivamente, por analogía con el concepto que se introdujo en relación con las funciones y que lleva el mismo nombre. (Para una vinculación más estrecha entre estos conceptos, véase §2.6.) Al igual que con las funciones, la asociatividad de $\vee$ y $\wedge$ significa que podemos omitir los paréntesis en las fórmulas mencionadas dado que su significado es independiente de la posición en que están colocados. Por supuesto, esto supone que sólo nos interesa el valor de verdad de las fórmulas. En general, entonces, podemos sencillamente escribir $\phi \wedge \psi \wedge \chi$, $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \phi)$ etc. $\phi \wedge \psi \wedge \chi$ es verdadera sólo en caso de que ϕ, ψ y χ sean todas verdaderas mientras que $\phi \vee \psi \vee \chi$ es verdadera sólo en caso de que alguna de ellas sea verdadera.

Ejercicio 6

En este ejercicio se darán un gran número de equivalencias muy conocidas. Para comprender intuitivamente el método vale la pena demostrar algunas de estas equivalencias mediante tablas de verdad y luego tratar de comprender por qué deben cumplirse dichas equivalencias, dados los significados de las conectivas. Al lector le resultará más fácil si reemplaza las metavariables ϕ, ψ y χ por oraciones derivadas del lenguaje natural.

Pruebe para cada uno de los siguientes casos que todas las fórmulas son lógicamente equivalentes entre sí (independientemente de las fórmulas representadas por ϕ, ψ y χ):

(a) ϕ, $\neg\neg\phi$, $\phi \wedge \phi$, $\phi \vee \phi$, $\phi \wedge (\phi \vee \psi)$, $\phi \vee (\phi \wedge \psi)$

(b) $\neg\phi$, $\phi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$

(c) $\neg(\phi \vee \psi)$, $\neg\phi \wedge \neg\psi$ (ley de *De Morgan*)

(d) $\neg(\phi \wedge \psi)$, $\neg\phi \vee \neg\psi$ (ley de *De Morgan*)

(e) $\phi \vee \psi$, $\psi \vee \phi$, $\neg\phi \rightarrow \psi$, $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

(f) $\phi \wedge \psi$, $\psi \wedge \phi$, $\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)$, $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

(g) $\phi \rightarrow \psi$, $\neg\phi \vee \psi$, $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$, $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$

(h) $\phi \to \neg\psi$, $\psi \to \neg\phi$ (ley de *contraposición*)

(i) $\phi \leftrightarrow \psi$, $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$, $(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(j) $(\phi \vee \psi) \wedge \neg(\phi \wedge \psi)$, $\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\phi \leftrightarrow \psi$ (y ϕ -- ψ, a pesar de que oficialmente no es una fórmula de lógica proposicional de acuerdo con la definición)

(k) $\phi \wedge (\psi \vee \chi)$, $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ (ley *distributiva*)

(l) $\phi \vee (\psi \wedge \chi)$, $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$ (ley *distributiva*)

(m) $(\phi \vee \psi) \to \chi$, $(\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$

(n) $\phi \to (\psi \wedge \chi)$, $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)$

(o) $\phi \to (\psi \to \chi)$, $(\phi \wedge \psi) \to \chi$

Las equivalencias de $\phi \vee \psi$ y $\psi \vee \phi$ y de $\phi \wedge \psi$ y $\psi \wedge \phi$ que se mencionan en (e) y (f) del ejercicio 6, se conocen como la *conmutatividad* de $\vee$ y $\wedge$, respectivamente. (En relación con la conmutatividad de funciones, véase §2.6.) Tanto la equivalencia mencionada en (h) como la equivalencia de $\phi \to \psi$ y $\neg\psi \to \neg\phi$ dada en (g) del ejercicio 6 se conocen como ley de *contraposición*.

Las fórmulas lógicamente equivalentes siempre tienen los mismos valores de verdad. Esto significa que la fórmula χ', obtenida al reemplazar una subfórmula ϕ de una fórmula χ por una fórmula equivalente ψ, debe ser equivalente a χ. Esto se debe a que el valor de verdad de χ' depende del valor de ψ del mismo modo en que el valor de χ depende del valor de ϕ. Por ejemplo, si ϕ y ψ son equivalentes, entonces $\phi \to \theta$ y $\psi \to \theta$ también lo son. Una consecuencia de esto es que cuando $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$ aparece como subfórmula de una fórmula mayor, también pueden omitirse los paréntesis. Por ejemplo, podemos escribir $(\phi \wedge \psi \wedge \chi) \to \theta$ en lugar de $((\phi \wedge \psi) \wedge \chi) \to \theta$ y $\theta \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi) \wedge (\chi \vee \psi))$ en lugar de $\theta \to (((\phi \to \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi)) \wedge (\chi \vee \psi))$. De un modo más general, tenemos aquí un procedimiento útil para probar equivalencias sobre la base de otras equivalencias que sabemos que se cumplen. A manera de ejemplo, demostraremos que $\phi \to (\psi \to \chi)$ es equivalente a $\psi \to (\phi \to \chi)$. De acuerdo con el ejercicio 6(o), $\phi \to (\psi \to \chi)$ es equivalente a $(\phi \wedge \psi) \to \chi$. De acuerdo con la ley de conmutatividad de $\wedge$, $\phi \wedge \psi$ es equivalente a $\psi \wedge \phi$, de manera que $(\phi \wedge \psi) \to \chi$ es equivalente a $(\psi \wedge \phi) \to \chi$. Aplicando el 6(o) una vez más, ahora con ψ, ϕ y χ, en lugar de con ϕ, ψ y χ, obtenemos que $(\psi \wedge \phi) \to \chi$ es equivalente a $\psi \to (\phi \to \chi)$. Si ahora unimos todas estas equivalencias, apreciamos que $(\phi \wedge \psi) \to \chi$ es equivalente a $\psi \to (\phi \to \chi)$ que era lo que deseábamos probar.

Ejercicio 7 ◇

Sobre la base de las equivalencias del ejercicio 6, muestre que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes:

(a) $\phi \leftrightarrow \psi$ y $\psi \leftrightarrow \phi$ (*conmutatividad de* $\leftrightarrow$)

(b) $\phi \rightarrow \neg\phi$ y $\neg\phi$

(c) $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ y $\chi \wedge (\psi \wedge \phi)$

(d) $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ y $\phi \rightarrow \psi$

(e) $\phi \nleftrightarrow \psi$ y $\phi \leftrightarrow \neg\psi$

(f) $\phi \nleftrightarrow \neg\psi$, $\neg\phi \nleftrightarrow \psi$ y $\phi \leftrightarrow \psi$

En cierto sentido dos fórmulas lógicamente equivalentes ϕ y ψ tienen el mismo significado. En ese caso decimos que ϕ y ψ tienen el mismo *significado lógico*. Por lo tanto, la observación hecha más arriba puede reformularse concisamente de la siguiente manera: el significado lógico se conserva al reemplazar una subfórmula por otra fórmula que tiene el mismo significado lógico.

Merece la pena detenerse un momento en la equivalencia de $\phi \nleftrightarrow \psi$ y $\phi \leftrightarrow \neg\psi$ (ejercicio 7e). Lo que esto significa es que *A a menos que B* y que *A siempre y cuando no B* tienen el mismo significado lógico: en términos lógicos, entonces (36) significa lo mismo que (37) (=(20)):

(36) Esta noche iremos a ver una película siempre y cuando no vayamos a la playa por la tarde.

(37) Esta noche iremos a ver una película a menos que vayamos a la playa por la tarde.

Esto es análogo a lo que sucede con las equivalencias dadas en 7f: *A a menos que no B* y *no A a menos que B* tienen el mismo significado lógico que *A siempre y cuando B*, lo cual significa, entre otras cosas, que (38), (39) y (40) (=(29)) expresan todas el mismo significado lógico:

(38) Esta noche iremos a ver una película a menos que la vajilla no haya sido lavada.

(39) Esta noche no iremos a ver una película a menos que la vajilla haya sido lavada.

(40) Esta noche iremos a ver una película siempre y cuando la vajilla haya sido lavada

Es obvio que existen diversas razones para preferir una oración en vez de otra en un contexto dado. La equivalencia de (38), (39) y (40) muestra que las razones no tienen nada que ver con el significado lógico de las oraciones. Las diferencias entre estas oraciones presumiblemente puedan explicarse en términos de sus condiciones de uso y en los mismos términos también debe buscarse una explicación de la naturaleza peculiar de oraciones como:

(41) Esta noche no iremos a ver una película siempre y cuando vayamos a la playa por la tarde.

comparamos las tablas de verdad de fórmulas lógicamente equivalentes p y $\neg\neg$p de p $\wedge$ q y q $\wedge$ p con las de la equivalencia material p $\leftrightarrow$ $\neg\neg$p y (p$\wedge$q) $\leftrightarrow$ (q$\wedge$p), es evidente que existe una conexión entre la equivalencia lógica y la material; véase figuras (42) y (43):

(42)

p	$\neg$p	$\neg\neg$p	p $\leftrightarrow$ $\neg\neg$p
1	0	1	1
0	1	0	1

(43)

p	q	p $\wedge$ q	q $\wedge$ p	(p $\wedge$ q) $\leftrightarrow$ (q $\wedge$ p)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

En ambos casos vemos que aparece sólo un único valor de verdad en la columna de la equivalencia material, a saber, 1. Esto, obviamente, no es una coincidencia. Precisamente porque bajo cualquier valuación V, $V(p) = V(\neg\neg p)$ y $V(p \wedge q) = V(q \wedge p)$, se tiene siempre que $V(p \leftrightarrow \neg\neg p) = 1$ y $V((p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)) = 1$. Ahora, es posible formular esta idea como un teorema general:

Teorema 1

ϕ y ψ son lógicamente equivalentes sii para toda valuación V, $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$.

Prueba. En general, la prueba de un teorema de la forma A sii B se divide en dos partes: (i) la prueba de que si A entonces B y (ii) la prueba de que si B entonces A. La prueba de (i) está encabezada por $\Rightarrow$: generalmente se procede suponiendo primero A y luego se muestra que inevitablemente se sigue B. La prueba de (ii) está encabezada por $\Leftarrow$: generalmente se procede suponiendo primero B y luego mostrando que inevitablemente se sigue A. De esta forma, la prueba de nuestro primer teorema será la siguiente:

$\Rightarrow$: Supóngase que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes. Esto significa que para cualquier valuación V para las letras proposicionales que aparecen en ϕ y en ψ, $V(\phi) = V(\psi)$ Luego, según la condición (v) para las valuaciones, tenemos que $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$.

$\Leftarrow$: Supóngase que $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ para toda valuación V. Luego, no puede haber una valuación V tal que $V(\phi) \neq V(\psi)$, dado que, de otro modo, $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 0$. De manera que para toda valuación V debe cumplirse que $V(\phi) = V(\psi)$. Por consiguiente, ϕ y ψ son lógicamente equivalentes.□

El cuadrado □ indica que la prueba ha sido completada.

En el teorema 2 de §4.2.2 veremos que las fórmulas ϕ tal que $V(\phi) = 1$ para toda valuación V son de especial interés. Puede conocerse la verdad de estas fórmulas sin poseer ninguna información acerca del valor de verdad de sus partes componentes. Tales fórmulas ϕ son denominadas *tautologías*. Que ϕ es una tautología se expresa como $\models \phi$. Así, el teorema 1 puede reescribirse del siguiente modo:

$\models \phi \leftrightarrow \psi$ sii ϕ y ψ son lógicamente equivalentes.

Ahora el teorema 1 nos ofrece una vasta provisión de tautologías a la vez, por ejemplo $((\phi \vee \psi)\vee\chi) \leftrightarrow (\phi \vee(\psi \vee \chi))$, $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, las leyes de Morgan, etc. Y tenemos aun más tautologías, dado que $\models \phi \rightarrow \psi$ y $\models \psi \rightarrow \phi$ siempre que $\models \phi \leftrightarrow \psi$. (Esto último es porque si para toda valuación V, $V(\phi) = V(\psi)$, entonces podemos estar seguros de que para toda valuación V, $V(\phi) \leqslant V(\psi)$ y $V(\psi) \geqslant V(\phi)$.) Ahora tenemos a todas las fórmulas de la forma $(\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\phi)$ y de la forma $((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$ como ejemplos de tautologías. Pero hay muchas más, por ejemplo todas las fórmulas de la forma $\phi \rightarrow(\psi \rightarrow \phi)$, como queda de manifiesto en la figura (44):

(44)

ϕ	ψ	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Ejercicio 8

Muestre que las siguientes fórmulas son tautologías (para cada ϕ, ψ y χ):

(i) $\phi \rightarrow \phi$ (esto de hecho se sigue de la equivalencia de ϕ consigo misma)

(ii) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$

(iii) $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$

(iv) $\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ (*ex falso sequitur quodlibet*)

(v) $\phi \vee \neg\phi$ (ley del *tercero excluido*)

(vi) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

(vii) $(\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi)$

(viii) $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ (ley de *Peirce*)

Es obvio que todas las tautologías son equivalentes entre sí; si tenemos que $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 1$ siempre, entonces ciertamente tenemos siempre que $V(\phi) = V(\psi)$.

Que una fórmula ϕ no es una tautología se expresa como $\not\models \phi$. Si $\not\models \phi$, entonces existe una valuación V tal que $V(\phi) = 0$. Cada una de estas valuaciones se denomina *contraejemplo de (la tautologicidad) de* ϕ. En §4.2.1 nos ocuparemos de esta terminología más detalladamente. Como ejemplo, tomamos la fórmula $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg p\rightarrow \neg q)$, que puede considerarse como el esquema del siguiente argumento inválido: Si uno tiene dinero, entonces tiene amigos. Luego, si uno no tiene dinero, entonces no tiene amigos. Considérese la tabla de verdad:

(45)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg p\to\neg q$	$(p\to q)\to(\neg p\to\neg q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

Es evidente que $\nvDash (p\to q)\to(\neg p\to\neg q)$, dado que 0 aparece en la tercera fila de la tabla de verdad. Esta fila está completamente determinada por la circunstancia de que $V(p) = 0$ y $V(q) = 1$, en el sentido de que para cualquier valuación V con $V(p) = 0$ y $V(q) = 1$ obtenemos $V((p\to q)\to(\neg p\to\neg q)) = 0$. Por esta razón podemos decir que $V(p) = 0$ y $V(q) = 1$ es un contraejemplo de $(p\to q)\to(\neg p\to\neg q)$.

Debemos dejar en claro que a pesar de lo anterior no podemos afirmar si una oración de la forma $(\phi\to\psi)\to(\neg\phi\to\neg\psi)$ es o no una tautología sin poseer más información acerca de ϕ y de ψ. Por ejemplo, si reemplazamos tanto ϕ como ψ por p, entonces obtendremos la siguiente tautología $(p\to p)\to(\neg p\to\neg p)$; y si reemplazamos ϕ por $p\vee\neg p$ y ψ por q, obtendremos la tautología $((p\vee\neg p)\to q)\to(\neg(p\vee\neg p)\to\neg q)$. Pero si reemplazamos ϕ por p y ψ por q, entonces llegaremos a la oración $(p\to q)\to(\neg p\to\neg q)$ que, según (45), no es una tautología.

Ejercicio 9

Determine si las siguientes fórmulas son o no tautologías. Si alguna no lo fuera, proporcione un contraejemplo. (¿Por qué este ejercicio está formulado en términos de p y q y no en términos de ϕ y ψ como el ejercicio 8?)

(i) $(p\to q)\to(q\to p)$

(ii) $p\vee(p\to q)$

(iii) $(\neg p\vee\neg q)\to\neg(p\vee q)$

(iv) $((p\vee q)\wedge(\neg p\to\neg q))\to q$

(v) $((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)$

(vi) $((p\to q)\to r)\to(p\to(q\to r))$

Las oraciones ϕ, tales que para toda valuación V, $V(\phi) = 0$, están estrechamente relacionadas con las tautologías. Tales fórmulas se denominan *contradicciones*. Dado que jamás son verdaderas, el sólo proferir una contradicción equivale a virtualmente contradecirse consigo mismo. Las más conocidas tienen la forma $\phi\wedge\neg\phi$ (véase figura (46)).

(46)

ϕ	$\neg\phi$	$\phi\wedge\neg\phi$
1	0	0
0	1	0

Podemos obtener muchas contradicciones a partir del

Teorema 2

Si ϕ es una tautología, entonces $\neg\phi$ es una contradicción.

Prueba: Supóngase que ϕ es una tautología. Entonces para toda valuación V, $V(\phi) = 1$. Pero entonces para toda valuación V debe cumplirse que $V(\neg\phi) = 0$. Luego, de acuerdo con la definición, $\neg\phi$ es una contradicción.□

Así, por ejemplo, $\neg((\phi \wedge \psi)\leftrightarrow(\psi \wedge \phi))$, $\neg(\phi \to \phi)$ y $\neg(\phi \vee \neg\phi)$ son contradicciones. Una prueba análoga se da del

Teorema 3

Si ϕ es una contradición, entonces $\neg\phi$ es una tautología.

Este teorema nos permite obtener más tautologías de la forma $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$ (ley de *no contradicción*). Todas las contradicciones son equivalentes, al igual que en el caso de las tautologías. Las fórmulas que no son ni tautologías ni contradicciones se denominan *contingencias* (*lógicas*). Existen fórmulas ϕ tales que hay tanto una valuación V_1 con $V_1(\phi) = 1$ como una valuación V_2 con $V_2(\phi) = 0$. En otras palabras, en su tabla de verdad la fórmula ϕ tiene escrito debajo de ella al menos un 1 y un 0. Muchas fórmulas son contingentes. Los siguientes son algunos ejemplos: p, q, $p\wedge q$, $p\to q$, $p\vee q$, etc. Debe quedar claro que no todas las contingencias son equivalentes entre sí. Acerca de ellas puede decirse que:

Teorema 4

ϕ es una contingencia sii $\neg\phi$ es una contingencia.

Prueba: (puede darse una prueba diferente a partir de los teoremas 2 y 3, pero nuestra prueba directa es más sencilla).

$\Rightarrow$: Supóngase que ϕ es una contingencia. Entonces hay un V_1 con $V_1(\phi) = 1$ y un V_2 con $V_2(\phi) = 0$. Pero entonces tenemos que $V_2(\neg\phi) = 1$ y $V_1(\neg\phi) = 0$, de donde se desprende que $\neg\phi$ es contingente.

$\Leftarrow$ se procede como en $\Rightarrow$.□

Ejercicio 10

Sea ϕ una tautología, ψ una contradicción y χ una contingencia. ¿Cuáles de las siguientes oraciones son (i) tautológicas, (ii) contradictorias, (iii) contingentes, (iv) lógicamente equivalentes a χ?

(1)$\phi \wedge \chi$; (2)$\phi \vee \chi$; (3) $\psi \wedge \chi$; (4) $\psi \vee \chi$; (5) $\phi \vee \psi$. (6) $\chi \to \psi$.

Ejercicio 11

(i) Probar las siguientes afirmaciones generales:

(a) Si $\phi \to \psi$ es una contradicción, entonces ϕ es una tautología y ψ una contradicción.

(b) $\phi \wedge \psi$ es una tautología sii ϕ y ψ son ambas tautologías.

(ii) Refute la siguiente afirmación general proporcionando una fórmula para la cual no se cumpla.

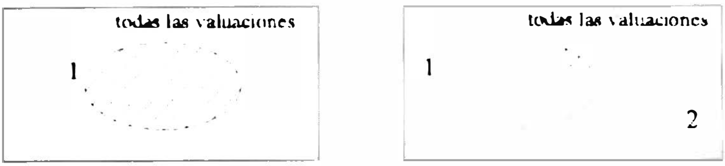
Si $\phi \vee \psi$ es una tautología, entonces ϕ es una tautología o ψ es una tautología.

(iii)◇Pruebe la siguiente afirmación general:

Si ϕ y ψ no poseen letras proposicionales en común, entonces $\phi \vee \psi$ es una tautología sii ϕes una tautología o ψ es una tautología.

Para no provocar una impresión equivocada, debemos enfatizar que la lógica proposicional no es sólo la ciencia de las tautologías o inferencias. Nuestra semántica también puede servir como modelo de otros importantes procesos intelectuales tales como la *acumulación de información*. Las valuaciones de algún conjunto de letras proposicionales podrían considerarse como (descripciones de) estados del mundo, o situaciones, en tanto puedan expresarse en este vocabulario. Cada fórmula, entonces, restringe la atención a aquellas valuaciones ('mundos') en las que se cumple: su 'contenido de información'. De un modo más dinámico, agregando sucesivamente nuevas fórmulas en un discurso se reducen las posibilidades, como lo muestra la figura (47).

(47)



En el caso límite podría obtenerse como resultado una única descripción de un mundo real. Nótese la inversión en la figura: cuantos más mundos están en el rango de la información, menos información contiene. Las proposiciones pueden entenderse aquí como transformaciones que operan sobre el contenido de la información, reduciendo (en general) la incertidumbre.

Ejercicio 12 ◇

Determine las valuaciones para los siguientes tres estadios sucesivos de un discurso (véase figura (47)):
(1) $\neg(p\wedge(q\rightarrow r))$; (2) $\neg(p\wedge(q\rightarrow r))$, $(p\rightarrow r)\rightarrow r$; (3) $\neg(p\wedge(q\rightarrow r))$, $(p\rightarrow r)\rightarrow r$, $r\rightarrow(p\vee q)$.

2.6 Funciones de verdad

Cuando discutimos la sintaxis de la lógica proposicional las conectivas no se introdujeron categoremáticamente sino sincategoremáticamente. En concordancia con esto, en §2.5 no se interpretaron directamente sino contextualmente. No interpretamos $\wedge$ en sí misma; sólo indicamos cómo debería interpretarse $\phi \wedge \psi$ una vez fijadas las interpretaciones para ϕ y para ψ. Sin embargo, es posible interpretar $\wedge$ y las otras conectivas en forma directa, como *funciones de verdad*; éstas son funciones con valores de verdad no sólo en su rango sino también en su dominio.

La conectiva $\wedge$, por ejemplo, puede ser interpretada como la función $f_\wedge$ tal que $f_\wedge(1,1) = 1$, $f_\wedge(1,0) = 0$, $f_\wedge(0,1) = 0$ y $f_\wedge(0,0) = 0$. Análogamente, pueden darse las funciones $f_\vee$, $f_\rightarrow$ y $f_\leftrightarrow$ como interpretaciones de $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, definidas por:

$f_\vee(1,1) =$, $f_\vee(1,0) =$, $f_\vee(0,1) = 1$ y $f_\vee(0,0) = 0$.
$f_\rightarrow(1,1) = f_\rightarrow(0,1) = f_\rightarrow(0,0) = 1$ y $f_\rightarrow(1,0) = 0$.
$f_\leftrightarrow(1,1) = f_\leftrightarrow(0, 0) = 1$ y $f_\leftrightarrow(1,0) = f_\leftrightarrow(0,1) = 0$.

Finalmente, $\neg$ puede interpretarse como la función de verdad unaria $f_\neg$ definida por $f_\neg(1) = 0$ y $f_\neg(0) = 1$. Luego, para cada valuación V tenemos que $V(\neg\phi) = f_\neg(V(\phi))$; y si $\circ$ es cualquiera de nuestras conectivas binarias, entonces para cada valuación V tenemos que $V(\phi \circ \psi) = f_\circ(V(\phi), V(\psi))$.

El lenguaje de la lógica proposicional puede enriquecerse fácilmente agregando nuevas conectivas veritativo-funcionales tales como, por ejemplo, la conectiva $\not\leftrightarrow$ cuya interpretación definimos como $f_{\not\leftrightarrow}(1,0) = f_{\not\leftrightarrow}(0,1) = 1$ y $f_{\not\leftrightarrow}(1,1) = f_{\not\leftrightarrow}(0,0) = 0$. A la inversa, se puede introducir una conectiva que sea interpretada como cualquier función de verdad que uno pueda imaginar.

Pero en cierto sentido todo esto es innecesario, dado que ya poseemos suficientes conectivas como para expresar cualquier función de verdad que podamos concebir. Comencemos con las funciones de verdad unarias. De éstas sólo hay cuatro (agregar a las figuras (48a-d)):

(48) a. f_1

x	$f_1(x)$
1	1
0	1

b. f_2

x	$f_2(x)$
1	1
0	0

c. f_3

x	$f_3(x)$
1	0
0	1

d. f_4

x	$f_4(x)$
1	0
0	0

Evidentemente, f_1, f_2, f_3 y f_4 son las únicas candidatas para ser empleadas como interpretación de una conectiva veritativo-funcional unaria. Ahora resulta bastante sencillo encontrar fórmulas cuyas tablas de verdad correspondan precisamente a esas funciones de verdad. Sencillamente tómese $p \vee \neg p$, p, $\neg p$ y $p \wedge \neg p$.

Hay exactamente dieciséis funciones de verdad binarias y, como puede fácilmente apreciarse, la expresión general para el número de funciones de verdad n-arias es 2^{2^n}. Puede probarse ahora que todas estas funciones de verdad pueden expresarse por medio de las conectivas que ya tenemos. Esto es, dada la tabla de cualquier función de verdad, hay un método general que genera una fórmula cuya tabla es la misma. Esto se prueba por el siguiente teorema:

Teorema 5 (*completitud funcional de la lógica proposicional*)

Si f es una función de verdad n-aria, entonces hay una fórmula ϕ con n variables proposicionales $p_1, \dots, p_n$, tal que para cada valuación V de $p_1, \dots, p_n$, $V(\phi) = f(V(p_1), \dots, V(p_n))$.

Bosquejo de prueba. No daremos una descripción general del método, sino que lo ilustraremos con referencia a la función de verdad ternaria f dada en la tabla de verdad (49):

	x	y	z	f(x, y, z)
	1	1	1	0
	1	1	0	0
	1	0	1	1
(49)	1	0	0	0
	0	1	1	1
	0	1	0	1
	0	0	1	0
	0	0	0	0

Para recapitular: lo que estamos buscando, es una fórmula ϕ con variables proposicionales p, q y r cuya tabla de verdad sea (49). Se supone que ϕ tiene el valor de verdad 1 en tres filas diferentes de la tabla de verdad (tercera, quinta y sexta fila). Ahora construiremos tres fórmulas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 cada una de las cuales tendrá el valor de verdad 1 sólo en una fila de su correspondiente tabla de verdad (tercera, quinta y sexta fila respectivamente) y exactamente en los mismos lugares donde se supone que ϕ tiene 1. Esto es, ϕ_1 debe ser verdadera sii p es verdadera, q es falsa y r es verdadera. De manera que podemos tomar la fórmula: $p \land \neg q \land r$, para representar a ϕ_1. En forma similar, podemos tomar las fórmulas $\neg p \land q \land r$ y $\neg p \land q \land \neg r$ para representar a ϕ_2 y ϕ_3 respectivamente. Ahora para construir ϕ sólo debemos construir la disyunción de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3: $\phi = \phi_1 \lor \phi_2 \lor \phi_3 = (p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r)$. De esta forma tendremos ciertamente la fórmula ϕ que queríamos: dado que ϕ_1 tiene el valor de verdad 1 en la tercera fila de su tabla de verdad, ϕ también tiene el valor de verdad 1 en la tercera fila de su tabla de verdad; dado que ϕ_2 tiene 1 en la quinta fila de su tabla de verdad, ϕ también tiene 1 en la quinta fila de su tabla de verdad; y dado que ϕ_2 tiene 1 en la sexta fila de su tabla de verdad, ϕ también tiene 1 en la sexta fila de su tabla de verdad; mientras que ϕ tiene 0 en todas las demás filas de su tabla de verdad porque ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 tienen 0 en todas las demás filas de sus correspondientes tablas de verdad (es decir, exceptuando la tercera, quinta y sexta fila respectivamente). Está claro que este procedimiento puede seguirse para todas las demás funciones de verdad, independientemente del número de lugares que puedan tener (con la única excepción de una tabla de verdad donde sólo aparezca 0, pero en ese caso podemos elegir cualquier contradicción como nuestra ϕ).□

Se dice que un sistema de conectivas tal como $\land$, $\lor$ y $\neg$ es *funcionalmente completo* cuando puede expresar todas las funciones de verdad. Debido a que el sistema que comprende $\lor$, $\land$ y $\neg$ es funcionalmente completo, también lo será un sistema más extenso que posea $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$ y $\neg$; luego estas cinco conectivas son suficientes para expresar toda posible conectiva veritativo-funcional.

A partir de lo anterior resulta sencillo mostrar que $\neg$ y $\lor$ conforman un sistema veritativo-funcional completo en sí mismo. Ya sabemos que toda función de verdad puede expresarse por medio de $\land$, $\lor$ y $\neg$. Además, se cumple que para fórmulas cualesquiera ϕ y ψ, $\phi \wedge \psi$ y $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ son fórmulas equivalentes (véase ejercicio 6f). Así, para cada función de verdad hay una fórmula χ con las conectivas $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ que la expresa. Ahora reemplazamos cada subfórmula de la forma $\phi \wedge \psi$ por la fórmula equivalente $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$. El resultado último será una fórmula χ cuyas únicas conectivas son $\vee$ y $\neg$, la cual es equivalente a χ y, por ende, expresa la misma función de verdad que χ.

Ejercicio 13

(a) Proporcione una fórmula con sólo $\vee$ y $\neg$ que sea equivalente a $(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$.
(b) Muestre que $\neg$ junto con $\wedge$ forman un conjunto funcionalmente completo de conectivas y que $\neg$ con $\rightarrow$ también. (Esta última combinación es la que eligió Frege en su *Begriffsschrift*.)
(c) La conectiva $\downarrow$ (la *daga de Quine*) puede definirse de acuerdo a su tabla de verdad. Muestre que $\downarrow$ es en sí misma un conjunto completo de conectivas.(Sugerencia: intente primero expresar $\neg$ sólo con $\downarrow$ y luego $\vee$ sólo con $\downarrow$ y $\neg$.) ¿Qué conjunción en el lenguaje natural corresponde a $\downarrow$?

ϕ	ψ	$\phi \downarrow \psi$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejercicio 14 ◇

Determine la máxima cantidad de fórmulas no lógicamente equivalentes que pueden construirse con dos letras proposicionales p, q usando sólo la implicación material.

Ejercicio 15 ◇

Llámese *conservadora* a una función de verdad binaria f si siempre $f(x,y) = f(x,f_\wedge(x,y))$. Llámese a una función de verdad genuinamente *binaria* si su tabla de verdad no puede definirse usando sólo funciones de verdad unarias. Determine todas las fórmulas proposicionales con dos letras proposicionales p y q con funciones de verdad conservadoras genuinamente binarias.

Retomaremos ahora los conceptos de conmutatividad y asociatividad. Desde la perspectiva que estamos desarrollando, la conmutatividad y la asociatividad de $\vee$ y $\wedge$ se reducen sencillamente a la conmutatividad y a la asociatividad de $f_\vee$ y $f_\wedge$. Para todos los valores de verdad de x, y, z tenemos: $f_\vee(x,y) = f_\vee(y,x)$ y $f_\wedge(x,y) = f_\wedge(y,x)$; $f_\vee(x, f_\vee(y,z)) = f_\vee(f_\vee(x,y), z)$; y $f_\wedge(x, f_\wedge(y,z)) = f_\wedge(f_\wedge(x,y), z)$. Estas no son las únicas conectivas asociativas ya que $\leftrightarrow$ y $\nleftrightarrow$ son otros dos ejemplos (en contraste con $\rightarrow$ y $\downarrow$). En lo que concierne a $\leftrightarrow$, esto puede apreciarse fácilmente en (50):

	ϕ	ψ	χ	$\phi \leftrightarrow \psi$	$(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$	$\psi \leftrightarrow \chi$	$\phi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	0	1	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0
(50)	1	0	0	0	1	1	1
	0	1	1	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	1	0	1
	0	0	0	1	0	1	0

también mediante la figura (50) se puede probar la asociatividad de $\not\leftrightarrow$, por medio de la equivalencia de $\theta \not\leftrightarrow \theta'$ y $\neg(\theta \leftrightarrow \theta')$ y la de $\neg\theta \leftrightarrow \theta'$ y $\theta \not\leftrightarrow \theta'$ (véase ejercicio 6j). La fórmula $(\phi \not\leftrightarrow \psi) \not\leftrightarrow \chi$ es equivalente a $\neg(\phi \leftrightarrow \psi) \not\leftrightarrow \chi$ y por lo tanto también a $\neg\neg(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$ y a $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$ y en vista de la asociatividad de $\leftrightarrow$, a $\phi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$. Usando la conmutatividad de $\leftrightarrow$ y de $\not\leftrightarrow$, la fórmula $(\phi \not\leftrightarrow \psi) \not\leftrightarrow \chi$ es equivalente a $\phi \not\leftrightarrow \neg(\psi \leftrightarrow \chi)$ y, finalmente a $\phi \not\leftrightarrow (\psi \not\leftrightarrow \chi)$. Parece ahora natural dejar de lado los paréntesis en estas expresiones como lo hicimos con $\vee$ y $\wedge$ y escribir sencillamente $\phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ y $\phi \not\leftrightarrow \psi \not\leftrightarrow \chi$. Sin embargo, hay algo con lo cual se debe ser cuidadoso, nos inclinamos a leer $\phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ como ϕ *sii* ψ *y* ψ *sii* χ (en otras palabras, $\phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ sii $V(\phi) = V(\psi) = V(\chi)$) y entonces suponemos que $\models \phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ sólo en el caso de que ϕ, ψ y χ sean lógicamente equivalentes. Y también tendemos a leer $\phi \not\leftrightarrow \psi \not\leftrightarrow \chi$ como *o bien* ϕ, ψ *o bien* χ. Pero en la tabla de verdad (50) se muestra claramente que es un error considerarlo así. Lo que muestra lo anterior es que $\phi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ y $\phi \not\leftrightarrow \psi \not\leftrightarrow \chi$ son, en efecto, equivalentes. Esto demuestra también que la conjunción en el lenguaje natural *o bien* ...*o* ...*o* es esencialmente ternaria y no puede concebirse como dos aplicaciones de una conectiva veritativo-funcional binaria; esta conjunción se diferencia de la inclusiva *o* ... *o* que sí puede construirse de esta manera. De un modo análogo, puede mostrarse que *o bien*..., ..., ...*o bien* es esencialmente cuaternaria.

2.7 Conectivas coordinantes y subordinantes

Desde un punto de vista sintáctico, las conectivas de la lógica proposicional son *coordinantes*: combinan dos fórmulas en una nueva fórmula en la cual ambas desempeñan el mismo papel. También son conjunciones coordinantes las conjunciones del lenguaje natural que corresponden a la conjunción lógica y y a la disyunción lógica *o*. Pero esto no se aplica a la conjunción correspondiente a la implicación *si* (..., *entonces*) que, desde un punto de vista sintáctico, se considera *subordinante*. Junto con una oración A esta conjunción forma frases *si* A que pueden modificar a otras oraciones B para formar nuevas oraciones *si* A *entonces* B.

Hemos visto en §2.6 que las conectivas pueden interpretarse directamente por medio de funciones de verdad. Debido a ello, también resulta posible introducir conectivas subordinantes en un lenguaje proposicional. En este apartado trataremos a la implicación como conectiva subordinante y lo haremos de un modo tal que el significado de las fórmulas con implicación subordinante sea el mismo que el de las correspondientes fórmulas con implicación coordinante. La ventaja de esto es que, de este modo, logramos un mejor acuerdo entre las conjunciones del lenguaje natural y las conectivas de nuestros lenguajes lógicos.

En lo que sigue proporcionaremos una definición de los lenguajes para la lógica proposicional que, hasta un cierto punto, se aleja de la usual. Realizamos esto no sólo para introducir las conectivas subordinantes, sino también para mostrar cómo puede hacerse explícito el principio de composicionalidad del significado. Este principio puede formularse del siguiente modo: el significado de una expresión compuesta está determinado únicamente por el significado de las expresiones que la componen. Esto supone que debe haber sido especificado el significado de todas las expresiones no compuestas y que deben haber sido interpretadas las reglas sintácticas. Con esto queremos decir que debe quedar claro cómo el significado de una expresión compuesta, formada mediante cualquier regla dada, depende del significado de las expresiones a partir de las cuales ha sido formada. Ahora bien, en la sintaxis de los lenguajes de la lógica proposicional es frecuente no tratar a las conectivas como expresiones independientes, sino introducirlas sincategoremáticamente e interpretarlas contextualmente. Esto parecería ser contradictorio con el principio de composicionalidad del significado, pero no es así. Por ejemplo, el significado de la conectiva $\wedge$, tal como fue dado antes, está oculto en la regla sintáctica por medio de la cual $\wedge$ se introduce sincategoremáticamente. Se podría decir que el principio está implícitamente presente.

Puede explicitarse más el papel del principio interpretando a las conectivas en forma directa por medio de funciones de verdad. Parecería natural, pues, tratarlas también como expresiones independientes del lenguaje. Si lo hiciéramos, los lenguajes proposicionales contarían con al menos dos categorías diferentes de expresiones: conectivas y fórmulas. Sin embargo, las conectivas no forman un grupo homogéneo. La conjunción y la disyunción son binarias: unen dos fórmulas entre sí produciendo una nueva fórmula; mientras que la negación es unaria: cuando aparece delante de una fórmula simple, la transforma en otra fórmula. De este modo, tenemos tres categorías de expresiones: fórmulas, conectivas unarias y conectivas binarias. Si, además de esto, se introduce a la implicación como conectiva subordinante, entonces se origina una cuarta categoría. La implicación subordinante transforma a una fórmula en una expresión que funciona en forma similar a la negación, en el sentido que transforma a una única fórmula en otra cuando aparece delante de ella. Junto con una fórmula tal, la implicación subordinante forma una conectiva unaria compuesta. Así, en dos de estas cuatro categorías tenemos, además de expresiones básicas o no compuestas, expresiones compuestas: en la categoría de fórmulas y en la categoría de conectivas unarias.

Antes de proporcionar una definición precisa, debemos realizar un breve comentario sobre los paréntesis. En la definición 1 de §2.3, afirmamos que $(\phi \wedge \psi)$ y que $\neg\phi$ son fórmulas si ϕ y ψ también lo son y en un paso ulterior se quitaban los paréntesis. Otro método consistiría en colocar los paréntesis del siguiente modo: $(\phi)\wedge(\psi)$ y $\neg(\phi)$. Esto también garantiza la no ambigüedad de las fórmulas y, si se omiten los paréntesis alrededor de las letras proposicionales, entonces el resultado es exactamente el mismo: por ejemplo $(p \wedge q)$ se transformaría en $(p) \wedge (q)$ y después de eliminar los paréntesis obtenemos una vez más $p \wedge q$. Pero si el lenguaje se amplía agregando conectivas subordinantes, entonces este modo de utilizar los paréntesis incrementa la legibilidad.

Ahora daremos una definición alternativa para lenguajes de la lógica proposicional.

El *vocabulario* contiene, además de los paréntesis, expresiones que pueden clasificarse en las siguientes cuatro categorías:

(i) fórmulas: en esta categoría las expresiones básicas son las letras proposicionales;
(ii) conectivas unarias: la expresión básica es la negación $\neg$.
(iii) conectivas coordinantes binarias: las expresiones básicas son la conjunción $\wedge$ y la disyunción $\vee$;
(iv) conectivas subordinantes: la expresión básica es la implicación $\mapsto$.

La *sintaxis* tiene las siguientes reglas que definen cuáles son las expresiones que contienen las diferentes categorías:
(i) Una expresión básica en cualquier categoría es una expresión en esa categoría.
(ii) Si ϕ es una fórmula y $|$ es una conectiva subordinante, entonces $|(\phi)$ es una conectiva unaria.
(iii) Si ϕ es una fórmula y $+$ es una conectiva unaria, entonces $+(\phi)$ es una fórmula.
(iv) Si ϕ y ψ son fórmulas y $\circ$ es una conectiva binaria, entonces $(\phi) \circ (\psi)$ es una fórmula.
(v) Las categorías contienen sólo aquellas expresiones permitidas por un número finito de aplicaciones de las cláusulas (i)-(iv).

La cláusula (ii) nos permite construir conectivas unarias compuestas. En (51) se proporcionan algunos ejemplos de conectivas unarias:

(51)

conectiva unaria	*significado*
$\mapsto p$	si p (entonces)
$\mapsto(p \wedge q)$	si p y q (entonces)
$\neg$	no
$\mapsto(p \vee (q \wedge r))$	si p o (q y r) (entonces)
$\mapsto(\mapsto pq)$	si (q si p) (entonces)

La cláusula (iii) nos permite construir negaciones de fórmulas, como $\neg p$ y $\neg(p \wedge q)$ mediante la conectiva no compuesta $\neg$. Pero, además, también nos permite construir nuevas fórmulas por medio de las nuevas conectivas unarias compuestas. En (52) consignamos algunos ejemplos:

(52)

subordina	*significado*	*coordinante*
$\mapsto pq\ (\phi \to \chi)$	si p (entonces) q	$p \to q$
$\mapsto (p \wedge q)q$	si p y q (entonces) q	$(p \wedge q) \to q$
$\mapsto p(p \vee q)$	si p (entonces) p o q	$p \to (p \vee q)$
$\neg(\mapsto pq)$	no se da que si p(entonces) q	$\neg(p \to q)$
$(\mapsto pq) \wedge (\mapsto qp)$	si p (entonces) q y si q (entonces) p	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
$\mapsto p(\mapsto qr)$	si p (entonces) si q (entonces) r	$p \to (q \to r)$

Las fórmulas correspondientes con la conectiva coordinante $\to$ se dan en la última columna de (52).

Ahora que hemos modificado la sintaxis, debemos ajustar la semántica para adaptarla. Un prerrequisito es que las nuevas fórmulas con la forma $\mapsto(\phi)(\psi)$ deben recibir exactamente la misma interpretación que las fórmulas originales de la forma $\phi \to \psi$. De acuerdo con el principio de composicionalidad, la interpretación semántica es la siguiente: (a) se interpretan las expresiones básicas; (b) para cada cláusula sintáctica que combina expresiones entre sí (éstas son precisamente las cláusulas (ii), (iii) y (iv)), especificamos cómo se debe obtener la interpretación de la combinación a partir de las expresiones combinadas de ese modo. Dado que además de las letras proposicionales usuales, las expresiones básicas incluyen ahora a las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\mapsto$, éstas también deben interpretarse. Esto significa que una interpretación V que sirve sólo para fórmulas ya no nos servirá. Necesitamos una función de interpretación general I que en su dominio no sólo contenga fórmulas sino también conectivas básicas y compuestas.

En §2.6 cuando se mostró que las conectivas podían interpretarse directamente, se empleó implícitamente el tipo de función de interpretación que tenemos en mente. Allí, las conectivas unarias se interpretaron como funciones de verdad unarias, como funciones que toman valores de verdad como sus argumentos y arrojan valores de verdad como sus valores. Las conectivas coordinantes binarias se interpretaron como funciones de verdad binarias, funciones que admiten pares ordenados de valores de verdad como sus argumentos y que arrojan valores de verdad como sus valores. A continuación se proporcionará la interpretación que la función de interpretación I da a las expresiones básicas en estas categorías:

(53) $I(\neg) = f_{\neg}$
$I(\wedge) = f_{\wedge}$
$I(\vee) = f_{\vee}$

Las funciones de verdad $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$ están definidas como en §2.6. La función de interpretación I también funciona como una valuación, esto es, atribuye valores de verdad a las letras proposicionales. De esta manera, hemos proporcionado la interpretación de todas las expresiones básicas exceptuando a una: la conectiva subordinante $\mapsto$. Antes de discutir su interpretación, estableceremos la forma en que las interpretaciones de las totalidades formadas mediante las cláusulas sintácticas (ii) y (iv) dependen de las interpretaciones dadas a las partes mediante las cuales han sido formadas. Primero, la cláusula (iv):

(54) Si ϕ y ψ son fórmulas y $\circ$ es una conectiva binaria, entonces $I((\phi) \circ (\psi)) = I(\circ)(I(\phi), I(\psi))$.

Por ejemplo, sobre la base de (54) y (53), $I(p \wedge q) = I(\wedge)(I(p), I(q)) = f_{\wedge}(I(p), I(q))$.

La interpretación de fórmulas formadas mediante la regla (iii) es como sigue:

(55) $I(+(\phi)) = I(+)(I(\phi))$

Por ejemplo, (55) y (53) determinan que $I(\neg p) = I(\neg)(I(p)) = f_{\neg}(I(p))$.

Sin embargo, en la categoría de conectivas unarias, además de la expresión básica $\neg$ también tenemos expresiones compuestas de la forma $\mapsto(\phi)$. Estas últimas expresiones se forman mediante la cláusula sintáctica (ii) y esto nos conduce a la cuestión de la interpretación de esta regla o, para decirlo de un modo más preciso, a la cuestión de las expresiones que pueden formarse por medio de esta regla. Estas expresiones son todas conectivas unarias y, por tanto, debe proporcionárseles una interpretación semántica en tanto que funciones de verdad unarias. De acuerdo con el principio de la composicionalidad semántica, la interpretación de una expresión compuesta depende de las interpretaciones de sus expresiones componentes. Esto significa que la función de verdad unaria que es la interpretación de $\mapsto(\phi)$ debe depender de la interpretación de ϕ, esto es, del valor de verdad de ϕ. Esto nos conduce a la interpretación de $\mapsto$ misma. $I(\mapsto)$ no es en sí misma una función de verdad. Debe ser una función $g_{\mapsto}$ que proyecta valores de verdad sobre funciones de verdad unarias. Pero queremos que las fórmulas de la forma $\mapsto(\phi)(\psi)$ signifiquen lo mismo que las antiguas fórmulas de la forma $\phi \rightarrow \psi$, lo cual no nos deja muchas posibilidades para elegir la función $g_{\mapsto}$. Si el antecedente de una implicación es falso, entonces toda la implicación debe ser verdadera, con independencia de cuál sea el valor de verdad del consecuente. Y si el antecedente es verdadero, entonces el valor de verdad de toda la implicación es igual al de su consecuente. Esto significa que $g_{\mapsto}$ debe definirse del siguiente modo:

(56) $g_{\mapsto}(0) = f_1$

$g_{\mapsto}(1) = f_{id}$

f_1 y f_{id} son las siguientes funciones de verdad unarias:

(57) $f_1(0) = f_1(1) = 1$

(58) $f_{id}(0) = 0; f_{id}(1) = 1$

La interpretación de la expresión básica $\mapsto$ está dada por:

(59) $I(\mapsto) = g_{\mapsto}$

Y la interpretación de la regla sintáctica (ii) es entonces:
(60) Si ϕ es una fórmula y $|$ es una conectiva subordinante, entonces $I(|(\phi)) = I(|)(I(\phi))$.
De este modo la interpretación de la cláusula sintáctica (iii), dada en (55), ahora está completa y tenemos, por ejemplo:

$$I(\mapsto pq) = I(\mapsto p)(I(q)) = (I(\mapsto)(I(p)))(I(q)) = (g_{\mapsto}(I(p)))(I(q)).$$

Recapitularemos ahora las diversas partes de la interpretación semántica . Una interpretación es una función I tal que:

(i) (a) $I(p) = 0$ ó 1 para toda letra proposicional del vocabulario;

(b) $I(\neg) = f_{\neg}$;

(c) $I(\wedge) = f_{\wedge}$;

(d) $I(\vee) = f_{\vee}$;

(e) $I(\mapsto) = g_{\mapsto}$.

(ii) Si ϕ es una fórmula y $|$ es una conectiva subordinante, entonces $I(|(\phi)) = I(|)(I(\phi))$.

(iii) Si ϕ es una fórmula y $+$ es una conectiva unaria, entonces $I(+(\phi)) = I(+)(I(\phi))$.

(iv) Si ϕ y ψson dos fórmulas y $\circ$ es una conectiva binaria, entonces $I((\phi)\circ(\psi)) = I(\circ)(I(\phi)), (I(\psi))$.

La función de interpretación I funciona, pues, como una valuación que atribuye valores de verdad a fórmulas atómicas (cláusulas (iii) y (iv)) y a fórmulas compuestas (cláusulas (iii) y (iv)). Pero I también atribuye una interpretación a todas las otras expresiones, a las conectivas no compuestas (cláusulas (ib-e)) y a las conectivas compuestas (cláusula (ii)).

Para asegurarnos de que las fórmulas de la forma $\mapsto(\phi)(\psi)$ son de hecho interpretadas de la misma manera en que siempre lo fueron las fórmulas de la forma $\phi \rightarrow \psi$, suponemos que también está presente la conectiva binaria $\rightarrow$, siendo interpretada de acuerdo con:

(61) $I(\rightarrow) = f_{\rightarrow}$

donde $f_{\rightarrow}$ se define como en §2.6. Mostraremos ahora que para cualquier función de interpretación I tenemos que $I(\mapsto(\phi)(\psi)) = (\phi \rightarrow \psi)$. Con esta finalidad examinamos las cuatro distribuciones posibles de valores de verdad entre ϕ y ψ, asegurándonos, en cada caso, de que los valores de verdad de $\mapsto(\phi)(\psi)$ y $\phi \rightarrow \psi$ sean idénticos:

(a) Supóngase que $I(\phi) = I(\psi) = 1$:entonces $I(\phi \rightarrow \psi) = I(\rightarrow)(I(\phi), I(\psi)) = f_{\rightarrow}(1,1). = 1$; y $I(\mapsto(\phi)(\psi)) = I(\mapsto \phi), (I(\psi)) = (I(\mapsto)(I(\phi))) (I(\psi)) = (g_{\rightarrow}(1))(1) = f_{id}(1) = 1$.

(b) Supóngase que $I(\phi) = 1$ y $I(\psi) = 0$: entonces $I(\phi \rightarrow \psi) = \ldots = f_{\rightarrow}(1,0) = 0$;

y$I(\mapsto(\phi)(\psi)) = ... = (g_{\rightarrow}(1))(0) = f_{id}(0) = 0$

(c) Supóngase que $I(\phi) = 0$ y $I(\psi) = 1$: entonces $I(\phi \rightarrow \psi) = ... = f_{\rightarrow}(0, 1) = 1$;y $I(\mapsto(\phi)(\psi)) = ... = (g_{\rightarrow}(0))(I) = f_1(0) = 1$.

(d) Supóngase que $I(\phi) = 0$ y $I(\psi) = 0$: entonces $I(\phi \rightarrow \psi) = ... = f_{\rightarrow}(0,0) = 1$;y $I(\mapsto(\phi)(\psi)) = ... = (g_{\rightarrow}(0))(0) = f_1(0) = 1$

Todo esto significa que desde el punto de vista lógico no se gana ni pierde nada mediante esta forma alternativa de presentar a la lógica proposicional. Pero esto muestra que hay al menos otras formas de presentarla. Una ventaja de hacerlo de este modo es que se pueden enfatizar los paralelismos entre el lenguaje de la lógica proposicional y la sintaxis del lenguaje natural. También queda claro que otra sintaxis no conduce necesariamente a otra interpretación semántica aunque, por cierto, deberán ajustarse los detalles de la presentación semántica debido a la relación directa que hay entre la forma en que se construye una fórmula y la forma en que se construye su interpretación. Otra ventaja que no tiene mucha relación con las conectivas subordinantes y coordinantes es la siguiente: al no introducir las conectivas de forma sincategoremática sino como expresiones independientes con sus propias interpretaciones semánticas, queda expuesta en forma más clara la manera en que funciona el principio de composicionalidad.

Ejercicio 16

¿Cómo puede la conectiva binaria $\wedge$ (conjunción) ser tratada 'por pasos' de un modo similar al de la implicación?

3 Lógica de predicados

3.1 Oraciones atómicas

Un lenguaje para la lógica de predicados, en forma similar al caso anterior, consiste en constantes lógicas, variables lógicas y símbolos auxiliares. Entre las constantes lógicas están las familiares y entre los signos auxiliares también se encuentran los paréntesis, pero ambas categorías se expandirán mediante la introducción de varios símbolos nuevos. Las letras proposicionales no aparecen porque que en lógica de predicados las afirmaciones simples son sometidas a a un análisis más profundo. Las afirmaciones simples en que estamos pensando son, en primer lugar, afirmaciones individuales con una clara estructura sujeto-predicado, como:

(1) Platón es un hombre.

(2) Sócrates es mortal.

(3) La gallina está cacareando.

(4) Esta tetera gotea.

Cada una de estas oraciones tiene una parte que hace referencia a una propiedad (ser un hombre, ser mortal, estar cacareando y estar goteando) y otra parte que hace referencia a una entidad (Platón, Sócrates, la gallina y esta tetera). En efecto, en lógica de predicados tenemos *constantes* (*de individuo*) que siempre se interpretan en forma tal que hagan referencia a una entidad (esto es, un individuo o un objeto) y *constantes de predicado* o *letras de predicado* que siempre se interpretan de manera tal que hagan referencia a toda clase de propiedades que las entidades (de algún tipo particular) pueden tener o no. Nótese que las constantes de individuo y las constantes de predicado son variables *lógicas* (véase §1.3). Usaremos letras minúsculas para constantes de individuo, por el momento serán a-v (luego nos restingiremos a las letras a, b y c) y letras mayúsculas para las letras de predicado. Ambas podrán tener subíndices cuando sea necesarios. Una fórmula bien formada correspondiente a una oración puede formarse prefijando una letra de predicado a una constante. Si tenemos en mente alguna interpretación particular de las oraciones, entonces podemos escoger letras que lo sugieran. Así, por ejemplo, (1)-(4) podría representarse como H_1p_1, M_1s, Cg_1 y G_1t_1, respectivamente.

Hasta finales del siglo XIX las afirmaciones con estructura sujeto-predicado fueron las únicas afirmaciones individuales consideradas seriamente. Sin embargo, además de éstas, hay otras clases de afirmaciones individuales que, desde un punto de vista lógico, no pueden analizarse provechosamente en términos de sujeto y predicado. Un caso de este tipo lo constituyen las oraciones en las que se dice que dos entidades tienen alguna relación en particular entre sí. A continuación consignamos algunos ejemplos:

(5) Gaspar es más grande que Juan.

(6) Pedro está desplumando la gallina.

(7) Alcibíades admira a Sócrates.

Naturalmente, hay instancias en las que resulta útil distinguir el sujeto y el predicado en tales oraciones. Por ejemplo, en lingüística, (5) a menudo se analiza como consistiendo en un sujeto, *Gaspar*, y un predicado, *es más grande que Juan*. Pero, si uno está interesado en estudiar el razonamiento, entonces parece preferible otro enfoque, al menos por el momento (hay sistemas lógicos más ricos, como la lógica de orden superior con abstracción lambda [véase vol. 2], que permite un enfoque más cercano al análisis sujeto-predicado). Por ejemplo:

(8) Gaspar es más grande que Juan.
Juan es más grande que Pedro.
―――――――――――――――
Gaspar es más grande que Pedro.

Éste es un argumento válido, dado el significado de *es mayor que*. Sin embargo, si analizamos las premisas y la conclusión según el esquema sujeto-predicado, no puede mostrarse su validez , porque las premisas contendrían predicados distintos por hacer referencia a propiedades distintas. La primera premisa se traduciría como Jg, traduciendo *Gaspar* como g y la afirmación *es mayor que Juan* como J, mientras que la segunda resultaría en Pj, traduciendo *Juan* como j y *es mayor que Pedro* como P, y la conclusión sería Pg. Pero el esquema de argumento:

$$\frac{\begin{array}{l}Jg\\Pj\end{array}}{Pg}$$

no puede probarse como válido. Lo que necesitamos es un análisis de (8) que trate la relación *es más grande que* como una unidad lógica por sí misma. En efecto, hay una propiedad general de la relación *es más grande que* y que es precisamente la que hace que (8) sea válido: cuando la primera de tres cosas es mayor que la segunda y la segunda es mayor que la tercera, la primera será siempre mayor que la tercera. De manera que, para mostrar la validez de (8), necesitamos poder expresar la propiedad general *es más grande que*, e incorporarla al argumento consignado en (8) como una premisa extra (oculta) (véase §4.1). Y necesitamos además ser capaces de expresar que ésta es la relación involucrada en las premisas y en la conclusión de (8).

Por esta razón, los lenguajes de la lógica de predicados también incluyen símbolos que representan relaciones entre dos entidades. Así, las oraciones (5), (6) y (7) pueden traducirse como G_2g_2J, Dp_2g_1, y A_1a_1s, respectivamente; *ser más grande que*, *desplumar a* y *admirar a* se traducen como G, D y A, respectivamente. Ahora (8) puede transformarse en el esquema:

G_2g_2j
G_2jp_2
$\overline{G_2g_2p_2}$

Puede demostrarse que este esquema es válido, una vez que agreguemos la premisa extra antes mencionada, la cual también puede expresarse usando el aparato de la lógica de predicados. También podemos usar símbolos para relaciones entre tres entidades (como *está entre... y...*), y así sucesivamente. Todos estos símbolos se denominan constantes de predicado o letras de predicado. Cada letra de predicado tiene su propia aridad fija: hay letras de predicado unarias que representan propiedades de entidades, hay letras de predicatido binarias que representan relaciones entre pares de entidades, etc. En general pueden introducirse predicados *n*-arios para todo número entero *n* mayor que cero.

Una *oración atómica* se obtiene escribiendo *n* constantes (no necesariamente diferentes) a continuación de una letra de predicado *n*-aria. Por ejemplo, si A es una letra de predicado cuaternaria y a, b, c y d son constantes, entonces Aabcd, Adabc, Addaa y Abbbc son todas oraciones atómicas. La notación que consigna la letra de predicado delante es denominada notación prefija, al igual que en el caso de las funciones. Hay unas pocas relaciones que por convención se escriben según la notación infija, una de ellas es la relación de identidad, para la cual pronto introduciremos la constante lógica =. Escribimos a=b y no=ab.

El orden de las entidades puede marcar una diferencia para algunas relaciones: si Gaspar es más grande que Juan, entonces Juan no es más grande que Gaspar. Luego, es importante el orden en que se colocan las constantes a continuación de la letra de predicado: G_2g_2j y G_2jg_2 expresan cosas diferentes. No debe olvidarse esto cuando se escribe el diccionario para traducir oraciones del lenguaje natural: por ejemplo, (9) es insuficiente como diccionario.

(9) E: estar entre

b: Breda, t_2: Tilburg, e: Eindhoven

Este diccionario no deja claro si la fórmula Ebt_2e es el significado de la oración (10) o de la oración (11).

(10) Tilburg está entre Breda y Eindhoven.

(11) Breda está entre Tilburg y Eindhoven.

De manera que resulta evidente que debemos encontrar el modo de codificar el orden de las entidades en el diccionario de la traducción. Las *variables* son útiles para este propósito. Nos referiremos a las variables mediante x, y, z, w, y si agotamos las letras pueden agregárseles subíndices. Cuando analicemos expresiones cuantificadas veremos que las variables desempeñan un papel aún más importante. Las variables, en sí mismas carecen de significado; sólo señalan lugares en las oraciones. Podemos emplear esto al formular el diccionario de las traducciones. Sustituimos (9) por (12):

(12) Exyz: x está entre y y z.

b: Breda, t_2: Tilburg, e: Eindhoven

A diferencia de (9), (12) no presenta ambigüedad en el significado de las oraciones que pueden formarse a partir de estas letras; Ebt_1e es la traducción de (11), y Et_1be es la de (10). Los diccionarios menos explícitos correspondientes a las oraciones anteriores ahora pueden consignarse de la siguiente forma:

(13)

G_1x: gotea	j: Juan
H_1x: x es un hombre	p_1: Platón
M_1x: x es mortal	p_2: Pedro
Cx: x está cacareando	s: Sócrates
G_2xy: x es más grande que y	g_1: la gallina
Dxy: x está desplumando a y	t_1: esta tetera
A_1xy: x admira a y	g_2: Gaspar
	a_1: Alcibíades

El diccionario (13) proporciona todas las traducciones que dimos para las oraciones (1)-(7).

Ahora volveremos a E para enfatizar que las variables no tienen ningún significado en sí mismas sino que simplemente sirven como indicadores.

(14) Eyxz: y está entre x y z.

(15) Ezxy: z está entre x e y.

(16) Ezyx: z está entre y y x.

(17) Exyz: y está entre x y z.

El diccionario (14) es casi el mismo que (12): (12) y (14) proporcionan lecturas idénticas para las oraciones atómicas Ebt_1e, Et_1be, etc. Y (15) y (16) también resultan iguales como (12) y (14). Pero el diccionario (17) es esencialmente distinto dado que resulta en Ebt_1e como una traducción de (10) y en Et_1be como una traducción de (11).

Combinando el diccionario (13) con el uso de las conectivas de la lógica proposicional, podemos traducir del lenguaje natural algunas oraciones más complicadas, como puede apreciarse en (18):

(18)	*Oración*	*Traducción*
(a)	Juan es más grande que Pedro o Pedro es más grande que Juan.	$G_2jp \vee G_2pj$

(b) Si la gallina está cacareando, entonces Gaspar la está desplumando. $Cg_1 \to Dg_2g_1$

(c) Si Juan está cacareando, entonces Gaspar es más grande que Juan. $Cj \to G_2g_2j$

(d) Si Pedro admira a Gaspar, entonces no lo está desplumando. $Ap_2g_2 \to \neg Dp_2g_2$

(e) Alcibíades se admira a sí mismo. Aa_1a_1

(f) Gaspar y Juan se están desplumando mutuamente. $Dg_2j.\wedge.Djg_2$

(g) Si Sócrates es hombre, entonces él es mortal. $Hs \to M_1s$

(h) Sócrates es un hombre mortal. $Hs \wedge.M_1s$

En (18) apreciamos la forma en que pueden manejarse, en lógica de predicados, las palabras que se refieren a entidades previamente mencionadas, como los pronombres personales y reflexivos. Los pronombres posesivos son un poco más difíciles. Las expresiones que comienzan con un pronombre posesivo generalmente se refieren a un objeto en particular; siendo el contexto el que determina cuál es ese objeto. Expresiones similares a las mencionadas son las que comienzan con *el/la/lo*, *este/esta*, etc.. Por ahora, todas las expresiones de este tipo serán traducidas como constantes de individo sin someterlas a un análisis posterior. En §5.2, cuando nos ocupemos de las llamadas *descripciones definidas*, diremos algo más acerca de estas expresiones.

Las oraciones (b), (d) y (g) de (18), ciertamente admiten lecturas en las que las traducciones dadas son incorrectas, ya que pueden pensarse contextos en los cuales *la*, *lo* y *él* refieran a entidades distintas de *la gallina*, *Gaspar* y *Socrátes*. Al traducir estas oraciones sencillamente elegimos la interpretación más natural.
A diferencia de la teoría de los tipos que discutiremos en el volumen 2, la lógica de predicados no nos permite distinguir entre (18e) y *Alcibíades admira a Alcibíades*. Tampoco pueden distinguirse las oraciones (19) y (20):

(19) Si Onno molesta a Pedro, entonces le odia.

(20) Si Onno molesta a Pedro, entonces Onno odia a Pedro.

Ambos (19) y (20), dado el diccionario obvio, se traducen como $M_2op_2 \to A_2op_2$.
Nótese que la oración simple (18h) se ha traducido como la conjunción de dos oraciones atómicas.De esta forma, se han explicitado lo más posible las propiedades lógicas de la oración, siendo éste el objetivo de toda traducción. Lógicamente hablando, la oración (18h) expresa dos características de Sócrates: que es un hombre y que es mortal.

Ejercicio 1

Traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados. Preserve lo máximo posible de su estructura y consigne en cada caso el diccionario.
a. Juan es más agradable que Pedro.

b. Carlos es agradable, pero Elsa no lo es.
c. Pedro se fue con Carlos en la nueva bicicleta de María a Zandvoort.
d. Si Pedro no oyó las novedades por boca de Carlos, las oyó por boca de Elsa.
e. Carlos es aburrido o irritante.
f. María es una mujer feliz.
g. Bee es el autor más vendido.
h. Carlos y Elsa son hermanos o primos.
i. Juan y Pedro son amigos íntimos.
j. Si Juan arriesga, entonces se lastimará a sí mismo.
l. A pesar de que Juan y María se aman profundamente, se hacen infelices mutuamente.

3.2 Expresiones cuantificadoras: cuantificadores

La lógica de predicados no se ocupa solamente de las conectivas sino que también se ocupa de las expresiones cuantificadoras. Considérese una oración como:

(21) Todos los maestros son tolerantes.

Aristóteles consideraba a oraciones de este tipo como una relación entre dos predicados: en este caso entre *ser un maestro* y *ser tolerante*. Distinguió cuatro modos diferentes de relacionar dos predicados A y B. Además de *todos los A son B* de la cual (21) es una instancia, distinguió *algunos A son B*, *todos los A son no-B* y *algunos A son no-B*.

Si se toman en cuenta solamente propiedades, entonces esto funciona bastante bien. Pero tan pronto como uno avanza de los predicados a las relaciones, y de cuantificaciones simples a oraciones que tengan más de una expresión cuantificadora, las cosas se complican. No sería fácil determinar el tipo de relación expresada por la oración (22) entre la relación de *admirar a* y la gente acerca de la que se habla.

(22) Todos admiran a alguien.

Y aun cuando esta oración pueda manejarse de algún modo, hay otras aún más complejas, como (23) y (24):

(23) Todos admiran a alguien que admira a todos.

(24) Nadie admira a alguien que admira a todos los que admiran a alguien

Parecería que necesitamos un principio general que nos permita analizar el papel de las expresiones cuantificadas.

Examinaremos primero oraciones en las que aparece solamente un predicado.

(25) Pedro es tolerante.

(26) Nadie es tolerante.

Traducimos (25) como Vp: de la entidad a la cual nos referimos con p se dice que posee la propiedad a la cual nos referimos con V. Ahora no sería correcto tratar a

(26) del mismo modo, usando una constante *n* para la x de Vx. Simplemente no existe alguien llamado *nadie* del cual podamos decir, verdadera o falsamente, que es tolerante. No pueden abordarse del mismo modo expresiones cuya función semántica es tan diferente como *Pedro* y *nadie*. De hecho las características sintácticas de *Pedro* y *nadie* tampoco son completamente iguales en el lenguaje natural. Compárese, por ejemplo, las frases *ninguno de ustedes* y *Pedro de ustedes* o *nadie excepto Juan* y *Pedro excepto Juan*.

En (25) se dice de Pedro que tiene una propiedad en particular. Podríamos también dar vuelta las cosas y decir que el predicado *tolerante* tiene la propiedad de aplicarse a Pedro. En lógica de predicados las cosas no se hacen de este modo, pero hay sistemas lógicos más ricos que funcionan de esta manera. Estos últimos pueden ser ventajosos para el análisis del lenguaje natural (véase vol. 2). En el tratamiento de (26) parece más natural dar vuelta las cosas, dado que no hay nadie a quien se le atribuye la propiedad de ser tolerante, y será mejor decir entonces que esta oración afirma algo acerca de la propiedad *tolerante*, a saber, que no se aplica a ninguna de las entidades a la cuales podría en principio aplicarse. Igualmente, en una oración como

(27) Alguien es tolerante.

se afirma algo acerca de la propiedad *tolerante*, a saber, que entre las entidades a las cuales en principio podría aplicarse, hay al menos una a la que se le aplica de hecho. En lugar de tener que decir *las entidades a las cuales en principio se le podrían aplicar los predicados*, podemos facilitarnos las cosas denominando colectivamente a estas entidades el *universo de discurso*. Este contiene todas las cosas de las cuales estamos hablando en algún momento dado del tiempo. La oración

(28) Todos son tolerantes.

puede ser parafraseada con esta terminología como: cada entidad del dominio de discurso tiene la propiedad *tolerante*. En este caso, el dominio está constituido por todos los seres humanos, o algún grupo más pequeño de seres humanos que se fija en el contexto en el que aparece la oración. Nótese que la elección del dominio puede afectar los valores de verdad de las oraciones. Es altamente probable que la oración (28) no sea verdadera si incluimos a todos los seres humanos en nuestro dominio de discurso, pero hay ciertamente grupos más pequeños de seres humanos para los cuales (28) es verdadera.

Introduciremos dos nuevos símbolos en el lenguaje formal, el *cuantificador universal* $\forall$ y el *cuantificador existencial* $\exists$. Cada cuantificador aparece siempre junto con una variable. Es conveniente referirse a esta combinación de un cuantificador más una variable (por ejemplo, $\forall x$ o $\exists x$) como a un cuantificador (universal o existencial). $\forall x$... significa: para toda entidad x del dominio tenemos...; y $\exists x$... significa: existe al menos una entidad del dominio tal que...; $\forall x\phi$ se denomina la *generalización universal* de ϕ, y $\exists x\phi$ su *generalización existencial*.

Ahora estamos en condiciones de traducir (28) como $\forall xVx$ (o, de un modo equivalente, como $\forall yVy$ o $\forall zVz$, dado que las variables en sí mismas no tienen significado), y podemos traducir (27) como $\exists xVx$ (o como $\exists yVy$ o $\exists zVz$), y (26) como $\neg\exists xVx$ y *todos son intolerantes* como $\forall x\neg Vx$.

Bajo esta interpretación *nadie es tolerante* y *todos son intolerantes* resultan tener el mismo significado, dado que $\neg\exists xVx$ y $\forall x\neg Vx$ son oraciones equivalentes en lógica de predicados. Más tarde este análisis de *todos* y *algunos* resultará ser un poco simplista, pero es suficiente para los casos que acabamos de discutir.

Ahora construiremos en varios pasos las traducción de (22), un ejemplo de una oración que contiene dos expresiones cuantificadoras. Utilizamos el diccionario:

(29) Axy: x admira a y.

Reemplazamos la x en *x admira a y* por *Platón* y así obtenemos una *función proposicional*:

(30) Platón admira a y.

Esto podría traducirse como Apy y expresa la propiedad de *ser admirado por Platón*. Si deseamos decir que alguien tiene esa propiedad, podemos traducir

(31) Platón admira a alguien.

como $\exists yApy$. Reemplazando *Platón* por *x* en (31), obtenemos la función proposicional

(32) x admira a alguien.

Esto nuevamente expresa una propiedad, a saber, la de *admirar a alguien* y sería traducida como $\exists yAxy$. Finalmente, cuantificando universalmente esta fórmula obtenemos la fórmula $\forall x\exists yAxy$, la cual expresa que todos los elementos del dominio tienen la propiedad expresada por (32). Así $\forall x\exists yAxy$ servirá como una traducción de (22). Será mejor ocuparnos de (23) y (24) luego de que hayamos tratado la noción de *fórmulas de la lógica de predicados*.

Primero discutiremos cómo pueden representarse mediante cuantificadores las cuatro fórmulas distinguidas por Aristóteles Las siguientes oraciones puede formarse con *maestros* y *tolerantes* ((33) = (21))

(33) Todos los maestros son tolerantes.

(34) Algunos maestros son tolerantes.

(35) Todos los maestros son intolerantes.

(36) Algunos maestros son intolerantes.

La implicación material, como ya podría sospecharlo el lector teniendo en cuenta lo que fue dicho cuando fue introducida por primera vez, es bastante útil para traducir

(33). En efecto, si (33) es verdadera, entonces (independientemente de) lo que haga Pedro para vivir, podemos estar bastante seguros de que (37) es verdadera.

(37) Si Pedro es un maestro, entonces Pedro es tolerante.

En (37) el *si...entonces* es entendido como una implicación material. Esto puede apreciarse en forma sencilla. Si él es maestro, entonces, suponiendo que (33) es verdadera, él también deberá ser tolerante, de manera que (37) es verdadera. Y si él no es maestro, entonces de acuerdo con la tabla de verdad, (37) deberá ser también verdadera, sea o no sea tolerante.

Si, por otra parte, (33) no es verdadera, entonces debe haber al menos un maestro intolerante, por ejemplo Juan, y entonces (38) es falsa.

(38) Si Juan es maestro, entonces Juan es tolerante.

Debería ahora estar claro que (33) es verdadera sólo en el caso que para toda persona x, si x es maestro, entonces x es tolerante. Esto significa que ahora tenemos la siguiente traducción para (33):

(39) $\forall x(Mx \rightarrow Tx)$

A esta altura debemos advertir al lector que (39) también sería verdadera si no hubiese ningún maestro. Esto no concuerda con lo que ha dicho Aristóteles acerca de este tema, dado que él opinaba que *todos los A son B* implica que existe al menos algún A. El admitía sólo 'términos' no vacíos en sus silogismos.

La oración (34) se traduciría a la lógica de predicados como (40):

(40) $\exists x(Mx \wedge.Tx)$

La traducción (40) es verdadera si y sólo si hay al menos una persona en el dominio que es maestro y que es tolerante. Al traducir (34) como (40) parecerían haberse perdido algunos matices; (34) parecería decir que hay más de un maestro tolerante, mientras que todo lo que se necesita para que (40) sea verdadera es un único maestro tolerante. Además, como resultado de la conmutatividad de $\wedge$, (40) significa lo mismo que (41), que es la traducción de (42):

(41) $\exists x(Mx \wedge Tx)$

(42) Algunas personas tolerantes son maestros.

Puede argumentarse que no es realista ignorar la asimetría que está presente en el lenguaje natural. Pero, para nuestros propósitos, esta traducción de (34) será suficiente. En §3.7 veremos que es posible expresar el hecho de que haya varios maestros tolerantes introduciendo la relación de identidad. Las oraciones (35) y (36) ahora no presentan problemas; (36) puede ser transformada en (43), mientras que (35) se tranforma en (44).

(43) $\exists x(Mx \wedge \neg Tx)$

(44) $\forall x(Mx \rightarrow \neg Tx)$

Las oraciones (45) y (46) significan lo mismo que (35), y ambas pueden ser traducidas como (47):

(45) Ningún maestro es tolerante.

(46) No se da el caso que algunos maestros son tolerantes.

(47) $\neg\exists x(Mx \wedge Tx)$

En efecto la formulación precisa de la semántica de la lógica de predicados es tal que (44) y (47) son equivalentes. Las definiciones de los cuantificadores son tales que $\forall x\neg\phi$ significa lo mismo que $\neg\exists x\phi$. Esto se refleja en el hecho que (48) y (49) tienen el mismo significado:

(48) Todos son intolerantes.

(49) Nadie es tolerante.

Esto significa que (47) debe ser equivalente a $\forall x\neg(Mx \wedge Tx)$. Y de acuerdo con la lógica proposicional, esta fórmula debe una vez más ser equivalente a (44), dado que $\neg(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $\phi \rightarrow \neg\psi$.

Ejercicio 2

Traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados. Preserve lo máximo posible de su estructura, y consigne en cada caso el diccionario y el dominio de discurso.

a. Todos aman a María.
b. Algunos políticos son honestos.
c. Nadie es un político y no es ambicioso.
d. No se da el caso que todas las personas ambiciosas no sean honestas.
e. Todos los autores rubios son inteligentes.
f. Algunos de los autores más vendidos son ciegos.
g. Pedro es un autor que ha escrito algunos de los libros más vendidos.

3.3 Fórmulas

Al definir las fórmulas de la lógica de predicados surgen ciertos problemas que no se plantearon con la lógica proposicional. En primer lugar, es deseable que las nociones de oración y fórmula no coincidan. Esperamos tener dos tipos de fórmulas: las que expresan proposiciones, a las cuales podemos llamar oraciones, y las que expresan propiedades o relaciones, a las cuales podemos llamar funciones proposicionales. Por tanto, daremos primero una definición general de fórmula y luego distinguiremos fórmulas que son oraciones.

Otra cuestión es que no resulta tan obvio como en lógica proposicional cuáles expresiones deben aceptarse como fórmulas. Si A y B son letras de predicado unarias, entonces $\forall xAx$, $\forall y(Ay \rightarrow By)$ y $Ax \wedge By$ son claramente el tipo de expresiones que esperamos tener entre las fórmulas. Pero ¿qué sucede con $\forall xAy$ y $\forall x(Ax \wedge \exists xBx)$? Un factor decisivo para elegir una definición es la simplicidad. Una definición simple hace más fácil pensar acerca de fórmulas en general y facilita la formulación de afirmaciones generales acerca de ellas. Si ϕ es una fórmula, simplemente elegimos aceptar a $\forall x\phi$ y a $\exists x\phi$ también como fórmulas. Veremos que la eventualidad de que la variable x no aparezca en ϕ no causa ninguna complicación en la interpretación de $\forall x\phi$ y $\exists x\phi$: $\forall xAy$ tiene la misma interpretación que Ay y lo mismo se aplica a $\exists xAy$. De la misma manera $\forall x(Ax \wedge \exists xBx)$ recibe la misma interpretación que $\forall x(Ax \wedge \exists yBy)$. Veremos que todas las fórmulas que pueden ser reconocidas como tales admiten interpretación. Esto es de una importancia teórica fundamental. Cuando traducimos fórmulas del lenguaje natural a la lógica de predicados, debemos esforzarnos por obtener fórmulas que sean lo más fácil posible de leer.

Cada lenguaje L de la lógica de predicados tiene su propia provisión de constantes y letras de predicado. Cada una de estas letras de predicado tiene su propia aridad fija. Además, hay también símbolos que comparten todos los lenguajes de la lógica de predicados: las conectivas, los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, los paréntesis como signos auxiliares y una provisión infinita de variables. Por supuesto que cualquier fórmula dada puede contener un número finito de estas últimas, pero no deseamos poner un límite superior a la longitud de las fórmulas, y por lo tanto, tampoco podemos poner un límite superior finito al número de variables. , Todos estos símbolos forman conjuntamente el *vocabulario* de L. Dado ya el vocabulario, definiremos las fórmulas del lenguaje L como sigue (compárese con la definición 1 en §2.3):

Definición 1

(i) Si A es una letra de predicado *n*-aria del vocabulario de L, y cada $t_1,...,t_n$ es una constante o una variable del vocabulario de L, entonces $At_1,...,t_n$ es una fórmula de L.

(ii) Si ϕ es una fórmula de L, entonces $\neg\phi$ también lo es.

(iii) Si ϕ y ψ son fórmulas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ también lo son.

(iv) Si ϕ es una fórmula de L y x es una variable, entonces $\forall x\phi$ y $\exists x\phi$ son fórmulas de L.

(v) Sólo las expresiones que pueden generarse a partir de las cláusulas (i)-(iv) en un número finito de pasos son fórmulas de L.

La cláusula (i) produce *fórmulas atómicas*. Estas fórmulas son del tipo Bxyz, Mp y Apx. Las fórmulas formadas de acuerdo a (iv) se denominan fórmulas *universales* y *existenciales*, respectivamente.

Al igual que en lógica proposicional, eliminaremos los paréntesis exteriores de las fórmulas y hablaremos simplemente acerca de fórmulas de la lógica de predicados sin importar cuál sea el lenguaje L específico con el que estamos trabajando. Aquí también hay un árbol constructivo característico asociado a cada fórmula. La fórmula (51), por ejemplo, tiene el árbol constructivo representado en la figura (50):

(50)

$\neg\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$ (ii)

|

$\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$ (iv, $\exists$)

|

$\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$ (iv, $\exists$)

|

$\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy$ (iii, $\wedge$)

/ \

$\forall z(\exists wAzw \to Ayz)$ (iv, $\forall$) $\qquad$ Axy (i)

|

$\exists wAzw \to Ayz$ (iii, $\to$)

/ \

$\exists wAzw$ (iv, $\exists$) $\qquad$ Ayz (i)

|

Azw (i)

(51) $\neg\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$

Puede agregarse el siguiente árbol (figura (52)) para mostrar la manera en que se construyeron las fórmulas atómicas que aparecen en (50) a partir de letras de predicados, variables y constantes:

(52)

Axy (i)

/ | \

A $\quad$ x $\quad$ y

Sin embargo, estos detalles son innecesarios para nuestros propósitos. Al igual que en lógica proposicional, las subfórmulas de una fórmula son aquellas fórmulas que aparecen en su árbol constructivo. Por ejemplo, la fórmula (51) tiene como subfórmulas a $\neg\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$, $\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$, $\exists y(\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy)$, $\forall z(\exists wAzw \to Ayz) \wedge Axy$, $\forall z(\exists wAzw \to Ayz)$, Axy, $\exists wAzw \to Ayz$, $\exists wAzw$, Azw y Ayz. Y, al igual que en lógica proposicional, puede mostrarse que las subfórmulas de una fórmula ϕ son sólo aquellas cadenas de símbolos consecutivos tomadas de ϕ que son fórmulas por sí mismas.

Para poder decidir qué fórmulas serán denominadas oraciones, pero también y en primer lugar, para poder interpretar fórmulas, es esencial poder identificar la parte de la fórmula que esté regida por el cuantificador que aparezca en dicha fórmula. Nos ocuparemos de esto en las próximas definiciones.

Definición 2

> Si $\forall x\psi$ es una subfórmula de ϕ, entonces ψ es denominado el *alcance* de esta aparición particular del cuantificador $\forall x$ en ϕ. Lo mismo se aplica a las apariciones del cuantificador $\exists x$.

Como primer ejemplo, en (53) se consigna el alcance de los cuantificadores que aparecen en (51):

(53)

Cuantificador	*Alcance*
$\exists w$	Azw
$\forall z$	$\exists wAzw \rightarrow Ayz$
$\exists y$	$\forall z(\exists wAzw \rightarrow Ayz) \wedge Axy)$
$\exists x$	$\exists y(\forall z(\exists wAzw \rightarrow Ayz) \wedge Axy)$

En la definición 2 distinguimos las *apariciones* diferentes de un mismo cuantificador debido a que existen fórmulas como (54):

(54) $\forall xAx \wedge \forall xBx$

En la definición (54) un mismo cuantificador aparece más de una vez. El alcance de la primera aparición de $\forall x$ en (54) es Ax, mientras que el de la segunda aparición es Bx. Esto significa que la primera aparición de $\forall x$ rige sólo la x de Ax, mientras que la segunda aparición rige la x de Bx. Incorporaremos esta distinción en la siguiente definición general:

Definición 3

> (a) Se dice que una aparición de una variable x en la fórmula ϕ (que no es parte de un cuantificador) está *libre en* ϕ si esa aparición de x no cae dentro del alcance de un cuantificador $\forall x$ o de un cuantificador $\exists x$ que aparece en ϕ.
>
> (b) Si $\forall x\psi$ (o $\exists x\psi$) es una subfórmula de ϕ y x está libre en ψ, entonces se dice que esta aparición de x está *ligada* por el cuantificador $\forall x$ (o $\exists x$).

Quedará en claro que una aparición de una variable x en una fórmula o bien está libre o bien está ligada por un cuantificador $\forall x$ (o $\exists x$).

La definición 3 puede parecer un poco más complicada de lo necesario, y esto se debe a que aceptamos fórmulas tales como $\forall x(Ax \wedge \exists xBx)$. En esta fórmula la x en Bx está ligada por $\exists x$, mientras que la x en Ax está ligada por $\forall x$. De acuerdo con la definición 2, la x en Bx también aparece dentro del alcance de $\forall x$. Pero, según la cláusula (b) de la definición 3, esta aparición de x no está ligada por $\forall x$ porque no está libre en $Ax \wedge \exists xBx$, el alcance de $\forall x$. En la práctica trataremos de evitar que aparezcan variables ligadas en el alcance de cuantificadores que tengan la misma variable, pero la definición 1 no las excluye. La otra fórmula extraña que hemos mencionado, $\forall xAy$, tiene la peculiaridad de que el cuantificador $\forall x$ no liga ninguna variable. También intentaremos evitar este tipo de fórmulas, pero la definición 1 tampoco las excluye.

Ahora podemos definir el significado de *oración* en lógica de predicados:

Definición 4

Una *oracion* es una fórmula de L que carece de variables libres.

Por ejemplo, $\forall xAy$ no es una oración porque la aparición de la variable y está libre; $\forall x(Ax \wedge \exists xBx)$ es una oración, pero $Ax \wedge \exists xBx$ no lo es, dado que x está libre en su primer aparición.

Ejercicio 3

Para cada una de las siguientes fórmulas del cálculo de predicados, indique:
(a) si es una negación, una conjunción, una disyunción, una implicación, una fórmula universal o una fórmula existencial;
(b) el alcance de los cuantificadores;
(c) las variables libres;
(d) si es una oración.

(i) $\exists x(Axy \wedge Bx)$
(ii) $\exists xAxy \wedge Bx$
(iii) $\exists x\exists yAxy \rightarrow Bx$
(iv) $\exists x(\exists yAxy \rightarrow Bx)$
(v) $\neg\exists x\exists yAxy \rightarrow Bx$
(vi) $\forall x\neg\exists yAxy$
(vii) $\neg Bx \rightarrow (\neg\forall y(\neg Axy \vee Bx) \rightarrow Cy)$
(viii) $\exists x(Axy \vee By)$
(ix) $\exists xAxx \vee \exists yBy$
(x) $\exists x(\exists yAxy \vee By)$
(xi) $\forall x\forall y((Axy \wedge By) \rightarrow \exists wCxw)$
(xii) $\forall x(\forall yAyx \rightarrow By)$
(xiii) $\forall x\forall yAyy \rightarrow Bx$

Como ya lo hemos mencionado, una fórmula con variables libres se denomina *función proposicional*. Si tomamos la fórmula $Tx \rightarrow Fx$, cuya única variable x está libre, reemplazamos x por la constante j, entonces obtenemos una oración, a saber $Tj \rightarrow Fj$.Luego, $Tx \rightarrow Fx$ puede ciertamente considerarse como una función: tiene como dominio a las constantes del lenguaje L con el que estamos trabajando, y a las oraciones de L como su rango. Si c es una constante, entonces el valor de la función proposicional $Tx \rightarrow Fx$, tomando a c como su argumento, es la oración $Tc \rightarrow Fc$. Análogamente, la función correspondiente a una fórmula con dos variables libres es binaria. Por ejemplo, la fórmula (55), que es la traducción de *y admira a todos aquellos a los que x admira*, tiene como valor a la oración (56) cuando toma por argumentos a p y a j:

(55) $\forall z(Axz \rightarrow Ayz)$

(56) $\forall z(Apz \rightarrow Ajz)$

(56) es la traducción de *Juan admira a todos aquellos que Pedro admira*. En relación con esto, la siguiente notación a menudo es útil. Si ϕ es una fórmula, c es una constante y x es una variable, entonces $[c/x]\phi$ es la fórmula que resulta cuando

todas las apariciones libres de x en ϕ se reemplazan por apariciones de c. Los ejemplos de la tabla (57) deberían ayudar a que esto quede claro. Las fórmulas $[y/x]\phi$ y $[x/c]\phi$ pueden definirse exactamente del mismo modo.

(57)

ϕ	$[c/x]\phi$
Axy	Acy
Axx	Acc
$\forall xAxx$	$\forall xAxx$
Ay	Ay
Acx	Acc
$Axx \wedge \exists xBx$	$Acc \wedge \exists xBx$
$\forall xBy$	$\forall xBy$
$\exists x\exists yAxy \rightarrow Bx$	$\exists x\exists yAxy \rightarrow Bc$
$\forall x\forall yAyy \rightarrow Bx$	$\forall x\forall yAyy \rightarrow Bc$

Ejercicio 4

La *profundidad cuantificacional* de una fórmula de la lógica de predicados es la longitud máxima de un anidamiento de cuantificadores $Q_1x(\ldots(Q_2y(\ldots(Q_3z$ que aparecen en ésta. Por ejemplo, tanto $\exists x\forall yRxy$ como $\exists x(\forall yRxy \wedge \exists zSxz)$ tienen profundidad 2. Dé una definición precisa de esta noción empleando la definición inductiva de fórmulas.

3.4 Algunas otras expresiones cuantificadoras y sus traducciones

Además de las expresiones *todos*, *alguien*, *algunos*, *ninguno* y *nadie* que ya se han discutido, hay otras expresiones cuantificadoras cuya traducción a la lógica de predicados es relativamente sencilla. Para comenzar, *cualquier* y *cada* (*uno*) pueden ser tratadas como *todos*, mientras que *unos pocos*, y *uno o más* y *al menos uno*, y *existe*, y *hay* y *ciertos* pueden ser tratadas como *algunos*. También pueden proporcionarse traducciones para *toda* (*cosa*), *algo*, *nada*. A continuación presentamos algunos ejemplos:

(58) Toda cosa está expuesta al deterioro.

Traducción: $\forall xVx$

Diccionario: Vx: x está expuesto al deterioro.

Dominio: Todas las cosas de la tierra.

(59) Juan le dio algo a Pedro.

Traducción: $\exists x(Cx \wedge Djxp)$

Diccionario: Cx: x es una cosa; Dxyz: x da y a z

Dominio: las personas y las cosas.

La traducción de (59) es quizás un poco más complicada de lo que pareciera ser necesario; sin embargo, con un dominio que contiene tanto cosas como personas $\exists x Djxp$ podría ser nuevamente traducida al español como: Juan le dio alguien o algo a Pedro. Decimos que el cuantificador $\exists x$ *está restringido a* C en $\exists x(Cx \wedge Djxp)$. Supóngase que deseamos traducir una oración como:

(60) Todos le dieron algo a Pedro.

Entonces estos problemas son aun más apremiantes. Esto no puede traducirse como $\forall y \exists x(Cx \wedge Dyxp)$, dado que significaría: Toda persona y toda cosa le dieron al menos una cosa a Pedro. El cuantificador $\forall y$ debe también restringirse, en este caso a P (diccionario: P: x es una persona). Obtenemos ahora:

(61) $\forall y(Py \rightarrow \exists x(Cx \wedge Dyxp))$

Cuando un cuantificador $\exists x$ está restringido a A, se convierte en $\exists x(Ax \wedge$; y un cuantificador $\forall x$ se convierte en $\forall x(Ax \rightarrow$Las razones de esto fueron explicadas en la discusión acerca de *todos* y *algunos*. La oración (61) también sirve como una traducción de:

(62) Todas las personas dieron a Pedro una o más cosas.

A continuación proporcionamos un ejemplo con *nada*:

(63) Juan no le dio nada a Pedro.

La oración (63) puede tomarse por la negación de (59) y, por tanto, puede ser traducida como:

$\neg\exists x (Cx \wedge Djxp)$.

El cuantificador existencial es especialmente adecuado para una traducción de la expresión *un(a)* del español.

(64) Juan le dio un libro a Pedro.

La oración (64), por ejemplo, puede traducirse como $\exists x(Lx \wedge Djxp)$ agregando al diccionario Lx: x es un libro. Esto muestra que $\exists x(Cx \wedge Djxp)$ puede también funcionar como una traducción de

(65) Juan le dio una cosa a Pedro.

Esto significa que la oración *Juan dio un libro a Pedro* será verdadera en el caso que *Juan dio al menos un libro a Pedro* lo sea. En *Juan dio un libro a Pedro* existe la fuerte sugerencia de que exactamente un libro ha cambiado de manos; pero esta sugerencia está ausente, por ejemplo, en (66) y (67).

(66) ¿Tienes una lapicera?

(67) Él tiene un amigo que puede lograrlo.

Concluimos que, semánticamente hablando, el cuantificador existencial es una traducción adecuada para el artículo indefinido. Nótese que hay un uso en el que *un(a)* significa algo totalmente distinto:

(68) Una ballena es un mamífero.

La oración (68) significa lo mismo que *toda ballena es un mamífero* y, por ende, debe traducirse como $\forall x(Bx \rightarrow Mx)$, con Bx: x es una ballena, Mx: x es un mamífero como diccionario, y todas las criaturas vivientes como su dominio. Esto se denomina el uso genérico del artículo indefinido *un(a)*.

No todas las expresiones cuantificadoras pueden traducirse a la lógica de predicados. Las expresiones cuantificadoras *muchos* y *la mayoría* son casos de este tipo. Por otro lado, a menudo pueden traducirse las cláusulas subordinadas con *quien* o *que*. Los siguientes son ejemplos con *quien*:

(69) Quien llega tarde debe ser castigado.

Traducción: $\forall x\,(Tx \rightarrow Cx)$

Diccionario: Tx: x llega tarde; Cx: x debe ser castigado.

Dominio: personas.

(70) Quienes sean niños y lleguen tarde deben ser castigados.

Traducción: $\forall x\,((Nx \wedge Tx) \rightarrow Cx))$ o $\forall x\,(Nx \rightarrow (Tx \rightarrow Cx))$, dada la equivalencia de $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ y $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (ver ejercicio 6 en 2.5)

Debe agregarse al diccionario Nx: x es un niño.

El *quien* que aparece en (69) puede reemplazarse, sin alterar el significado, por *alguien que*, como puede apreciarse comparando (69) con (71):

(71) Alguien que llega tarde debe ser castigado.

No debe confundirse esto con

(72) Alguien, que llega tarde, debe ser castigado.

Las oraciones (71) y (69) son sinónimas; (71) y (72) no lo son. En (71) dado que *alguien* tiene la cláusula restrictiva *que llega tarde*, la expresión *alguien* debe traducirse como un cuantificador universal; mientras que debido a que en (72) la expresión *alguien* tiene una cláusula relativa en aposición, *que llega tarde*, la misma debe traducirse como un cuantificador existencial, como se lo hace habitualmente. La oración (71) se traduce, pues, como $\forall x(Tx \rightarrow Cx)$, mientras que (72) se traduce como $\exists x\,(Tx \wedge Cx)$.

Al combinar los pronombres personales y reflexivos con expresiones cuantificadoras se abren posibilidades interesantes. La siguiente oración es un ejemplo de ello:

(73) Todos se admiran a sí mismos.

La oración (73) puede traducirse como $\forall xAxx$ si el dominio contiene sólo seres humanos, mientras que $\forall x(Hx \rightarrow Axx)$ es la traducción para cualquier dominio mixto.

(74) Juan tiene un gato al cual mima.

Traducción: $\exists x (Tjx \wedge Gx \wedge Mjx)$.

Diccionario: Txy: x tiene y; Gx: x es un gato; Mxy: x mima a y.

Dominio: seres humanos y animales.

(75) Todo hombre que visita Nueva York gusta de ella.

Traducción: $\forall x((Hx \wedge Vxn) \rightarrow Gxn)$

Diccionario: Hx: x es un ser humano; Vxy: x visita y; Gxy: x gusta de y.

Dominio: seres humanos y ciudades.

(76) Quien desee mucho algo lo obtendrá.

La oración (76) se complica porque *lo* refiere a la expresión cuantificadora *algo* que le precede. Si sencillamente traducimos la expresión *algo* como cuantificador existencial, obtenemos la siguiente traducción incorrecta:

(77) $\forall x((Px \wedge \exists y(Cy \wedge Dxy)) \rightarrow Oxy)$

Diccionario:Px: x es una persona; Cx: x es una cosa;

Dxy: x desea mucho y; Oxy: x obtendrá y.

Dominio: personas y cosas.

Esta traducción no es correcta, puesto que Oxy no cae bajo el alcance de $\exists y$, por ende, y en Oxy está libre. Cambiar (77) por (78):

(78) $\forall x(Px \wedge \exists y(Cy \wedge (Dxy \rightarrow Oxy))$

tampoco nos ayudará demasiado, porque (78) expresa que para cada persona hay algo que tiene una propiedad determinada, y esto no es en absoluto lo que dice (76). La solución es cambiar (76) por

(79) Para toda persona x y para toda cosa y, si x desea mucho a y, entonces x obtendrá y.

Lo cual puede traducirse a la lógica de predicados como

(80) $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Cy \rightarrow (Dxy \rightarrow Oxy)))$

Las oraciones (81) y (82) son dos traducciones equivalentes a (80):

(81) $\forall x \forall y((Px \wedge Cy \wedge Dxy) \rightarrow Oxy)$

(82) $\forall y(Cy \rightarrow \forall x (Px \rightarrow (Dxy \rightarrow Oxy)))$

En realidad, aun no sabemos oficialmente lo que significa *equivalencia* en lógica de predicados; abordaremos eso recién en §3.6.4. Por ende, estrictamente hablando, todavía no estamos autorizados para dejar de lado los paréntesis y escribir $(Px \wedge Cy \wedge Dxy)$ como lo hicimos en (81). Podremos hacerlo más adelante. A modo de conclusión, retomemos (83) y (84) (= 23) y (24)):

(83) Todos admiran a alguien que admira a todos.

(84) Nadie admira a alguien que admira a todos los que admiran a alguien.

La lectura más natural de (83) es (85):

(85) Todos admiran al menos a una persona que admira a todos.

La traducción de (85) se ensambla en la siguiente forma 'modular':

y admira a todos: $\forall zAyz$;

x admira a y e y admira a todos: $Axy \wedge \forall zAyz$;

hay al menos un y a quien x admira; e y admira a todos: $\exists y(Axy \wedge \forall zAyz)$.

para todo x hay al menos un y a quien x admira; e y admira a todos: $\forall x\exists y(Axy \wedge \forall zAyz)$.

Como primer paso para obtener una lectura más natural de (84), traducimos la frase *y admira a todos los que admiran a alguien* como $\forall z(\exists wAzw \rightarrow Ayz)$. Luego advertimos que (84) equivale a negar la existencia de un x y de un y tales que simultáneamente se cumpla que *x admira a y* y que *y admira a todos los que admiran a alguien*. Luego, la fórmula $\neg\exists x\exists y(\forall z(\exists wAzw \wedge Ayz) \wedge Axy)$ es una traducción adecuada. Esta fórmula fue consignada previamente como (51), y su árbol constructivo fue analizado en la figura (50).

Quizás sea innecesario puntualizar que esta traducción no pretende hacer justicia a la forma gramatical de las oraciones. El problema de la relación entre forma gramatical y forma lógica se discutirá extensamente en el volumen 2.

Ejercicio 5

Traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados. Preserve lo máximo posible de su estructura, y, en cada caso, consigne el diccionario.

(i) Todo es dulce o amargo.
(ii) O bien todo es dulce, o bien todo es amargo.
(iii) Una ballena es un mamífero.
(iv) Teodoro es una ballena.
(v) Ana María tiene una bicicleta nueva.
(vi) Este hombre es propietario de un automóvil grande.
(vii) Todos aman a alguien.
(viii) Alguien es amado por todos.
(ix) Elsie no recibió nada de parte de Carlos.
(x) Lina recibió un regalo de parte de Juan, pero no recibió algo de parte de Pedro.
(xi) Alguien robó o tomó prestada la bicicleta nueva de María.
(xii) Tú te has comido todas mis galletitas.
(xiii) No hay alguien que no sea amado por nadie.
(xiv) Si todos los lógicos son inteligentes, entonces Alfredo también lo es.
(xv) Algunos hombres y mujeres no son maduros.
(xvi) Perro que ladra no muerde.

(xvii) Si Juan es dueño de un perro, nunca se lo mostró a nadie.
(xviii) Haroldo tiene una esposa hermosa, pero ella le odia.
(xix) Nadie vive en Urk no habiendo nacido allí.
(xx) Juan le pidió prestado un libro a Pedro, pero no se lo devolvió.
(xxi) Algunas personas son agradables con sus jefes, aunque hayan sido ofendidas por ellos.
(xxii) Todo aquel que promete cualquier cosa debe hacerla.
(xxiii) Las personas que viven en Amherst o cerca de Amherst tienen su propio automóvil.
(xxiv) Si tú ves a cualquiera, no debes entregarle ninguna carta.
(xxv) Si Pedro tiene burros, los golpea.
(xxvi) Quien no es dueño de un automóvil, es dueño de una motocicleta.
(xxvii) Si todo aquel que no puede hacer un movimiento ha perdido, entonces yo he perdido.
(xxviii) Alguien pidió prestada una motocicleta y la está usando.
(xix) Alguien pidió prestada una motocicleta a alguna persona y no se la devolvió.
(xxx) Si alguien hace ruido, todos se enojan.
(xxxi) Todos se enojan con aquel que hace ruido.

Ejercicio 6 ◇

En el lenguaje natural parece haber restricciones lingüísticas sobre la profundidad con que un cuantificador puede ligar expresiones subordinadas. Una fórmula es *superficial* cuando ninguno de sus cuantificadores liga variables que aparecen libres dentro del alcance de más de uno de los cuantificadores que intervienen. Por ejemplo, $\exists xPx$, $\exists x\forall yRxy$ son superficiales, mientras que $\exists x\forall y\exists zRxyz$ no lo es. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son superficiales o intuitivamente equivalentes a una que sea superficial.

(i) $\exists x(\forall yRxy \to \forall zSzx)$

(ii) $\exists x\forall y(Rxy \to \forall zTzxy)$

(iii) $\exists x(\forall y\exists uRuy \to \forall zSzx)$

(iv) $\exists x\forall y\forall z(Rxy \wedge Sxz)$

3.5 Conjuntos

En §3.6 desarrollaremos un tratamiento conjuntístico de la semántica de la lógica de predicados. A pesar de que, en sentido estricto ello no es necesario, tenemos dos razones para hacerlo así. En primer lugar, éste es el modo usual en que se presenta en la literatura. En segundo lugar, el concepto de conjunto desempeña un papel esencial en la semántica de los sistemas lógicos que son más complejos que la lógica de predicados (y que serán abordados en el volumen 2).

En realidad, ya hemos tratado con conjuntos cuando nos referimos a los dominios y rangos de las funciones. Para expresarlo del modo más general posible, un *conjunto* es una colección de entidades. En cierto sentido, lo único que importa acerca de un conjunto son sus miembros y no la manera en que fue formada la colección, ni la manera en que podemos descubrir cuáles entidades le pertenecen.

Por ejemplo, consideremos el dominio de una función. Si esta función atribuye o no un valor a cualquier entidad dada depende solamente de la pertenencia (o membrecía) de esa entidad al dominio. La importancia fundamental de la membrecía está expresada en el *principio de extensionalidad* para conjuntos. De acuerdo con este principio, un conjunto queda totalmente especificado por las entidades que pertenecen a él. O, en otras palabras, dos conjuntos diferentes no pueden tener exactamente los mismos miembros. Por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros mayores que 3 y menores que 6, el conjunto que contiene sólo a los números 4 y 5, y el conjunto formado por los números que difieran de 4.5 en exactamente 0.5, los tres son el mismo conjunto. Una entidad a que pertenece a un conjunto A, se denomina *elemento* o *miembro* de A. Decimos que A *contiene* a a (como un elemento). Esto se escribe $a \in A$. Escribimos $a \notin A$ si a no es un elemento de A.

Los conjuntos finitos pueden describirse colocando los nombres de sus elementos entre llaves: así, por ejemplo, $\{4\ 5\}$ es el conjunto antes descripto; $\{0,1\}$ es el conjunto de valores de verdad; $\{p, q, p \to q, \neg(p \to q)\}$ es el conjunto de todas las subfórmulas de $\neg(p \to q)$; $\{x,y,z\}$ es el conjunto de variables libres de la fórmula $\forall w((Axw \wedge Byw) \to Czw)$. Así por ejemplo, tenemos que $0 \in \{0,1\}$ y que $y \in \{x,y,z\}$. Ninguna razón impide que un conjunto pueda tener un único elemento, así $\{0\}$, $\{1\}$, $\{x\}$ son todos ejemplos de conjuntos. Luego, $0 \in \{0\}$ y, para expresarlo de un modo más general, $a \in \{0\}$ sólo en el caso de que $a=0$. Debe advertirse que un conjunto que contiene un único elemento no es lo mismo que el elemento mismo, expresado simbólicamente, $a \neq \{a\}$. Por ejemplo, es obvio que $2 \neq \{2\}$ dado que 2 es un número mientras que $\{2\}$ es un conjunto. También se admiten conjuntos sin elementos. En vista del principio de extensionalidad, puede haber sólo un conjunto vacío, cuya notación es $\emptyset$. Por lo tanto no existe un a tal que $a \in \emptyset$. En la notación entre llaves es irrelevante el orden en que aparecen los elementos de un conjunto, dado que lo único que cuenta es la pertenencia. Así, por ejemplo, $\{4,5\}=\{5,4\}$ y $\{z,x,y\} = \{x,y,z\}$. Tampoco representa una diferencia si algunos de los elementos se escriben más de una vez: $\{0,0\}=\{0\}$ y $\{4\ 4,5\} = \{4,5\}$. También se usa una notación similar para algunos conjuntos infinitos, colocando entre llaves una expresión que sugiera cuáles son sus elementos. Por ejemplo, $\{1,2,3,4,...\}$ es el conjunto de todos los números enteros positivos; $\{0,1,2,3,...\}$ es el conjunto de todos los *números naturales*; $\{....-2,-1,0,1,2, \quad \}$ es el conjunto de todos los números enteros; $\{0,2,4,6,...\}$ es el conjunto de todos los números naturales pares; y $\{p, \neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p$ $\neg\neg\neg\neg\neg\neg p...\}$es el conjunto de todas fórmulas en las que sólo aparecen p y $\neg p$. Por razones de conveniencia, nos referiremos al conjunto de los números naturales como N, a los números enteros como E y (al menos en esta sección) a los números pares como Q.

Si todos los elementos de un conjunto A también son elementos de un conjunto B, entonces decimos que A es un *subconjunto* de B y se escribe $A \subset B$. Por ejemplo, tenemos que $\{x,y\} \subset \{x,y,z\}$; $\{0\} \subset \{0,1\}$; $Q \subset N$ y $N \subset E$. Dos casos límite son: para todo conjunto A, $A \subset A$ y $\emptyset \subset A$ (el requisito de que todos sus elementos sean elementos de A se satisface vacuamente porque el conjunto vacío no contiene ningún elemento). A continuación consignamos algunas propiedades de $\in$ y $\subseteq$ que pueden verificarse fácilmente:

(86) si $a \in A$ y $A \subset B$, entonces $a \in B$

si $A \subseteq B$ y $B \subsetneq C$, entonces $A \subseteq C$

$a \in A$ sii $\{a\} \subseteq A$

$a \in A$ y $b \in A$ sii $\{a, b\} \subsetneq A$

si $A \subsetneq B$ y $B \subsetneq A$, entonces $A = B$

La última propiedad, que expresa que dos conjuntos tales que uno es subconjunto del otro y viceversa son iguales, enfatiza una vez más que son los miembros de un conjunto los que determinan su identidad.

A menudo tendremos que especificar un subconjunto de algún conjunto A por medio de una propiedad G, seleccionando todos los elementos de A que tengan la propiedad G. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales que tienen la propiedad de ser mayores que 3 y menores que 6, es el conjunto $\{4,5\}$. Especificando este conjunto de la manera antes descrita, puede escribirse como $\{4,5\} = \{x \in N \mid x>3 \wedge x<6\}$. La notación general para el conjunto de todos los elementos de A que tienen la propiedad G es $\{x \in A \mid G(x)\}$. En (87) se consignan algunos ejemplos:

(87) $N = \{x \in E \mid x \geq 0\}$

$Q = \{x \in N \mid \text{hay un } y \in N \text{ tal que } x = 2y\}$

$\{0 = \{x \in \{0, 1\} \mid x + x = x\}$

$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\} = \{x \in N \mid \text{hay un } y \in N \text{ tal que } x = y^2\}$

$\emptyset = \{x \in \{4, 5\} \mid x + x = x\}$

$\{0, 1\} = \{x \in \{0, 1\} \mid x \times x = x\}$

$\{p \rightarrow q\} = \{\phi \in \{p, q, p \rightarrow q, \neg(p \rightarrow q)\} \mid \phi \text{ es una implicación}\}$

La especificación anterior de Q también se abrevia como $\{2y \mid y \in N\}$. De un modo análogo, podemos escribir también $\{y^2 \mid y \in N\}$ para el conjunto $\{0,1,4,9, 6,25,\ldots\}$. Usando esta notación, el hecho de que f sea una función de A *sobre* B puede expresarse en forma sencilla mediante $\{f(a) \mid a \in A\} = B$. Otra notación para el conjunto de entidades que poseen alguna propiedad G es: $\{x \mid G(x)\}$. A manera de ejemplo, podemos definir $P = \{X \mid X \subsetneq \{0,1\}\}$; en cuyo caso P es el conjunto $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Nótese que los conjuntos pueden tener a otros conjunto como miembros.

$A \cup B$, la *unión* de dos conjunto A y B, puede definirse como el conjunto $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Así, $A \cup B$ es el conjunto de todas las entidades que aparecen en A o en B o en ambos. Análogamente, $A \cap B$, la *intersección* de A y B se define como $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, el conjunto de todas las entidades que aparecen tanto en A como en B. Mediante los diagramas de Venn pueden representarse gráficamente $A \cup B$ y $A \cap B$ como en las figuras (88) y (89) respectivamente.

(88)-(89)

A B

A ∪ B

A B

A ∩ B

Sin embargo, se pueden producir dificultades de consideración si se definen conjuntos mediante $\{x \mid G(x)\}$ sin colocar alguna restricción sobre el conjunto del cual se toman las entidades que satisfagan G. De hecho, si suponemos que para cualquier propiedad G $\{x \mid G(x)\}$ es siempre un conjunto, quedamos atrapados en la *paradoja de Russell* que, a finales del siglo XIX y principios del XX, causó gran consternación entre los matemáticos. A continuación se ofrece un bosquejo sencillo de esta paradoja. Dado el supuesto anterior, debemos aceptar que $\{x \mid x=x\}$ define a un conjunto. Dado que toda entidad es igual a sí misma, este conjunto contiene a todas las cosas, y por ello se le denomina conjunto universal U. Ahora bien, si U contiene a todas las cosas, entonces, en particular, $U \in U$. De manera que $x \in x$ es una propiedad que poseen algunos conjuntos especiales como U, pero que no posee la mayoría de los conjuntos; $0 \notin 0$ porque 0 no es un conjunto; $\{0\} \notin \{0\}$ porque $\{0\}$ tiene un sólo elemento, 0, y $0 \neq \{0\}$; $N \notin N$, dado que los elementos de N son solamente números enteros y no conjuntos de números enteros, etc. Considérese ahora el conjunto R de todas estas entidades, el cual de acuerdo con nuestro supuesto se define como $R = \{x \mid x \notin x\}$. Luego, R es un elemento de sí mismo o no lo es, y aquí es donde surge la paradoja. Si suponemos que $R \in R$, entonces R debe tener la propiedad que determina la pertenencia a R, de lo que se sigue que $R \notin R$. Luego, evidentemente, es imposible que $R \in R$. Pero si $R \notin R$, entonces R tiene la propiedad que determina la pertenencia a R, y entonces debe cumplirse que $R \in R$. Por tanto, tambien es imposible que $R \notin R$.

En la teoría de conjuntos moderna, los axiomas determinan los conjuntos que pueden definirse mediante otros conjuntos. De este modo, muchos conjuntos pueden definirse como $\{x \mid G(x)\}$, sin que se produzca la paradoja de Russell. Un precio que debe pagarse por esto es que la clase $U = \{x \mid x=x\}$ no puede ser admitida como conjunto: es demasiado amplia para ello. Esta es una de las razones por las cuales no podemos sencillamente incluir a todo en nuestro dominio cuando traducimos a la lógica de predicados.

En ciertas ocasiones resulta inconveniente no prestarle atención al orden de los elementos en un conjunto. A veces necesitamos poder especificar el orden secuencial de un grupo de entidades. Por esta razón, introduciremos ahora la noción de *secuencias finitas* de entidades. Por ejemplo, la secuencia finita que comienza con el numeral 4 y termina con el 5, y que contiene sólo dos entidades, se escribe como $\langle 4,5\rangle$. De esta forma, $\langle 4,5\rangle \neq \langle 5,4\rangle$ y $\langle z,x,y\rangle \neq \langle x,y,z\rangle$. A diferencia de lo que sucede con los conjuntos, en una secuencia finita no es lo mismo que una entidad aparezca una o muchas veces: $\langle 4,4,5\rangle \neq \langle 4,5\rangle$ y $\langle 4,4,4\rangle \neq \langle 4,4\rangle$: la longitud de las secuencias $\langle 4,4,5\rangle$ y $\langle 4,4,4\rangle$ es 3; mientras que la longitud de $\langle 4,5\rangle$ y de $\langle 4,4\rangle$ es 2. La longitud de una secuencia está dada por la cantidad de entidades que aparecen en ella. Una secuencia finita de dos entidades también se denomina *par ordenado*, las secuencias de tres entidades se denominan 3-tuplas (o ternas) ordenadas, y las secuencias ordenadas de *n* entidades se denominan *n*-tuplas ordenadas. El conjunto de todos los pares ordenados que pueden formarse a partir de un conjunto A se escribe como A^2, el de 3-tuplas A^3, y así sucesivamente.Formalizando: $A^2 = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ y } b \in A\}$. $A^3=\{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \mid a_1 \in A \text{ , } a_2 \in A \text{ y } a_3 \in A\}$, etc. Por ejemplo, $\langle 2,3\rangle \in N^2$ y $\langle 1,1,1\rangle \in N^3$ y $\langle -1,2,-3,4\rangle \in E^4$. La notación general A^n se emplea para el conjunto de *n*-tuplas ordenadas de elementos de A; A^1 y A son idénticos.

Esto nos permite tratar a una función binaria f cuyo dominio es A como a una función unaria cuyo dominio es A^2. En lugar de escribir f(a,b), podemos escribir: $f(\langle a,b\rangle)$.

3.6 La semántica de la lógica de predicados

La semántica de la lógica de predicados estudia la forma en que el significado de las oraciones depende del significado de sus partes componentes. Al igual que en lógica proposicional, el significado de una oración se reduce a su valor de verdad. Sin embargo, dado que las partes que componen a las oraciones de la lógica de predicados no son necesariamente oraciones o inclusive fórmulas, ya que también pueden ser letras de predicado, constantes o variables, no podremos restringirnos a los valores de verdad al interpretar lenguajes de la lógica de predicados. Necesitaremos de otras funciones distintas de las valuaciones que empleamos en lógica proposicional. En última instancia, los valores de verdad de las oraciones deberán reducirse a las interpretaciones de las constantes y letras de predicado y de todo aquello que aparezca en ellas. No obstante, las valuaciones siguen teniendo un papel central, y resulta instructivo comenzar por ellas, construyendo el resto del aparato para la interpretación de la lógica de predicados a partir de las mismas. La definición que consignamos a continuación es un primer intento. En esta definición extendemos las valuaciones a los lenguajes de la lógica de predicados. Esto en sí mismo no es suficiente, de manera que deberá recordarse que la definición es sólo preliminar.

Definición 5

Una valuación para un lenguaje L de la lógica de predicados es una función cuyo dominio está constituido por las oraciones de L y su rango por $\{0,1\}$, tal que:

(i) $V(\neg\phi) = 1$ sii $V(\phi) = 0$;

(ii) $V(\phi \wedge \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 1$;

(iii) $V(\phi \vee \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 1$ o $V(\psi) = 1$;

(iv) $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$ sii $V(\phi) = 0$ o $V(\psi) = 1$;

(v) $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ sii $V(\phi) = V(\psi)$;

(vi) $V(\forall x\phi) = 1$ sii $V([c/x]\phi) = 1$ para toda constante c de L;

(vii) $V(\exists x\phi) = 1$ sii $V([c/x]\phi) = 1$ para al menos una constante c de L.

La idea es que $\forall x\phi$ es verdadera sólo en el caso de que $[c/x]\phi$ sea verdadera para toda c de L; y que $\exists x\phi$ es verdadera sólo en el caso de que $[c/x]\phi$ sea verdadera para al menos una c de L. Esto puede ser ilustrado por (90) y (91), ya que (90) es verdadera sólo en caso de que toda sustitución del espacio en blanco de (91) por el nombre de un ser humano individual resulte en una oración verdadera. Y (92) es verdadera sólo si hay al menos un nombre tal que al colocarlo en el espacio en blanco de (91) resulte en una oración verdadera.

(90) Todos son amigables.

(91) ...es amigable.

(92) Alguien es amigable.

Debemos dejar claro desde el principio que en semántica formal, al igual que en semántica informal, es necesario introducir un *dominio de discurso*. Esto porque bien podría darse el caso de que (90) sea verdadera si se toma como dominio a todos los habitantes del estado de Hawai, pero falsa si se incluye a todos los seres humanos. Por ende, para determinar el valor de verdad de (90), es necesario saber de qué estamos hablando, esto es, cuál es el dominio de discurso. Por lo tanto, las interpretaciones de un lenguaje L de la lógica de predicados siempre se referirán a algún conjunto dominio D. Es habitual suponer que siempre hay al menos algo acerca de lo cual se habla, de manera tal que, por convención, el dominio no es vacío.

3.6.1 *Funciones de interpretación*

Debemos ser más precisos acerca de la relación entre las constantes de L y el dominio D, porque, si queremos establecer el valor de verdad de (90) en el dominio constituido por todos los habitantes de Hawai, entonces el valor de verdad de *Liliuokalani es amigable* tiene interés, mientras que el valor de verdad de *Gorbachev es amigable* no, dado que Liliuokalani es el nombre de un habitante de Hawai (de hecho, es, o al menos era, una de sus reinas), mientras que Gorbachev, excluyendo coincidencias inverosímiles, no lo es. En el lenguaje natural, una característica de los nombres propios es que se refieren a algo fijo. Esto no se cumple en los lenguajes formales, y por ello es necesario estipular a qué se refieren las constantes. De manera que una interpretación de L deberá incluir una especificación de aquello a lo que se refiere cada constante de L. Así, las constantes se refieren a entidades del dominio D, y, en lo que compete a la lógica de predicados, el significado de las constantes se restringe a las entidades a las cuales se refieren. Por consiguiente, la interpretación atribuirá a cada constante de L alguna entidad de D; es decır, será una función cuyo dominio es el conjunto formado por las constantes de L y cuyo rango es D. Estas funciones se denominan *funciones de interpretación*. Se dice que I(c) es la *interpretación* de una constante c, o su *referencia* o su *denotación*; y, si e es la entidad de D tal que I(c)=e, entonces se dice que c es uno de los *nombres* de e (e puede tener muchos nombres diferentes).

Ya tenemos un dominio D y una función de interpretación I, pero no hemos terminado. Bien podría darse el caso de que

(93) Algunos son blancos.

sea verdadera para el dominio constituido por todos los copos de nieve sin que realmente exista en español una oración de la forma *a es blanco* en el cual *a* sea el nombre de un copo de nieve. Porque, si bien los copos de nieve generalmente son blancos, bien podría darse el caso de que ninguno de ellos tuviera un nombre en español. A partir de esto debe quedar claro que ni bien admitimos dominios constituidos por elementos que carecen de nombre, la definición 5 no cumple con la función que debería cumplir. En este caso, podemos explorar dos enfoques:

A. Conservar la definición 5 y asegurarnos de que todos los objetos de nuestro dominio tengan nombre. Si el lenguaje no contiene suficientes constantes como para dar un único nombre a cada entidad del dominio con el que estamos trabajando, será necesario adicionarle constantes.

B. Reemplazar la definición 5 por otra que cumpla con su cometido aun si algunas entidades carecen de nombre.

Consideraremos ambos enfoques. El enfoque B parece preferible debido a las consecuencias intuitivas del enfoque A, ya que resultaría extraño que la verdad de una oración de la lógica de predicados tuviera que depender de una contingencia tal como que todas las entidades de las que se habla tengan o no un nombre. Después de todo, las oraciones de la lógica de predicados no parecen decir este tipo de cosas acerca de los dominios en los cuales se las interpreta. No obstante, discutiremos el enfoque A, dado que, donde fuere posible aplicarlo, sería más simple y equivalente al B.

3.6.2 *Interpretación por sustitución*

En primer lugar abordaremos el enfoque A, al cual denominaremos *la interpretación de los cuantificadores por sustitución*. Debemos precisar lo que queremos significar cuando decimos que cada elemento del dominio tiene un nombre en L. Dada la terminología introducida en §2.4, podemos hacerlo en forma sucinta: la función de interpretación I debe ser una función de las constantes de L *sobre* D. Esto significa que para cada elemento d de D, hay al menos una constante c en L tal que I(c) = d, esto es., c es el nombre de d. De esta forma, sólo podremos emplear la definición si I es una función sobre D.

Pero inclusive esto no resulta totalmente satisfactorio. Hasta ahora, el significado de las letras de predicado ha sido dado sólo de forma sincategoremática. Esto puede verse claramente si trasladamos la cuestión al lenguaje natural: la definición 5 nos permite conocer el significado de la palabra *amigable* sólo en la medida en que sepamos cuáles oraciones de la forma *a es amigable* son verdaderas. Si queremos dar una interpretación directa, categoremática, de *amigable*, entonces la interpretación tendrá que ser tal que los valores de verdad de oraciones de la forma *a es amigable* puedan deducirse de la misma. Y éste es un requisito que puede exigírsele, dado que hemos restringido los significados de las oraciones a sus valores de verdad. Se sigue que, en lo que respecta a las oraciones de la forma *a es amigable*, lo único que cuenta son sus valores de verdad. Este requisito quedará satisfecho por una interpretación que establezca cuáles personas son amigables y cuáles no. Por ejemplo, *Gorbachev es amigable* es verdadera sólo en el caso de que Gorbachev sea amigable, dado que *Gorbachev* es un nombre del hombre Gorbachev. De esta forma, podemos establecer cuáles personas son amigables y cuáles no con sólo tomar al conjunto de todas las personas amigables como nuestro dominio en la interpretación de *amigable*. En general entonces, tomamos como la interpretación I(A) de una letra de predicado unaria A, al conjunto de todas las entidades e de D tales que para alguna constante a, Aa es verdadera y I(a) = e. Así, I(A).=.$\{$I(a) | Aa es verdadera$\}$ o, en otras palabras, Aa es verdadera sólo en caso de que I(a)$\in$I(A).

Interpretar a A como un conjunto de entidades no es el único enfoque que podemos tomar. También podríamos interpretar a A como una propiedad y determinar si un elemento dado de D tiene esta propiedad. Ciertamente, ésta parece ser la interpretación más natural. Si A es una letra de predicado, esperamos que se refiera a una propiedad. Lo que aquí hemos hecho es tomar como las interpretaciones de las letras de predicado unarias, no a las propiedades mismas, sino a los conjuntos de todas las cosas que las poseen. Este enfoque puede ser menos natural, pero tiene la ventaja de enfatizar que, en lógica de predicados, para determinar la verdad o falsedad de una oración que afirma que algo tiene alguna propiedad, lo único que necesitamos saber es cuál de las cosas del dominio tiene esa propiedad. No importa, por ejemplo, cómo lo sabemos ni si las cosas podrían ser diferentes. En lo que respecta a los valores de verdad, cualquier otra cosa que pudiera decirse acerca de la propiedad es irrelevante. Según este enfoque, si el conjunto de las hawaianos amigables coincidiera precisamente con el de los hawaianos calvos, entonces *amigable* y *calvo* tendrían el mismo significado, al menos si tomásemos al conjunto de los hawaianos como nuestro dominio. Decimos que en lógica de predicados la letras predicativas son *extensionales*. Es característico de la lógica moderna que dichas restricciones sean exploradas en profundidad y subsecuentemente se relajen. Por ejemplo, en los sistemas lógicos *intensionales*, los cuales serán estudiados en el volumen 2, a las expresiones se les atribuye algo más que significado extensional.

Para continuar con el enfoque A, y suponiendo que I es una función sobre D en lo que respecta a las constantes, ahora consideraremos la interpretación de las letras de predicado binarias. La interpretación de todo predicado binario dado B, al igual que la de los predicados unarios, sólo tiene que ver con determinar las d y e de

D para las cuales Bab es verdadera si I(a)=d y I(b)=e. Esto puede hacerse interpretando a B como un conjunto de pares ordenados $\langle d,e \rangle$ de D^2 y considerando que Bab es verdadera si I(a)=d y I(b)=e. Puesto que el orden de a y b es importante, la interpretación debe consistir en pares ordenados. En otras palabras, la interpretación de B es un subconjunto de D^2 e $I(B)=\{\langle I(a), I(b)\rangle \mid Bab$ es verdadera$\}$ o, en forma equivalente, Bab es verdadera sólo en caso de que $\langle I(a), I(b)\rangle \in I(B)$. Aquí también parecería más intuitivo interpretar a B como una relación en D y decir que Bab es verdadera si y sólo si I(a) y I(b) efectivamente mantienen esta relación entre sí. Sin embargo, por las razones anteriormente mencionadas, preferimos el enfoque extensional e interpretamos a una letra de predicado binaria no como una relación en sí misma sino como un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio que guardan (en el mismo orden que tienen en el par) esta relación entre sí. Y, por ende, aquí también tenemos al principio de extensionalidad: dos relaciones que se cumplen para los mismos pares ordenados son idénticas. Los predicados ternarios y de cualquier aridad más elevada reciben un tratamiento análogo. Si C es una letra de predicado ternaria, entonces I(C) es un subconjunto de D^3, y si C es un predicado *n*-ario entonces I(C) es un subconjunto de D^n. Ahora procederemos a sintetizar todo esto en las siguientes dos definiciones :

Definición 6

Un *modelo* M para un lenguaje L de la lógica de predicados consiste en un dominio D (que es un conjunto no vacío) y una función de interpretación I que se define en el conjunto de las constantes y letras de predicado del vocabulario de L y que conforma los siguientes requisitos:

(i) si c es una constante de L, entonces $I(c) \in D$;

(ii) si B es una letra de predicado *n*-aria de L, entonces $I(B) \subset D^n$.

Definición 7

Si M es un modelo para L cuya función de interpretación I es una función de las constantes de L sobre el dominio D, entonces V_M, *la valuación V basada en* M, se define como sigue:

(i) Si $Aa_1 \ldots a_n$ es una oración atómica de L, entonces $V_M(Aa_1 \ldots a_n) = 1$ si y sólo si $\langle I(a_1), \ldots, I(a_n)\rangle \in I(A)$.

(ii) $V_M(\neg\phi) = 1$ sii $V_M(\phi) = 0$.

(iii) $V_M(\phi \wedge \psi) = 1$ sii $V_M(\phi) = 1$ y $V_M(\psi) = 1$.

(iv) $V_M(\phi \vee \psi) = 1$ sii $V_M(\phi) = 1$ o $V_M(\psi) = 1$.

(v) $V_M(\phi \rightarrow \psi) = 1$ sii $V_M(\phi) = 0$ o $V_M(\psi) = 1$.

(vi) $V_M(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ sii $V_M(\phi) = V_M(\psi)$.

(vii) $V_M(\forall x\phi) = 1$ sii $V_M([c/x]\phi) = 1$ para toda constante c de L.

(viii) $V_M(\exists x\phi) = 1$ sii $V_M([c/x]\phi) = 1$ para al menos una constante c de L.

Si $V_M(\phi) = 1$, entonces se dice que ϕ es *verdadera* en el modelo M.

Si no se cumple la condición de que I sea una función sobre D, el enfoque B aun nos permitirá definir una valuación apropiada V_M, pero esta función no cumplirá las cláusulas (vii) y (viii) de la definición 7. Antes de mostrar la forma en que esto puede hacerse, presentaremos algunos ejemplos ilustrativos del método A.

Ejemplo 1

Vamos ahora a transformar el diccionario de una traducción en un modelo.
Diccionario: Axy: x ama a y; dominio: hawaianos.
Tomamos a H, el conjunto de todos los hawaianos, como el dominio del modelo M. Además de nuestro predicado binario A, nuestro lenguaje debe tener suficientes constantes como para dar un nombre a cada hawaiano, debería alcanzar con $a_1,\ldots,a_{1.000.000}$. Para cada *i* de 1 a 1.000.000 inclusive, a_i debe interpretarse como un hawaiano: $I(a_i) \in H$, y de forma tal que para cada hawaiano h hay alguna a_h que se interpreta como ese hawaiano, esto es, $I(a_h) = h$. La interpretación de A es el siguiente subconjunto H^2, esto es, el conjunto de pares de hawaianos: $\{\langle d,e\rangle / d \text{ ama a } e\}$. Ahora determinaremos el valor de verdad de $\exists x\exists y(Axy \wedge Ayx)$, que es la traducción de *algunas personas se aman mutuamente*. Supóngase que Juan ama a María, y que María ama a Juan, que $I(a_{26})$ es María y que $I(a_{27})$ es Juan. Luego, $\langle I(a_{26}),I(a_{27})\rangle \in I(A)$, y $\langle I(a_{27}),I(a_{26})\rangle \in I(A)$. De acuerdo con la definición 7i, tenemos que $V_M(Aa_{26}a_{27})=1$ y $V_M(Aa_{27}a_{26})=1$, de manera que de acuerdo con la definición 7iii $V_M(Aa_{26}a_{27} \wedge Aa_{27}a_{26}) = 1$. Aplicando una vez la definición 7viii resulta en $V_M(\exists y(Aa_{26}y \wedge Aya_{26}))=1$, y aplicándola una segunda vez obtenemos $V_M(\exists x\exists y(Axy \wedge Ayx))=1$. Por supuesto, no tiene ninguna importancia qué constantes se interpretan como cuáles personas. Podríamos haber mostrado que $V_M(\exists x\exists y(Axy \wedge Ayx)=1$ ya sea que $I(a_2)$ haya sido Juan y $I(a_9)$ haya sido María. Este es un hecho general: la verdad de una oración que carece de constantes, bajo la condición de que todas las cosas del dominio tengan un nombre, es independiente de las interpretaciones de las constantes cualquiera sea el modelo. Obviamente, esto debería probarse, pero aquí no contamos con el espacio requerido para hacerlo.

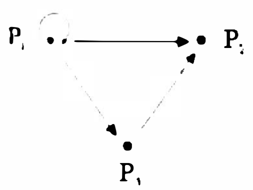
Tal vez a esta altura valga la pena señalar que la semántica no se ocupa realmente de determinar cuáles oraciones son de hecho verdaderas y cuáles son falsas. Es poco probable que las ideas que tengamos acerca de esto se vean mayormente influidas por el análisis que aquí desarrollamos. La semántica se ocupa, esencialmente, de *la forma en que el valor de verdad de las oraciones depende del significado de sus partes y de la forma en que se relacionan los* *valores de verdad de diferentes oraciones.* Esto es análogo al análisis de la noción de gramaticalidad en lingüística: se supone que está claro cuáles expresiones son gramaticales y cuáles no lo son; el problema consiste en concebir una teoría sistemática acerca del tema.

Los siguientes ejemplos contienen algunas estructuras matemáticas extremadamente simples. En el caso de que resulte claro cuál es el modelo en el que se basa la valuación, no consignaremos el subíndice M en V_M.

Ejemplo **2**

El lenguaje que vamos a interpretar tiene 3 constantes, a_1, a_2, y a_3, y la letra de predicado binaria F. El dominio D del modelo es el conjunto de puntos $\{P_1,P_2,P_3\}$ representado en la figura (94).

(94)



La interpretación de las constantes será la siguiente: $I(a_1) = P_1$; $I(a_2) = P_2$; $I(a_3) = P_3$. La interpretación de F es la relación que se cumple entre dos puntos no necesariamente distintos tales que el primero flecha al segundo. Siendo así, a partir de la figura (94) puede leerse la siguiente interpretación de F: $I(F) = \{\langle P_1,P_1\rangle, \langle P_1,P_2\rangle, \langle P_2,P_3\rangle, \langle P_3,P_1\rangle\}$. Definiendo el diccionario para Fxy: x flecha a y, es obvio que $V(Fa_1a_2) = 1$, $V(Fa_2a_3) = 1$, $V(Fa_3a_1) = 1$, y $V(Fa_1a_1) = 1$; en todos los otros casos $V(Fbc) = 0$, así por ejemplo, $V(Fa_2a_1) = 0$ y $V(Fa_3a_3) = 0$. Ahora determinaremos el valor de verdad de $\forall x\exists yFxy$ (que significa *todo punto flecha a alguno*).

(a) $V(\exists yFa_1y) = 1$ se sigue de $V(Fa_1a_2) = 1$ por la definición 7viii;
(b) $V(\exists yFa_2y) = 1$ se sigue de $V(Fa_2a_3) = 1$ por la definición 7viii;
(c) $V(\exists yFa_3y) = 1$ se sigue de $V(Fa_3a_1) = 1$ por la definición 7viii.

Ahora podemos concluir que $V(\forall x\exists yFxy) = 1$, a partir de (a), (b) y (c) mediante la aplicación de la definición 7vii. El valor de verdad de $\forall x\exists yFyx$ (que significa *todos son flechados por alguno*) puede determinarse de la misma forma:

(d) $V(\exists yFya_1) = 1$ se sigue de $V(Fa_1a_1) = 1$ por la definición 7viii;
(e) $V(\exists yFya_2) = 1$ se sigue de $V(Fa_1a_2) = 1$ por la definición 7viii;
(f) $V(\exists yFya_3) = 1$ se sigue de $V(Fa_2a_3) = 1$ por la definición 7viii.

Podemos concluir que $V(\forall x\exists yFyx) = 1$, a partir de (d), (e) y (f) mediante la aplicación de la definición 7vii.
Por último, determinaremos el valor de verdad de $\exists x\forall yFxy$ (que significa: *alguno*

flecha a todos):

(g) $V(\forall y Fa_1 y) = 0$ se sigue de $V(Fa_1 a_3) = 0$ por la definición 7vii;
(h) $V(\forall y Fa_2 y) = 0$ se sigue de $V(Fa_2 a_2) = 0$ por la definición 7vii;
(i) $V(\forall y Fa_3 y) = 0$ se sigue de $V(Fa_3 a_3) = 0$ por la definición 7vii.

Podemos concluir que $V(\exists x \forall y Fxy) = 0$, a partir de (g), (h) e (i) mediante la aplicación de la definición 7viii.

Ejemplo 3

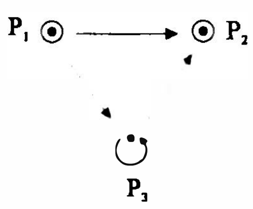
Consideramos un lenguaje con la letra de predicado unaria Q, la letra de predicado binario L, y las constantes a_0, a_1, a_2, a_3,... Tomamos a N, el conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, como nuestro dominio. Elegimos $V(a_i) = i$ para cada i e interpretamos a Q como el conjunto de los números pares, de manera que $I(Q) = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$. Interpretamos a L como <, de manera que $I(L) = \{\langle m,n\rangle / m \text{ es menor que } n\}$. Como oraciones verdaderas entonces tendremos, por ejemplo, Qa_2, La_4a_5 y $\forall x \exists y(Lxy \wedge \neg Qy)$ (éstas significan 2 *es par*, 4 *es menor que* 5, y *para todo número existe un número mayor que es impar*, respectivamente). Vamos a extendernos sobre la última. Considérese cualquier número m. Este número debe ser o bien par o bien impar.

Si m es par, entonces m+1 es impar, de forma que $V(Qa_{m+1} = 0$ y $V(\neg Qa_{m+1}) = 1$. También tenemos que $V(La_m a_{m+1}) = 1$, dado que $m<m+1$. A partir de esto podemos concluir que $V(La_m a_{m+1} \wedge \neg Qa_{m+1}) = 1$, y finalmente que $V(\exists y(La_m y \wedge \neg Qy)) = 1$.

Si, por otro lado, m es impar, entonces m+2 también es impar, de manera que $V(Qa_{m+2}) = 0$ y $V(\neg Qa_{m+2}) = 1$. También tenemos que $V(La_m a_{m+2}) = 1$, dado que $m<m+2$, y así $V(La_m a_{m+2} \wedge \neg Qa_{m+2}) = 1$, de manera que en este caso también tenemos que $V(\exists y(La_m y \wedge \neg Qy)) = 1$. Dado que esta línea de razonamiento se aplica a un número arbitrario m, tenemos que para todo a_m: $V(\exists y(La_m y \wedge \neg Qy)) = 1$. Con esto hemos mostrado que $V(\forall x \exists y(Lxy \wedge \neg Qy) = 1$.

Ejercicio 7

(95)



En la figura (95) se representa el modelo M. El lenguaje tiene tres constantes a_1, a_2, y a_3 interpretadas como los puntos P_1, P_2 y P_3, la letra de predicado unaria C interpretada como el predicado que se aplica a un punto si el mismo tiene un círculo a su alrededor, y una letra de predicado binario F interpretada como en el ejemplo 2.

(a) Describa exactamente la función de interpretación I del modelo M.

(b) Sobre la base de su significado, determine si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas en el modelo M y luego justifíquelo en detalle, empleando la definición 7:

(i) $\exists x \exists y \exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)$.

(ii) $\forall x Fxx$.

(iii) $\forall x(Fxx \leftrightarrow \neg Cx)$.

(iv) $\exists x \exists y(Fxy \wedge \neg Cx \wedge \neg Cy)$.

(v) $\forall x(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy))$.

(vi) $\forall x(Cx \rightarrow \exists y Fxy)$.

(vii) $\exists x \exists y(Fxy \wedge \neg Fyx \wedge \exists z(Fxz \wedge Fzy))$.

3.6.3 *Interpretación mediante asignaciones*

En este punto hemos llegado a la explicación del enfoque B. Recapitulando: tenemos un lenguaje L, un dominio D, una función de interpretación I que proyecta todas las constantes de L en D pero que no es necesariamente una función *sobre* D. Es decir, no tenemos garantía de que todos los elementos del dominio tengan a alguna constante como su nombre. Esto significa que la verdad de oraciones $\exists x\phi$ y $\forall x\phi$ ya no puede ser reducida a la de oraciones de la forma $[c/x]\phi$. De todos modos, si se quiere tomar al principio de composicionalidad estrictamente, esta reducción no resulta, verdaderamente, tan atractiva. Dicho principio requiere que el significado (es decir, el valor de verdad) de una expresión sea reducible al de las partes que la componen. Pero las oraciones $\exists x\phi$ y $\forall x\phi$ no están compuestas por oraciones de la forma $[c/x]\phi$, porque se las obtiene colocando un cuantificador delante de la fórmula ϕ, la cual normalmente tiene una variable libre x y, por consiguiente, no se trata de otra oración. Esto significa que ya no podemos restringirnos al caso especial de las oraciones sino que deberemos encontrar otra forma de otorgar significado a fórmulas en general.

Hemos reservado el nombre de *función proposicional* para las fórmulas que tienen variables libres, en parte porque las oraciones pueden obtenerse mediante el reemplazo de las variables libres por constantes, y en parte porque una fórmula con variables libres no parece expresar una proposición sino más bien una propiedad o una relación. Pero también podríamos tomar un enfoque diferente y decir que las fórmulas con variables libres expresan proposiciones tanto como lo hacen las oraciones, sólo que estas proposiciones se refieren a entidades no especificadas. De ahí que las mismas sean adecuadas para expresar propiedades y relaciones.

Para apreciar cómo puede otorgarse significado a estos tipos de fórmulas, volveremos a (96) (= (93)):

(96) Algunos son blancos.

Debíamos interpretar (96) en el dominio consistente en todos los copos de nieve. Queremos determinar el valor de verdad de (96) por referencia al significado de *x es blanco* interpretado en el dominio constituido por todos los copos de nieve.

Ahora bien, x, tal como lo hemos enfatizado, no tiene significado propio, de manera que no se refiere a ninguna entidad fija del dominio en la forma en que lo haría si fuera una constante. Esto puede compararse con la forma en que refieren los pronombres en oraciones del tipo *él es blanco* y *ella es negra*. Pero, precisamente por esta razón, podemos considerar a x como el nombre *temporario* de alguna entidad. La idea es considerar al modelo M junto con una atribución extra de denotaciones para x y para todas las otras variables; x recibirá una interpretación temporaria como un elemento de D. Luego resulta bastante sencillo determinar el valor de verdad de (96): (96) es verdadera si y sólo si existe alguna atribución de denotación para x en el dominio de todos los copos de nieve, tal que *x es blanco* se convierta en una oración verdadera. En otras palabras, (96) es verdadera sólo en caso de que haya algún copo de nieve tal que, si se le da el nombre x, convertirá a *x es blanco* en una oración verdadera, siendo exactamente esto lo que necesitamos.

El significado de

(97) Todos son negros.

en el dominio consistente en todos los copos de nieve puede ser tratado en forma similar: (97) es verdadera si y sólo si *toda* atribución de denotación para x en este dominio convierte a *x es negro* en una oración verdadera. Al analizar esta idea surgen problemas más técnicos que los hallados hasta el momento.

Para determinar el valor de verdad de una oración como $\exists x \exists y(Hxy \wedge Hyx)$, es necesario retrotraerse (en dos pasos) al significado de su subfórmula $Hxy \wedge Hyx$, la cual tiene dos variables libres. Es obvio que, dado que no se coloca ninguna restricción respecto de la longitud de las fórmulas, dichas subfórmulas pueden contener cualquier número de variables libres. Esto significa que para determinar los valores de verdad de las oraciones debemos enfrentarnos con fórmulas que pueden tener cualquier número de variables libres. Lo que interesa es el valor de verdad de una fórmula una vez que todas sus variables libres han recibido una denotación temporaria, pero resulta más sencillo atribuir una denotación a todas las variables libres al mismo tiempo. Resulta innecesariamente complicado rastrear las variables libres de cada fórmula y asignarles denotaciones. Lo que haremos es emplear ciertas funciones denominadas *asignaciones* que tienen al conjunto de todas las variables del lenguaje como su dominio, y a D, el dominio del modelo, como su rango.

Ahora describiremos los valores de verdad que un modelo M otorga a las fórmulas de L por medio de una función valuación $V_{M,g}$ bajo una asignación g. Definiremos a esta función valuación modificando las condiciones (i)-(viii) de la definición 7.

Las complicaciones comienzan con la cláusula (i). Mientras nos ocupemos de fórmulas atómicas que contengan sólo variables y ninguna constante, no hay problema: nos estamos ocupando en este caso de $V_{M,g}(Ax_1 \ldots x_n)$, y queda claro que lo que queremos es que $V_{M,g}(Ax_1 \ldots x_n) = 1$ si y sólo si $\langle g(x_1),\ldots, g(x_n)\rangle \in I(A)$, dado que la única diferencia con la situación anterior es que tenemos una asignación g que atribuye denotaciones a variables en lugar de una interpretación I que atribuye denotaciones a constantes. Pero se vuelve más complicado escribir las cosas correctamente para fórmulas de la forma $At_1...t_n$, en las cuales $t_1,...,t_n$ pueden ser o bien constantes o bien variables. Introduciremos la noción de *término* como nombre colectivo para las constantes y variables de L. Primero definiremos lo que significa $\|t\|_{M,g}$, la interpretación de un término t en un modelo M bajo una asignación g.

Definición 8

$$\|t\|_{M,g} = I(t) \text{ si t es una constante en L, y}$$

$$\|t\|_{M,g} = g(t) \text{ si t es una variable.}$$

Ahora podemos generalizar (i) de la definición 7 como sigue:

$$V_{M,g}(At_1...t_n) = 1 \text{ sii } \langle \|t_1\|_{M,g}, ..., \|t_n\|_{M,g} \rangle \in I(A).$$

Resulta claro que el valor de $V_{M,g}(At_1...t_n)$ no depende del valor de g(y) si y no aparece entre los términos $t_1,..., t_n$.

Las cláusulas (ii) a (vi) de la definición 7 pueden transferirse a la definición de $V_{M,g}$ sin modificación. La segunda cláusula que tenemos que adaptar es (viii), la cláusula para $V_{M,g}(\exists y\phi)$. Nótese que ϕ puede tener variables libres distintas de y. Retomaremos el modelo del ejemplo 1, sólo que esta vez para un lenguaje que carezca de constantes. Tomemos a Axy como nuestra ϕ. Ahora bien, ¿cómo definiremos $V_{M,g}(\exists yAxy)$? Bajo una asignación g, x es tratada como si denotara a g(x), de manera que $\exists yAxy$ significa que g(x) ama a alguien. Así, la definición debe resultar en $V_{M,g}(\exists yAxy) = 1$ si y sólo si existe un d∈H tal que $\langle g(x),d\rangle \in I(A)$. La idea era reducir el significado de $\exists yAxy$ al significado de Axy. Pero no podemos tomar a $V_{M,g}(\exists yAxy) = 1$ si y sólo si $V_{M,g}(Axy) = 1$, dado que $V_{M,g}(Axy) = 1$ si y sólo si $\langle g(x), g(y)\rangle \in I(A)$, o sea, si y sólo si g(x) ama a g(y). Esto porque podría darse el caso que g(x) ame a alguien y que este alguien no sea g(y). El cuantificador existencial nos obliga a considerar asignaciones distintas de g que sólo difieran de g en el valor que le asignan a y, dado que es indudable que la denotación de x no puede cambiarse.

Por un lado, si hay una asignación g' que difiere de g sólo en el valor que le asigna a y, tal que $V_{M,g'}(Axy) = 1$, entonces $\langle g'(x), g'(y)\rangle \in I(A)$, y, por consiguiente, dado que g(x) = g'(x), se cumple que $\langle g(x), g'(y)\rangle \in I(A)$. De esta forma, para algún d∈H, $\langle g(x),d\rangle \in I(A)$. Por otro lado, si hay algún d∈H tal que $\langle g(x),d\rangle \in I(A)$, entonces puede verse en forma sencilla que siempre hay una asignación g' tal que $V_{M,g'}(Axy) = 1$. Por ejemplo, elíjase g', o sea la asignación obtenida tomando g y luego cámbiese solamente el valor asignado a y por d. Luego, $\langle g'(x), g'(y)\rangle \in I(A)$, y, de esta forma, $V_{M,g'}(Axy) = 1$. Puede repetirse este argumento para cualquier fórmula dada, de manera que ahora podemos dar una primera versión de la nueva cláusula para fórmulas existenciales. Es la siguiente: $V_{M,g}(\exists yAxy) = 1$ si y sólo si hay una g' que difiere de g sólo en el valor que asigna a y, y para la cual se cumple que $V_{M,g'}(Axy) = 1$. De esta forma g' queda determinada únicamente por g, y el valor g' se asigna a la variable y. De manera que podemos adoptar la siguiente notación: escribimos g[y/d] para g' si la asignación asigna d a y, dejando para todas las otras variables los mismos valores que asignó g. (Nótese que c en la notación $[c/x]\phi$ se refiere a una constante de L, mientras que d en g[y/d] se refiere a una entidad del dominio; la primera expresión se refiere al resultado de una operación sintáctica, mientras que la segunda no.) Las asignaciones g[y/d] y g tienden a diferir, pero este no es necesariamente el caso, dado que son idénticas si g(y) =d. De esta forma ahora podemos dar la versión final de la nueva cláusula para fórmulas existenciales. Esta es:

$$V_{M,g}(\exists y\phi) = 1 \text{ sii existe un } d \in D \text{ tal que } V_{M,g[y/d]}(\phi) = 1.$$

Podemos presentar en forma similar la nueva cláusula para el cuantificador universal. De esta forma, podemos completar esta discusión acerca del enfoque B dando la siguiente definición. Se la conoce como la definición de verdad de Tarski, en honor al matemático A. Tarski, quien la introdujo; se trata de una generalización de la definición 7. A pesar de que las cláusulas (ii)-(vi) no cambian esencialmente, ofrecemos la definición completa a fin de que sirva como referencia.

Definición 9

Si M es un modelo, D su dominio, I su función de interpretación, y g es una asignación en D, entonces:

(i) $V_{M,g}(At_1 \ldots t_n) = 1$ sii $\langle \|t_1\|_{M,g}, \ldots, \|t_n\|_{M,g} \rangle \in I(A)$;

(ii) $V_{M,g}(\neg\phi) = 1$ sii $V_{M,g}(\phi) = 0$;

(iii) $V_{M,g}(\phi \wedge \psi) = 1$ sii $V_{M,g}(\phi) = 1$ y $V_{M,g}(\psi) = 1$;

(iv) $V_{M,g}(\phi \vee \psi) = 1$ sii $V_{M,g}(\phi) = 1$ o $V_{M,g}(\psi) = 1$;

(v) $V_{M,g}(\phi \rightarrow \psi) = 1$ sii $V_{M,g}(\phi) = 0$ o $V_{M,g}(\psi) = 1$;

(vi) $V_{M,g}(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ sii $V_{M,g}(\phi) = V_{M,g}(\psi)$;

(vii) $V_{M,g}(\forall x\phi) = 1$ sii para todo $d \in D$, $V_{M,g[x/d]}(\phi) = 1$;

(viii) $V_{M,g}(\exists x\phi) = 1$ sii existe al menos un $d \in D$ tal que $V_{M,g[x/d]}(\phi) = 1$.

A continuación consignaremos algunos comentarios acerca de esta definición pero no los demostraremos. Primero, los únicos valores de g de los que depende $V_{M,g}(\phi)$ son los que g asigna a las variables que aparecen libres en ϕ; así, en el caso extremo en el que ϕ sea una oración, ϕ tiene el mismo valor para cada g. Esto significa que para oraciones ϕ podemos simplemente escribir $V_M(\phi)$. Consecuentemente, para oraciones ϕ se cumple que si ϕ es verdadera respecto de alguna g, entonces es verdadera respecto de toda g. Si todos los elementos del dominio de M tienen nombre, entonces para toda oración ϕ, los enfoques A y B arrojan los mismos valores para $V_M(\phi)$. Luego, en tales casos, puede adoptarse cualquiera de los dos. Ahora retomaremos los ejemplos que empleamos en relación con el enfoque A, y los reconsideraremos según el enfoque B.

Ejemplo 1

En el lenguaje hay una única letra de predicado binaria A; el dominio es H, el conjunto de los hawaianos; $I(A)=\{\langle d, e\rangle \in H^2/d$ ama a $e\}$, y Juan y María son dos miembros del dominio que se aman mutuamente. Ahora definimos g(x)=Juan y g(y)=María; completamos g asignándole las otras variables al azar. Luego $V_{M,g}(Axy)=1$, dado que $\langle \|x\|_{M,g}, \|y\|_{M,g}\rangle=\langle g(x), g(y)\rangle=\langle$Juan, María$\rangle \in I(A)$. Análogamente, $V_{M,g}(Ayx)=1$, de manera que también se cumple que $V_{M,g}(Axy \wedge Ayx)=1$. Esto significa que $V_{M,g}(\exists y(Axy \wedge Ayx))=1$, dado que g=g[y/María], y que $V_{M,g}(\exists x\exists y(Axy \wedge Ayx))=1$ también, dado que g =g[x/Juan].

Ejemplo 2

En el lenguaje hay una única letra de predicado binario F; el dominio es $\{P_1,P_2,P_3\}$; $I(F) = \langle P_1,P_2\rangle,\langle P_1, P_1\rangle,\langle P_2,P_3\rangle,\langle P_3,P_1\rangle$ Ahora, para una g arbitraria tenemos que:

si $g(x) = P_1$, entonces $V_{M,g[y/P_2]}(Fxy) = 1$, dado que $\langle P_1, P_2\rangle \in I(F)$;
si $g(x) = P_2$, entonces $V_{M,g[y/P_3]}(Fxy) = 1$, dado que $\langle P_2, P_3\rangle \in I(F)$;
si $g(x) = P_3$, entonces $V_{M,g[y/P_1]}(Fxy) = 1$, dado que $\langle P_3, P_1\rangle \in I(F)$.

Esto significa que para cada g hay una $d\in \{P_1, P_2, P_3\}$ tal que $V_{M\ g[y/d]}(Fxy)=1$ y que por ello $V_{M,g}(\exists yFxy)=1$. Dado que esto se cumple para una g arbitraria, podemos concluir que $V_{M\ g[x/d]}(\exists yFxy)=1$ para toda $d\in D$. Ahora hemos demostrado que $V_{M,g}(\forall x\exists yFxy)=1$. De la misma forma puede demostrarse que $V_{M,g}(\forall x\exists yFyx)=1$.

Ahora nos ocuparemos del valor de verdad de $\exists x\forall yFxy$. Para una g arbitraria tenemos que:

si $g(x) = P_1$, entonces $V_{M\ g[y/P_3]}(Fxy) = 0$, dado que $\langle P_1, P_3\rangle \notin I(F)$;
si $g(x) = P_2$, entonces $V_{M\ g[y/P_2]}(Fxy) = 0$, dado que $\langle P_2, P_2\rangle \notin I(F)$;
si $g(x) = P_3$, entonces $V_{M\ g[y/P_3]}(Fxy) = 0$, dado que $\langle P_3, P_3\rangle \notin I(F)$.

Esto significa que para cada g hay una $d \in \{P_1, P_2, P_3\}$ tal que $V_{M,g[y/d]}(Fxy)=0$. A partir de esto queda claro que para cada g tenemos que $V_{M,g}(\forall yFxy)=0$; y por consiguiente que para toda $d \in D$ $V_{M\ g[y/d]}(\forall yFxy)=0$, y esto lleva a $V_{M,g}(\exists x\forall yFxy)=0$.

Ejemplo 3

El lenguaje tiene una letra de predicado unaria Q y una letra de predicado binaria L. El dominio de nuestro modelo M es el conjunto N, $I(Q)= \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, y $I(L)=\{\langle m, n\rangle/m < n\}$. Escójase g al azar. Luego, hay dos posibilidades:

(a) g(x) es un número par. En este caso g(x)+1 es impar, de forma que $g(x)+1 \notin I(Q)$, de lo cual se sigue que $V_{M\ g[y/g(x)+1]}(Qy)=0$ y que $V_{M\ g[y/g(x)+1]}(\neg Qy) = 1$. Además, $\langle g(x), g(x+1)\rangle \in I(L)$, y por consiguiente $V_{M,g[y/g(x)+1]}(Lxy)=1$, de forma que se cumple que $V_{M,g[y/g(x)+1]}(Lxy\wedge\neg Qy)=1$.

(b) g(x) es un número impar. En este caso g(x)+2 también es impar. De esto se sigue, como en (a), que $V_{M,g[y/g(x)+2]}(Lxy\wedge\neg Qy)=1$. Luego, en ambos casos, hay un $n\in N$ tal que $V_{M,g[y/n]}(Lxy\wedge\neg Qy)=1$. Esto significa que, para cada g, $V_{M,g}(\exists y(Lxy\wedge\neg Qy))=1$, a partir de lo cual queda claro que $V_{M,g}(\forall x\exists y(Lxy\wedge\neg Qy))=1$.

Ejercicio 8

Resuelva nuevamente el ejercicio 7b i, iii y v, de acuerdo con el enfoque B (definición 9).

3.6.4 *Validez universal*

En lógica de predicados, al igual que en lógica proposicional, hablamos de *contradicciones*; las mismas son oraciones ϕ tales que $V_M(\phi) = 0$ para todo modelo M en el lenguaje del que se toma ϕ. He aquí algunos ejemplos de contradicciones: $\forall x(Ax\wedge\neg Ax)$, $\forall xAx \wedge \exists y\neg Ay$, $\exists x\forall y(Ryx \leftrightarrow \neg Ryy)$ (la última es una formalización de la paradoja de Russell).

Las fórmulas ϕ tales que $V_M(\phi)=1$ para todo modelo M del lenguaje del cual se toma ϕ se denominan fórmulas *universalmente válidas* (habitualmente no se les denomina tautologías). $\models \phi$ significa que ϕ es universalmente válida. Los siguientes son algunos ejemplos de fórmulas universalmente válidas (luego presentaremos más): $\forall x(Ax\vee\neg Ax)$, $\forall x(Ax\wedge Bx) \rightarrow \forall xAx$, $(\forall x(Ax\vee Bx)\wedge\exists x\neg Ax) \rightarrow \exists xBx$.

En lógica de predicados, al igual que en lógica proposicional, se dice que las oraciones ϕ y ψ son *equivalentes* si tienen siempre los mismos valores de verdad, esto es, si $V_M(\phi)=V_M(\psi)$ para cada modelo M para el lenguaje del cual han sido tomadas ϕ y ψ. En el enfoque B esto puede generalizarse: dos fórmulas ϕ y ψ son equivalentes si $V_{M,g}(\phi)=V_{M,g}(\psi)$ para cada modelo M para el lenguaje del cual han sido tomadas y en cada asignación g en M. Como puede constatarse fácilmente, $\forall xAx$, $\forall yAy$ constituyen un ejemplo de un par de oraciones equivalentes. Generalizando, $\forall x\phi$ y $\forall y([y/x]\phi)$, ¿son siempre equivalentes? No cuando y aparece libre en ϕ; obviamente $\exists xAxy$ no es equivalente a $\exists yAyy$: alguien puede amar a y sin que alguien se ame a sí mismo o a sí misma.

Sin embargo, podría pensarse que $\forall x\phi$ y $\forall y([y/x]\phi)$ son equivalentes para todo ϕ en el que y no aparezca libre. Pero éste no es el caso, como puede apreciarse a partir del hecho de que $\forall x\exists yAxy$ y $\forall y\exists yAyy$ no son equivalentes. En $\forall y\exists yAyy$ el cuantificador $\forall y$ no liga ninguna variable y, por ende, $\forall y\exists yAyy$ es equivalente a $\exists yAyy$. Pero, ciertamente, $\forall x\exists yAxy$ puede ser verdadera, sin que lo sea $\exists yAyy$. Por ejemplo, todos tienen una madre, pero nadie es madre de sí mismo. El problema, por supuesto, es que y ha sustituido a una variable x que está libre dentro del alcance del cuantificador $\forall y$. Si queremos convertir lo anterior en un teorema, necesitaremos al menos de una restricción que diga que esto no puede suceder. La siguiente definición nos permite formular dicha restricción en forma sencilla:

Definición 10

> y *está libre para* (*sustituir a*) *x en ϕ* si x no aparece como variable libre dentro del alcance de ningún cuantificador $\forall y$ o $\exists y$ en ϕ.

Por ejemplo, sin lugar a dudas y *estará libre para x en ϕ* si y no aparece en ϕ. En general, no es dificil probar (por inducción sobre la complejidad de ϕ) que para una fórmula ϕ en la cual y no aparece libre, ϕ y $\forall y([y/x]\phi)$ son ciertamente equivalentes si y está libre para x en ϕ.

En lógica de predicados, al igual que en lógica proposicional, sustituir subfórmulas equivalentes entre sí no afecta la equivalencia. Discutiremos esto en §4.2, pero lo emplearemos en la siguiente lista de pares de fórmulas equivalentes:

(a) $\forall x\neg\phi$ es equivalente a $\neg\exists x\phi$. Esto queda de manifiesto a partir de que $V_{M,g}(\forall x\neg\phi) = 1$ sii para cada $d\in D_M$, $V_{M\,g[x/d]}(\neg\phi) = 1$; sii para cada $d\in D_M$, $V_{M,g[x/d]}(\phi) = 0$; sii no es el caso que hay un $d\in D_M$ tal que $V_{M\,g[x/d]}(\phi) = 1$; sii no es el caso que $V_{M,g}(\exists x\phi) = 1$; sii $V_{M,g}(\exists x\phi) = 0$; sii $V_{M,g}(\neg\exists x\phi) = 1$.

(b) $\forall x\phi$ es equivalente a $\neg\exists x\neg\phi$, dado que $\forall x\phi$ es equivalente a $\forall x\neg\neg\phi$, y así, de acuerdo con (a), también es equivalente a $\neg\exists x\neg\phi$.

(c) $\neg\forall x\phi$ es equivalente a $\exists x\neg\phi$, dado que $\exists x\neg\phi$ es equivalente a $\neg\neg\exists x\neg\phi$, y así, de acuerdo con (b), también es equivalente a $\neg\forall x\phi$.

(d) $\neg\forall x\neg\phi$ es equivalente a $\exists x\phi$. De acuerdo con (c), $\neg\forall x\neg\phi$ es equivalente a $\exists x\neg\neg\phi$, y así es equivalente a $\exists x\phi$.

(e) $\forall x(Ax \wedge Bx)$ es equivalente a $\forall xAx \wedge \forall xBx$, dado que $V_{M,g}(\forall x(Ax \wedge Bx)) = 1$ sii para cada $d \in D_M$: $V_{M\,g[x/d]}(Ax \wedge Bx) = 1$ sii para cada $d\in D_M$: $V_{M\,g[x/d]}(Ax) = 1$ y $V_{M,g[x/d]}(Bx) = 1$; sii para cada $d \in D_M$: $V_{M,g[x/d]}(Ax = 1$ mientras que para cada $d\in D_M$: $V_{M,g[x/d]}(Bx) = 1$; sii $V_{M,g}(\forall xAx) = 1$ y $V_{M,g}(\forall xBx) = 1$; sii $V_{M,g}(\forall x(Ax \wedge Bx)) = 1$.

(f) $\forall x(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $\forall x\phi \wedge \forall x\psi$. Ésta es una generalización de (e), y su prueba es la misma.

(g) $\exists x(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $\exists x\phi \vee \exists x\psi$, dado que $\exists x(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $\neg\forall x\neg(\phi \vee \psi)$, y así lo es a $\neg\forall x(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ (de Morgan) y por ende, de acuerdo con (f), es equivalente a $\neg(\forall x\neg\phi \wedge \forall x\neg\psi)$, y así lo es a $\neg\forall x\neg\phi \vee \neg\forall x\neg\psi$ (de Morgan), y así, de acuerdo con (d), es equivalente a $\exists x\phi \vee \exists x\psi$.

Nótese bien que $\forall x(\phi \vee \psi)$ no es necesariamente equivalente a $\forall x\phi \vee \forall x\psi$. Por ejemplo, en el dominio de los seres humanos cada uno es macho o hembra, pero no se da el caso de que o bien todos sean machos o bien todos sean hembras. Tampoco son necesariamente equivalentes $\exists x(\phi \wedge \psi)$ y $\exists x\phi \wedge \exists x\psi$. Sí se cumple, y puede probarse sin dificultad que:

(h) $\forall x(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $\phi \vee \forall x\psi$ si x no está libre en ϕ, y es equivalente a $\forall x\phi \vee \psi$ si x no está libre en ψ En forma similar:

(k) $\exists x(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $\exists x\phi \wedge \psi$ si x no está libre en ψ, y es equivalente a $\phi \wedge \exists x\phi$ si x no está libre en ϕ.

(l) $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $\phi \rightarrow \forall x\psi$ si x no está libre en ϕ, dado que $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $\forall x(\neg\phi \vee \psi)$ y así, de acuerdo con (h), a $\neg\phi \vee \forall x\psi$, y por ende a $\phi \rightarrow \forall x\,\psi$. Por ejemplo: *Para cada uno se cumple que si el clima es agradable, entonces él o ella está de buen humor* significa lo mismo que *Si el clima es agradable, entonces todos están de buen humor.*

(m) $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $\exists x\phi \rightarrow \psi$ si x no está libre en ψ, dado que $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $\forall x(\neg\phi \vee \psi)$ y así, de acuerdo con (h), a $\forall x\neg\phi \vee \psi$, y por ende, de acuerdo con (a), a $\neg\exists x\phi \vee \psi$, y así a $\exists x\phi \rightarrow \psi$.Por ejemplo: *Para cada uno se cumple que si él o ella desliza una moneda en la ranura, entonces* *saldrá un paquete de goma de mascar* significa lo mismo que *Si alguien desliza una moneda en la ranura, entonces saldrá un paquete de goma de mascar.*

(n) $\exists x\exists y(Ax\wedge By)$ es equivalente a $\exists xAx \wedge \exists yBy$, dado que, según (k) $\exists x\exists y(Ax\wedge By)$ es equivalente a $\exists x(Ax\wedge\exists yBy)$, y, mediante otra aplicación de (k), es equivalente a $\exists xAx \wedge\exists yBy$.

(o) $\exists x\phi$ es equivalente a $\exists y([y/x]\phi)$ si y no aparece libre en ϕ e y está libre para x en ϕ, dado que, de acuerdo con (d), $\exists x\phi$ es equivalente a $\neg\forall x\neg\phi$. Esto a su vez es equivalente a $\neg\forall y([y/x]\neg\phi)$, ya que y está libre para x en ϕ si y está libre para x en $\neg\phi$. Y finalmente, $\neg\forall y(\exists y[y/x]\neg\phi)$ es equivalente a $\exists y[y/x]\phi)$ por (d), dado que $\neg([y/x]\phi)$ y $[y/x]\neg\phi$ son una y la misma fórmula.

(p) $\forall x\forall y\phi$ es equivalente a $\forall y\forall x\phi$, como puede probarse sencillamente.

(q) $\exists x\exists y\phi$ es equivalente a $\exists y\exists x\phi$, sobre la base de (d) y (p).

(r) $\exists x\exists yAxy$ es equivalente a $\exists x\exists yAyx$. De acuerdo con (o) $\exists x\exists yAxy$ es equivalente a $\exists x\exists zAxz$, mediante otra aplicación de (o), a $\exists w\exists zAwz$, con (q), a $\exists z\exists wAwz$, y aplicando (o) otras dos veces, a $\exists x\exists yAyx$.

En lógica de predicados también, para oraciones ϕ y ψ, $\models \phi \leftrightarrow \psi$ sii ϕ y ψ son equivalentes. Y si $\models \phi \leftrightarrow \psi$, entonces tanto $\models \phi \rightarrow \psi$ como $\models \psi \rightarrow \phi$. Pero es posible que $\models \phi \rightarrow \psi$ sin que ϕ y ψ sean equivalentes.

A continuación damos algunos ejemplos de fórmulas universalmente válidas (se omiten las pruebas):

(i) $\forall x\phi \rightarrow \exists x\phi$

(ii) $\forall x\phi \rightarrow [t/x]\phi$

(iii) $[t/x]\phi \rightarrow \exists x\phi$

(iv) $(\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$

(v) $\exists x(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\phi \wedge \exists x\psi)$

(vi) $\exists x\forall y\phi \rightarrow \exists y\forall x\phi$

(vii) $\forall xAxx \rightarrow \forall x\exists yAxy$

(viii) $\exists x\forall yAxy \rightarrow \exists xAxx$

(ix) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$

(x) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\phi \rightarrow \exists x\psi)$

Ejercicio 9

Pruebe que las fórmulas (i), (ii), (v) y (vii) precedentes son universalmente válidas; pruebe (i) y (v) empleando el enfoque A, suponiendo que todos los elementos de un modelo tienen nombre; pruebe (ii) y (vii) empleando el enfoque B.

Ejercicio 10 ◇

En el conjunto de todas las fórmulas posibles de la forma Rxy prefijadas por dos cuantificadores Q_1x, Q_2y (no necesariamente en ese orden) encuentre tantas implicaciones y no implicaciones como pueda.

3.6.5 *Reglas*

Para descubrir fórmulas universalmente válidas podemos emplear ciertas *reglas*. En primer lugar está la llamada *Modus Ponens*:

(i) Si $\models \phi$ y $\models \phi \rightarrow \psi$ entonces $\models \psi$

No es dificil apreciar que esta regla es correcta. Supóngase que $\models \phi$ y $\models \phi \rightarrow \psi$, pero $\not\models \psi$. De $\not\models \psi$ se sigue que hay algún modelo M con $V_M(\psi) = 0$, y de $\models \phi$ se sigue que $V_M(\phi)=1$, y, por ende, que $V_M(\phi \rightarrow \psi)=0$, lo cual contradice a $\models \phi \rightarrow \psi$. A continuación consignamos algunas reglas más:

(ii) Si $\models \phi$ y $\models \psi$ entonces $\models \phi \wedge \psi$

(iii) Si $\models \phi \wedge \psi$ entonces $\models \phi$.

(iv) Si $\models \phi$ entonces $\models \phi \vee \psi$.

(v) Si $\models \phi \rightarrow \psi$ entonces $\models \neg\psi \rightarrow \neg\phi$.

(vi) $\models \neg\neg\phi$ sii $\models \phi$.

Estas reglas pueden reducirse al *Modus Ponens*. Por ejemplo, tómese (v), y supóngase $\models \phi \rightarrow \psi$. Es claro que $\models \phi \rightarrow \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$, dado que esta fórmula tiene la forma de una tautología proposicional (el teorema 13 en §4.2.2 muestra que las sustituciones en las tautologías son universalmente válidas). Luego, por *Modus Ponens* se sigue que $\models \neg\psi \rightarrow \neg\phi$. La siguiente es un tipo diferente de regla:

(vii) $\models \phi$ sii $\models \forall x([x/c]\phi)$, si x está libre para c en ϕ.

Intuitivamente esto está suficientemente claro: si ϕ es universalmente válida y c es una constante que aparece en ϕ, entonces evidentemente la verdad de ϕ es independiente de la interpretación dada a c (ϕ se cumple para una c 'arbitraria'), de manera que podríamos igualmente tener una cuantificación universal en lugar de c.

Prueba de (vii):

$\Leftarrow$: Supóngase $\models \forall x([x/c]\phi)$. A partir del ejemplo (ii) al final de §3.6.4, podemos conluir que $\models \forall x([x/c]\phi) \rightarrow [c/x][x/c]\phi$, y $[c/x][x/c]\phi$ son la misma fórmula que ϕ (dado que x está libre para c en ϕ). Ahora $\models \phi$ se sigue por *Modus Ponens*.

$\Rightarrow$: Supóngase $\models \phi$, mientras que $\not\models \forall x([x/c]\phi)$. Luego, hay un modelo M con $V_M([x/c]\phi)=0$. Esto significa que hay una asignación g en M tal que $V_{M,g}([x/c]\phi)=0$. Si ahora definimos M' tal que M' es el mismo que M (el mismo dominio, las mismas interpretaciones), excepto que $I_{M'}(c)=g(x)$, entonces está claro que $V_{M'}(\phi) = 0$, dado que x aparece como variable libre en $[x/c]\phi$ precisamente en los mismos lugares en los que c aparece en ϕ, porque x está libre para c en ϕ. Sin embargo, éste no puede ser el caso, dado que ϕ es universalmente válida, por ende $\not\models \forall x([x/c]\phi)$ tampoco puede ser el caso. □

Ahora la regla (vii) abre todo tipo de posibilidades. De $\models (Ac \wedge Bc) \rightarrow Ac$ (por sustitución de una tautología) ahora se sigue que $\models \forall x((Ax \wedge Bx) \rightarrow Ax)$. Y aplicando (ix) de §3.6.4 y *Modus Ponens* a su resultado, obtenemos $\models \forall x(Ax \wedge Bx) \rightarrow \forall x Ax$.

3.7 Identidad

En los lenguajes para la lógica de predicados a menudo resulta útil tener una letra de predicado binaria que exprese *identidad*, la *igualdad* entre dos cosas. Por esta razón, ahora introducimos una nueva constante lógica, =,que será interpretada siempre como la relación de identidad. El símbolo =, por supuesto, ha sido empleado numerosas veces en este libro a la manera de un símbolo informal de igualdad derivado del lenguaje natural, o, si el lector prefiere, como un símbolo que comúnmente se agrega al lenguaje natural para expresar la igualdad. Seguiremos empleando=de esta manera informal, pero esto no llevará necesariamente a confusión.

Aquí pretendemos desarrollar un sentido fuerte de la noción de *identidad*: mediante a=b no queremos significar que las entidades a las que se refieren a y b son idénticas en el sentido de que tienen un parecido muy cercano, como, por ejemplo, los gemelos. Lo que queremos significar es que son lo mismo, de manera que a=b es verdadero sólo en caso de que a y b se refieran a la misma entidad. Para ponerlo en términos de valuaciones, pretendemos que $V_M(a=b)=1$ en todo modelo M sólo en el caso de que I(a)=I(b). (El primer=de la oración está en el lenguaje formal, el lenguaje objeto; los otros dos están en el lenguaje natural, el metalenguaje.)

Se pueden obtener valuaciones correctas si estipulamos que I será siempre: $I(=)= \{\langle d,e\rangle \in D^2/d=e\}$, o, en una notación más breve: $I(=) = \{\langle d,d\rangle/d \in D\}$. Luego, con el enfoque A, tenemos que $V_M(a=b)$ = sii $\langle I(a),I(b)\rangle \in I(=)$ sii I(a)=I(b). Y, con el método B, tenemos que $V_{M,g}(a=b)$=sii $\langle \|a\|_{M,g},\|b\|_{M,g}\rangle \in I(=)$ sii $\|a\|_{M,g} = \|b\|_{M,g}$ sii I(a)=I(b).

El símbolo de identidad puede usarse para traducir otras oraciones además de oraciones del tipo *La estrella de la mañana es la estrella de la tarde* y *Shakespeare y Bacon son una y la misma persona*. En (98) se consignan algunas.

(98)	*Oración*	*Traducción*
	Juan ama a María, pero María ama a otro.	$Ajm \wedge \exists x(Amx \wedge x \neq j)$
	Juan no ama a María sino a otra.	$\neg Ajm \wedge \exists x(Ajx \wedge x \neq m)$
	Juan ama sólo a María.	$\forall x(Ajx \leftrightarrow x = m)$
	Sólo Juan ama a María.	$\forall x(Axm \leftrightarrow x = j)$
	Juan ama a todos excepto a María.	$\forall x(Ajx \leftrightarrow x \neq m)$
	Todos, excepto Juan, aman a María.	$\forall x(Axm \leftrightarrow x \neq j)$

El diccionario de cada traducción es obvio, por ello lo omitimos. En todos los casos, el dominio está constituido sólo por personas. Escribiremos siempre $s \neq t$ en lugar de $\neg(s = t)$.

Si el dominio de los ejemplos anteriores incluyera, además de personas, cosas, entonces debería sustituirse $\forall x$ por $\forall x(Hx \rightarrow$ en todas las traducciones, y $\exists x$ por $\exists x(Hx \wedge$. En general, si una oración afirma que de todas las entidades que tienen alguna propiedad A, sólo a tiene la relación R con b, entonces esa oración deberá traducirse por $\forall x(Ax \rightarrow (Rxb \leftrightarrow x=a))$; pero si una oración afirma que todas las entidades que tienen A mantienen R con b excepto la entidad a, entonces esa oración puede traducirse por $\forall x(Ax \rightarrow (Rxb \leftrightarrow x \neq a))$. También podemos traducir oraciones más complicadas, como (99):

(99) Sólo Juan ama exclusivamente a María.

La oración (99) puede traducirse por $\forall x(\forall y(Axy \leftrightarrow y=m) \leftrightarrow x = j)$. Si se recuerda que $\forall y(Axy \leftrightarrow y= m)$ dice que x ama sólo a María, queda claro que la traducción proporcionada es correcta.

Uno de los descubrimientos de Frege fue que el significado de los numerales puede expresarse por medio de los cuantificadores de la lógica de predicados y la identidad. En (100) se ilustra el principio que guía esto; las últimas tres filas contienen oraciones que expresan a los numerales *uno*, *dos* y *tres*. Para cualquier número natural *n*, podemos expresar la proposición según la cual hay *al menos n* cosas que tienen alguna propiedad A diciendo que hay *n* cosas mutuamente diferentes que tienen A. Puede expresarse que hay *cuanto mucho n* cosas diferentes que tienen A diciendo que de cada *n* +1 cosas (no necesariamente diferentes) que tienen A, al menos dos deben ser idénticas. Ahora puede expresarse que hay *exactamente n* entidades que tienen A diciendo que hay al menos, y cuanto mucho, *n* entidades que tienen A. Así, por ejemplo, $\exists xAx \wedge \forall x\forall y((Ax \wedge Ay) \rightarrow x=y)$ puede usarse para expresar que hay exactamente un x tal que Ax. Si seguimos el procedimiento ilustrado en (100) obtendremos fórmulas más cortas que tienen el mismo efecto. Decimos que hay *n* entidades diferentes y que cada entidad que tiene la propiedad A debe ser una de ellas.

(100)

Hay al menos un x tal que Ax:	$\exists xAx$
Hay al menos dos x (diferentes) tales que Ax:	$\exists x\exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay)$
Hay al menos tres x (diferentes) tales que Ax:	$\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Ax \wedge Ay \wedge Az)$.
Hay cuanto más un x tales que Ax	$\forall x\forall y((Ax \wedge Ay) \rightarrow x = y)$
Hay cuanto más dos x (diferentes) tales que Ax	$\forall x\forall y\forall z((Ax \wedge Ay \wedge Az) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$
Hay cuanto más tres x (diferentes) tales que Ax	$\forall x\forall y\forall z\forall w((Ax \wedge Ay \wedge Az \wedge Aw) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w))$

Hay exactamente un x tal que Ax	$\exists x \forall y(Ay \leftrightarrow y = x)$
Hay exactamente dos x talque Ax	$\exists x \exists y(x \neq y \land \forall z(Az \leftrightarrow (z = x \lor z = y)))$
Hay exactamente tres x tal que Ax	$\exists x \exists y \exists z(x \neq y \land x \neq z \land y \neq z \land \forall w(Aw \leftrightarrow (w = x \lor w = y \lor w = z)))$

Se ilustró el procedimiento mediante la letra de predicado unaria A, pero el mismo procedimiento funciona igualmente bien para fórmulas ϕ. Por ejemplo, la fórmula $\exists x \forall y([y/x]\phi \leftrightarrow y = x)$ dice que hay exactamente una cosa tal que ϕ, con la condición de que y debe ser una variable que esté libre para x en ϕ y que no aparezca libre en ϕ. A veces se emplea una notación especial para una oración que exprese *Hay exactamente un x tal que* ϕ, $\exists x \forall y([y/x]\phi \leftrightarrow y = x)$ se abrevia como $\exists! x\phi$.

A continuación presentamos algunos ejemplos de oraciones que pueden traducirse empleando = No especificamos los dominios, dado que todo conjunto lo suficientemente grande es apropiado.

(101) Hay sólo una reina.
Traducción: $\exists x \forall y(Ry \leftrightarrow y = x)$
Diccionario: Rx: x es una reina.

(102) Hay sólo una reina, quien a su vez es la Jefe de Estado.
Traducción: $\exists x(\forall y(Ry \leftrightarrow y = x) \land x = j)$.
Diccionario: Rx: x es una reina; j: la Jefe de Estado.

(Esto debe ser contrastado con $\exists! x(Rx \land x = j)$, el cual expresa que sólo una persona es la reina gobernante, pero podría haber otras reinas.)

(103) Dos niños están sentados sobre una cerca.

Traducción: $\exists x(Cx \land \exists y_1 \exists y_2(y_1 \neq y_2 \land \forall z((Nz \land Szx) \leftrightarrow (z = y_1 \lor z = y_2)))))$.

Diccionario: Nx: x es un niño; Sxy: x está sentado sobre y; Cx: x es una cerca.

(104) Si dos personas se pelean por alguna cosa, otra persona la obtendrá.

Traducción: $\forall x \forall y \forall z((Px \land Py \land x \neq y \land Cz \land Lxyz) \rightarrow \exists w(Pw \land w \neq x \land w \neq y \land Owz))$.

Diccionario:Px: x es una persona; Cx: x es una cosa; Lxyz: x pelea con y por z; Oxy: x obtiene y

Ejercicio 11

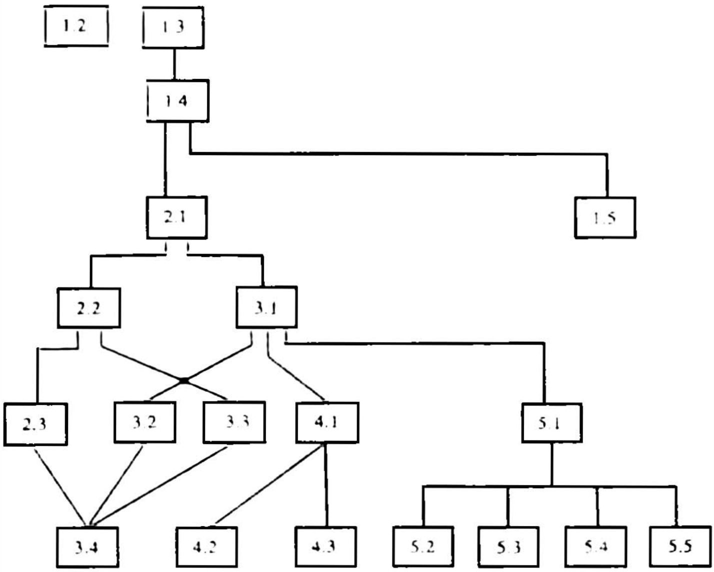
Traduzca las siguientes oraciones al lenguaje de la lógica de predicados de primer

orden. Preserve lo máximo posible de su estructura y en cada caso consigne el diccionario.
(a) Ningún hombre es más inteligente que sí mismo.
(b) Para cada hombre hay otro que es más inteligente.
(c) Hay un hombre que es más inteligente que todos excepto que sí mismo.
(d) Hay alguien que es más inteligente que todos excepto que sí mismo, y que es el primer ministro.
(e) Hay al menos dos reinas.
(f) Hay cuanto mucho dos reinas.
(g) No hay reinas excepto Beatriz.
(h) Si dos personas realizan un intercambio, entonces una de las dos saldrá perjudicada.
(i) Toda persona tiene dos progenitores.
(j) María gusta sólo de los hombres.
(k) Carlos no ama a nadie exceptuando a Elsa y a Beatriz.
(l) Carlos no ama a nadie excepto a las que ama Beatriz.
(m) Nadie comprende a alguien que no ama a nadie excepto a María.
(n) Ayudo sólo a los que se ayudan a sí mismos.
(o) Todos aman exactamente a una persona.
(p) Todos aman exactamente a otra persona.
(q) Cada uno ama a una persona distinta.
(r) Todos se aman solamente a sí mismos.
(s) Las personas que aman a todos excepto a sí mismos son altruistas.
(t) Los altruistas se aman mutuamente.
(u) Las personas que se aman mutuamente son felices.

Ejercicio 12

a) En la introducción de muchos libros se consignan las relaciones de dependencia entre los diferentes capítulos o secciones con la ayuda de una figura. Un ejemplo de ello es la figura a tomada de *Model Theory* de Chang y Keisler (North-Holland, 1973). Se puede leer la figura a como un modelo que tiene como dominio el conjunto de las secciones $\{1.1, 1.3, \ldots, 5.4, 5.5\}$ en el cual la letra de predicado binaria R ha sido interpretada como dependencia, de acuerdo con el diccionario: Rxy: y depende de x. Por ejemplo, la sección 4.1 depende de §3.1, pero también de §2.1, §1.4, y §1.3. Por ejemplo, $\langle 2.1, 3.1\rangle \in I(R)$, y $\langle 1.4, 5.3\rangle \in I(R)$, pero $\langle 2.2, 4.1\rangle \notin I(R)$.

Determine los valores de verdad de las siguientes oraciones en el modelo sobre la base de su significado. No proporcione todos los detalles. (No es posible hacerlo empleando el enfoque A, dado que las entidades del modelo no han recibido nombres.)



(i) $\exists x Rxx$

(ii) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Rxy \wedge Ryx)$

(iii) $\exists x (\neg \exists y\, Ryx \wedge \neg \exists y Rxy)$

(iv) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (\neg \exists w Rzw \leftrightarrow (z = x \vee z = y)))$

(v) $\exists x \exists y \exists z (y \neq z \wedge \forall w (Rxw \leftrightarrow (w = y \vee w = z)))$

(vi) $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \exists z Rxz \wedge \exists z Ryz \wedge \forall z (Rxz \leftrightarrow Ryz))$

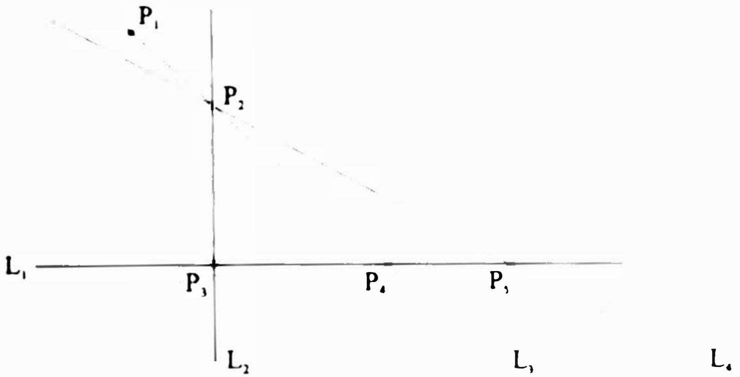
(vii) $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6 \exists x_7 (Rx_1x_2 \wedge Rx_2x_3 \wedge$
$Rx_3x_4 \wedge Rx_4x_5 \wedge Rx_5x_6 \wedge Rx_6x_7$

(viii) $\forall x_1\ \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge$
$\neg Rx_1x_2 \wedge \neg Rx_2x_1 \wedge \neg Rx_1x_3 \wedge \neg Rx_3x_1 \wedge$
$\neg Rx_2x_3 \wedge \neg Rx_3x_2) \rightarrow \neg \exists y (Rx_1y \wedge Rx_2y \wedge Rx_3y)))$

(ix) $\forall x \forall y ((x \neq y \wedge \neg Rxy \wedge \neg Ryx) \rightarrow \neg \exists z \exists w (z \neq w \wedge$
$\neg Rzw \wedge \neg Rwz \wedge Rxz \wedge Ryz \wedge Ry\,w))$

(b) Considere el modelo dado en la figura b. Su dominio consiste en los puntos y las lineas de la figura. Así, $D = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, l_1, l_2, l_3, l_4\}$. El lenguaje contiene a la letra de predicado unaria P cuya interpretación son los puntos; la letra de predicado unaria L cuya interpretación son las lineas, la letra de predicado binario S cuya interpretación es *está sobre* (diccionario: Sxy: el punto x está sobre la línea y); y la letra de predicado de grado 3 E cuya interpretación es *está entre* (diccionario: Exyz: y está entre x y z, esto es, I(E) $\{\langle P_1,P_2,P_4\rangle, \langle P_4,P_2,P_1\rangle, \langle P_3,P_4,P_5\rangle, \langle P_5,P_4,P_3\rangle\}$).

b.



Al igual que en (a), determine en el modelo el valor de verdad de las oraciones que siguen sobre la base de su significado:

(i) $\forall x(Lx \leftrightarrow \exists ySxy)$

(ii) $\forall x\forall y(Lx \wedge Ly) \rightarrow \exists z(Pz \wedge Szx \wedge Szy))$

(iii) $\forall x\forall y((Px \wedge Py) \rightarrow \exists z(Lz \wedge Sxz \wedge Syz))$

(iv) $\exists x\exists y\forall z(Pz \rightarrow (Szx \vee Szy))$

(v) $\exists x\exists y_1\exists y_2\exists y_3(y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge$
$\forall z((Pz \wedge Szx) \leftrightarrow (z = y_1 \vee z = y_2 \vee z = y_3)))$

(vi) $\exists x_1\exists y_1\exists x_2\exists y_2(x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2 \wedge$
$Sx_1y_1 \wedge Sx_1y_2 \wedge Sx_2y_1 \wedge Sx_2y_2\ )$

(vii) $\forall x\forall y\forall z(Exyz \rightarrow Ezyx)$

(viii) $\forall x(Lx \rightarrow \exists y\exists z\exists w(Syx \wedge Szx \wedge Swx \wedge Eyzw))$

(ix) $\forall x\forall y\forall z((x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \exists w(Sxw \wedge Syw \wedge)$
$Szw)) \rightarrow (Exyz \vee Eyzx \vee Ezxy)$

(x) $\forall x(\exists y_1\exists y_2(y_1 \neq y_2 \wedge Sxy_1 \wedge Sxy_2) \rightarrow \exists z_1\exists z_2Ez_1xz_2)$

Ejercicio 13

Realmente hay mucha flexibilidad en el esquema semántico aquí presentado. A pesar de que enfatizamos el caso en que se interpreta una fórmula ϕ en un modelo dado ('verificación'), hay muchas otras formas de emplear dicho esquema semántico. Por ejemplo, se puede preguntar por todos los modelos en los que se cumple una sola fórmula dada ϕ. O, a la inversa, se puede tratar de describir exactamente aquellas fórmulas que son verdaderas en un modelo dado M. También, dadas algunas fórmulas y alguna situación no lingüística, se puede tratar de diseñar una función de interpretación que haga que las fórmulas sean verdaderas en dicha situación: esto sucede cuando aprendemos una lengua extranjera. Por ejemplo, dado un dominio de tres objetos, ¿cuáles funciones de interpretación diferentes verificarán la siguiente fórmula)?

$$\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y) \wedge \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

Ejercicio 14 ◇

Las fórmulas pueden tener diferente cantidad de modelos de diversos tamaños. Muestre que:

(i) $\exists x \forall y(Rxy \leftrightarrow \neg Ryy)$ no tiene modelos.

(ii) $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y) \wedge \forall x \forall y(Rxy \leftrightarrow \neg(Px \leftrightarrow Py))$ tiene sólo modelos finitos de tamaño máximo 2.

(iii) $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx \wedge \exists x \forall y \neg Ryx \wedge \forall x \forall y \forall z((Rxz \wedge Ryz) \rightarrow x = y)$ sólo tiene modelos con dominios infinitos.

Ejercicio 15 ◇

Describa todos los modelos con dominio finito de 1, 2, 3,... objetos para la conjunción de las siguientes fórmulas:

$\forall x \neg Rxx$

$\forall x \exists y Rxy$

$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow y = z)$

$\forall x \forall y \forall z((Rxz \wedge Ryz) \rightarrow x = y)$

Ejercicio 16 ◇

En el lenguaje natural (y también en ciencia), a menudo el dominio de discurso cambia. Por ende, es interesante estudiar lo que ocurre respecto de la verdad de las fórmulas en un modelo cuando dicho modelo sufre alguna transformación. Por ejemplo, en semántica a veces se dice que una fórmula es *persistente* cuando su verdad no se ve afectada al ampliar los modelos mediante la introducción de nuevos objetos. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son generalmente persistentes?

(i) $\exists x Px$

(ii) $\forall x Px$

(iii) $\exists x \forall y Rxy$

(iv) $\neg \forall x \forall y Rxy$

3.8 Algunas propiedades de las relaciones

En §3.1 sostuvimos que si el primero de tres objetos es más grande que el segundo, y el segundo a su vez es más grande que el tercero, entonces el primer objeto también debe ser más grande que el tercero; y este hecho puede expresarse en lógica de predicados. Por ejemplo, puede expresarse mediante la fórmula $\forall x \forall y \forall z((Gxy \wedge Gyz) \rightarrow Gxz)$, dado que en todo modelo M en el cual se interprete G como la relación *más grande que* se cumplirá que $V_M(\forall x \forall y \forall z((Gxy \wedge Gyz) \rightarrow Gxz)) = 1$. De la definición se sigue directamente que esto es verdadero sólo en caso de que para cualesquiera d_1, d_2, $d_3 \in D$, si $\langle d_1,d_2 \rangle \in D$ y $\langle d_2,d_3 \rangle \in D$, entonces $\langle d_1,d_3 \rangle \in D$. Se dice que una relación I(R) en un modelo M es *transitiva* si $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ es verdadera en M. De esta forma, la relación *más grande que* es transitiva. La relación *tan grande como* e = son otros ejemplos de relaciones transitivas. Esto es así en virtud de que la oración $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ es verdadera en todo modelo.

Hay una diferencia entre, por un lado, *tan grande como* (traducida como H) e =, y por el otro, *más grande que*, a saber: $\forall x \forall y(Hxy \rightarrow Hyx)$ y $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$ son siempre verdaderas, pero $\forall x \forall y(Gxy \rightarrow Gyx)$ nunca es verdadera. Por lo visto el orden de los elementos no cuenta en el caso de *tan grande como* e =, pero sí cuenta en *más grande que*. Si $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ es verdadera en un modelo M, entonces decimos que I(R) es *simétrica* en M. Así, *tan grande como* e = son relaciones simétricas. Pero, si $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ es verdadera en un modelo M, entonces decimos que I(R) es *asimétrica* en M. *Más grande que* es una relación *asimétrica*. No toda relación es o bien simétrica o bien asimétrica; por ejemplo, la relación *ser hermano varón de* no es ni lo uno ni lo otro: Si Juan es *hermano varón de* alguien, entonces que la relación sea o no simétrica dependerá de que ese alguien sea sea varón o mujer.

Se dice que una relación I(R) es *reflexiva* en M sólo en caso de que $\forall x Rxx$ sea verdadera en M. Una vez más, las relaciones *tan grande como* e = son reflexivas, dado que cualquier cosa es tan grande como sí misma e igual a sí misma. Por otro lado, decimos de I(R) es *irreflexiva* en M sólo en caso de que $\forall x \neg Rxx$ sea verdadera en M. Nada es más grande que sí mismo, de manera que la relación *más grande que* es irreflexiva.

Hay otras expresiones comparativas en el lenguaje natural que son tanto asimétricas como irreflexivas; por ejemplo *más delgado que*, *más feliz que*. Otras expresiones comparativas, como *tan o más grande que* y *al menos tan feliz como*, no son ni simétricas ni asimétricas, a pesar de que ambas son reflexivas y transitivas. Las relaciones > y $\geq$ entre números son análogas a *más grande que* y *tan o más grande que*: la relación > es transitiva, asimétrica e irreflexiva, mientras que $\geq$ es transitiva pero no es ni simétrica ni asimétrica.

Pero $\geq$ tiene una propiedad adicional: si I(R) es $\geq$, entonces $\forall x \forall y((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$ siempre es verdadera. Se dice que las relaciones de este tipo son *antisimétricas*. *Tan o más grande que* no es antisimétrica, dado que María y Juan pueden tener la misma edad sin ser la misma persona.

Finalmente, decimos que la relación I(R) es *conexa* en el modelo M sólo en caso de que $\forall x \forall y(Rxy \vee x = y \vee Ryx)$ sea verdadera en M. Las relaciones > y > son conexas. Las relaciones >, *tan o más alto que*, y > también lo son, pero nótese que *más alto que* no es conexa.

Estas propiedades de las relaciones pueden ilustrarse como sigue. En el ejemplo 2 de §3.6.2, elegimos los puntos de una figura como el dominio de un modelo e interpretamos F de la forma $\langle d,e \rangle \in$ I(F) sii d flecha a e. Similarmente, en la tabla (105) mostramos lo que significan las propiedades para una relación específica I(F). Para facilitar la referencia también incluimos la fórmula lógica que define al predicado.

(105)

I(F) es simétrica.	$\forall x \forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$	Si una flecha conecta dos puntos en una dirección, entonces también hay una flecha en la otra dirección.
I(F) es asimétrica.	$\forall x \forall y(Fxy \rightarrow \neg Fyx)$	Las flechas entre dos puntos no van en las dos direcciones.
I(F) es reflexiva.	$\forall x Fxx$	Todo punto se flecha a sí mismo.
I(F) es irreflexiva.	$\forall x \neg Fxx$	Ningún punto se flecha a sí mismo.
I(F) es transitiva.	$\forall x \forall y \forall z((Fxy \wedge Fyz) \rightarrow Fxz)$	Si dados tres puntos el primero flecha al segundo y el segundo flecha al tercero entonces el primero flecha al tercero.
I(F) es antisimétrica.	$\forall x \forall y(Fxy \wedge Fyx) \rightarrow x = y)$	Las flechas entre dos puntos distintos no van en las dos direcciones.
I(F) es conexa.	$\forall x \forall y(Fxy \vee x = y \vee Fyx)$	Entre dos puntos distintos hay por lo menos una flecha que los conecta.

Los dos últimos casos de (105) quedarán más claros si se toma nota de que la antisimetría también puede ser expresada por $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (Fxy \rightarrow \neg Fyx))$ y la conexidad por $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (Fxy \vee Fyx))$. La diferencia entre asimetría y antisimetría es que la asimetría implica irreflexividad. Esto se hace patente a partir de la formulación recientemente dada: si una flecha fuera de un punto a sí mismo, entonces automáticamente habría una flecha en el sentido contrario. Puesto en fórmulas: si $\forall x \forall y(Fxy \quad \neg Fyx)$ es verdadera en un modelo, entonces $\forall x(Fxx \rightarrow \neg Fxx)$ también es verdadera. Y esta última fórmula es equivalente a $\forall x \neg Fxx$.

Finalmente, hacemos notar que todas las propiedades aquí mencionadas tienen sentido para relaciones binarias arbitrarias, sea que sirvan como interpretación de alguna constante de predicado binario o no. Respecto de las expresiones o relaciones de un lenguaje natural es recomendable hacer una advertencia. Las propiedades exactas de una relación en el lenguaje natural dependen del dominio del discurso. De esta forma, *hermana de* no es simétrica ni antisimétrica en el conjunto de todas las personas, pero es simétrica en el conjunto de todas las personas del sexo femenino. Y *menor que* es conexa en el conjunto de los números naturales pero no lo es en el conjunto de todas las personas.

Ejercicio 17

Investigue las siguientes relaciones respecto de su reflexividad, irreflexividad, simetría, asimetría, antisimetría, transitividad y conexidad:

(i) la relación *abuelo de* en el conjunto de todas las personas;

(ii) la relación *ancestro de* en el conjunto de todas las personas;

(iii) la relación *más pequeño que* en el conjunto de todas las personas;

(iv) la relación *tan alto como* en el conjunto de todas las personas;

(v) la relación *exactamente un año menor que* en el conjunto de todas las personas;

(vi) la relación *al norte de* en el conjunto de todos los lugares de la tierra;

(vii) la relación *más pequeño que* en el conjunto de todos los números naturales;

(viii) la relación *divisible por* en el conjunto de todos los números naturales;

(ix) la relación *diferente de* en el conjunto de todos los números naturales.

Ejercicio 18

Hay ciertas *operaciones* naturales sobre relaciones binarias que las transforman en otras relaciones. Un ejemplo es la *negación*, la cual convierte a una relación H en su complemento, $-H$; otra es la *conversa*, la cual convierte a una relación H en $\check{H} = \{\langle x,y\rangle / \langle y,x\rangle \in H\}$. Estas operaciones pueden o no preservar las propiedades especiales de las relaciones definidas anteriormente. ¿Cuáles de las siguientes son preservadas bajo la negación o la conversa?

(i) reflexividad

(ii) simetría

(iii) transitividad

3.9 Símbolos de función

Una función es un tipo especial de relación. Una función r de D en D siempre puede ser representada como una relación R definida como sigue: $\langle d,e\rangle \in I(R)$ sii $r(d) = e$. Y así, $\forall x \exists ! y Rxy$ es verdadera en el modelo en cuestión. A la inversa si $\forall x \exists ! y Rxy$ es verdadera en algún modelo para una relación binaria R, entonces podemos definir una función r que asigne la única e tal que $\langle d,e\rangle \in I(R)$ a todo elemento d del dominio. De esta forma, las funciones unarias pueden representarse como relaciones binarias, las funciones *n*-arias como relaciones $n+1$-arias. Por ejemplo, la función suma, +, puede representarse por medio de una letra de predicado P de grado 3. Dado un modelo cuyo domino sean los números naturales, entonces definimos I(P) tal que $\langle n_1,n_2,n_3\rangle \in I(P)$ sii $n_1 + n_2 = n_3$. Luego, por ejemplo, $\langle 2,2,4\rangle \in I(P)$ y $\langle 2,2,5\rangle \notin I(P)$.

La conmutatividad de la adición se reduce a la verdad de $\forall x\forall y\forall z(Pxyz \rightarrow Pyxz)$ en el modelo. La asociatividad es más difícil de expresar, pero podemos hacerlo mediante la siguiente oración: $\forall x\forall y\forall z\forall w_1\forall w_2\forall w_3((Pxyw_1 \wedge Pw_1zw_2 \wedge Pyzw_3) \rightarrow Pxw_3w_2)$. Esto queda representado gráficamente en la figura (106):

(106)
$$\begin{array}{ccc} (x + y) + z & = & x + (y + z) \\ \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup \\ w_1 + z & & x + w_3 \\ \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup \\ w_2 & & w_2 \end{array}$$

Queda claro que al expresar las propiedades de las funciones por medio de letras de predicado obtenemos fórmulas que no son muy legibles. Por esta razón en los lenguajes de predicados a menudo se incluyen símbolos que se interpretan siempre como funciones, los *símbolos de función*.

Los símbolos de función, al igual que las letras de predicado, pueden tener cualquier aridad: pueden ser unarios, binarios, ternarios, y así sucesivamente. Pero, mientras que una letra de predicado *n*-aria seguida por *n* términos forma una fórmula atómica, un símbolo de función *n*-aria, seguido por *n* términos forma otro término, una expresión que se refiere a alguna entidad del dominio de cualquier modelo en el cual se le interpreta, como lo hacen las constantes y las variables. Por ende, dichas expresiones pueden desempeñar el mismo papel que las constantes y las variables, apareciendo en las mismas posiciones de las fórmulas que lo hacen las constantes y las variables.

Si representamos la función adición en los números naturales por medio del símbolo de función binaria p, entonces la conmutatividad y asociatividad de la adición quedan convenientemente expresadas mediante:

(107) $\forall x\forall y(p(x,y) = p(y,x))$

(108) $\forall x\forall y\forall z(p(p(x,y), z) = p(x, p(y,z)))$

De esta forma, no solamente tenemos términos simples como constantes y variables sino también términos compuestos que pueden construirse prefijando símbolos de función a una cantidad apropiada de otros términos. Por ejemplo, las expresiones p(x,y), p(y,x), p(p(x,y), z), p(x, p(y,z)), p(y,z) que aparecen en (107) y (108) son todos términos compuestos. Los términos compuestos se construyen a partir de componentes más simples a semejanza de las fórmulas compuestas, de manera que también podemos formular una definición inductiva de los mismos:

Definición 11

(i) Si t es una variable o una constante de L, entonces t es un término de L.

(ii) Si f es un simbolo de función n-ario de L y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ también es un término de L

No es necesario adaptar la definición de fórmula de L. Su semántica se vuelve un poco más complicada, dado que ahora tenemos que comenzar por interpretar términos. En forma bastante natural, interpretamos al símbolo de función n-aria f como una función n-aria I(f) que proyecta D^n, el conjunto de n-tuplas de elementos del dominio D de algún modelo con el que estemos trabajando, sobre D. Se interpretan las variables y las constantes de la misma forma que anteriormente, y las interpretaciones de términos compuestos pueden calcularse por medio de la cláusula:

$$\|f(t_1, \ldots, t_n)\|_{M,g} = I(f)(\langle \|t_1\|_{M,g}, \ldots, \|t_n\|_{M,g} \rangle).$$

Ahora podemos apreciar por qué es útil la idea subyacente a la definición 8: facilita la generalización. A propósito, en el enfoque A sólo tenemos que tomar en cuenta términos sin variables, en cuyo caso puede definirse $\|t\|_M$ en lugar de $\|t\|_{M,g}$.

Por lo que hemos visto, nuestra exposición de la lógica de predicados se ha inclinado a considerar los *predicados* y las *relaciones* entre objetos individuales como las expresiones lógicamente simples. En esto hemos seguido al lenguaje natural, el cual tiene pocas (si es que tiene alguna) expresiones básicas que sean expresiones funcionales lexicales. No obstante, debería enfatizarse que en muchas aplicaciones de la lógica de predicados a la *matemática* las nociones básicas son funciones más que predicados. (Esto es cierto, por ejemplo, en muchos campos del álgebra.) Más aún, a un nivel superior, en el lenguaje natural hay también una gran cantidad de comportamientos funcionales, tal como lo veremos en el capítulo posterior acerca de la teoría de los tipos (véase vol. 2).

4 Argumentos e inferencias

4.1 Argumentos y esquemas de argumento

Hasta ahora nos hemos ocupado fundamentalmente de la verdad de las oraciones. Para tal fin hemos construido un lenguaje formal, el de la lógica de predicados, y hemos mostrado cómo traducir a él (ciertos tipos de) oraciones del lenguaje natural. También hemos desarrollado condiciones que determinan la verdad o falsedad de oraciones dadas en lógica de predicados bajo circunstancias dadas, esto es, en cualquier modelo proporcionado. No se trata de que tuviéramos en mente algunas oraciones en particular de las que deseábamos estimar su verdad o falsedad. Nuestra idea era mostrar cómo el valor de verdad de una oración depende del significado de las partes con las que se construye.

Abordaremos ahora otro problema relacionado con el anterior: el modo en que la aceptación de ciertas oraciones puede comprometernos a aceptar otras oraciones. Èste es un aspecto importante de la cuestión más general de las interdependencias entre los significados de las oraciones.

Es bastante corriente, en el lenguaje cotidiano aceptar una oración simplemente porque ya se han aceptado previamente otras oraciones de las cuales se sigue la primera por algún tipo de argumento. Los argumentos más simples son aquellos en los cuales algunas oraciones previamente aceptadas (los *supuestos*, o premisas) son seguidas por una expresión tal como *luego* y a continuación por una nueva oración (la *conclusión* del argumento). Hemos visto algunos ejemplos de argumentos en §1.1. En los capítulos 2 y 3 hemos traducido al lenguaje formal oraciones derivadas del lenguaje natural y ahora haremos lo mismo con los argumentos. Pero nos atendremos a estos tipos de argumentos simples, dado que son tantos los factores que determinan las formas de los argumentos y el grado en que son convincentes que parecería estar fuera de nuestro alcance un tratamiento general de este tema. Podría decirse que en lógica nos restringimos a los resultados a los que lleva un argumento, lo cual es de algún modo otra *extensionalización*: lo único que realmente importa de un argumento es si su conclusión está justificada o no por sus supuestos. Traduciendo los supuestos de un argumento dado a la lógica de predicados como las oraciones $\phi_1,\ldots,\phi_n$ y su conclusión como la oración ψ, obtenemos un *esquema de argumento* $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$. Éste tiene a $\phi_1,\ldots,\phi_n$ como premisas y a ψ como su conclusión. Si aceptar $\phi_1,\ldots,\phi_n$ nos compromete a aceptar ψ, entonces decimos que este esquema de argumento es *válido*, y que ψ es una *consecuencia lógica* de $\phi_1,\ldots,\phi_n$. También de un argumento informal se dice que es válido si puede ser traducido a un esquema de argumento válido.

Las constantes lógicas que aparecen en las fórmulas de un esquema de argumento son los únicos símbolos cuyo significado determina si éste es válido o no. Esto puede dar como resultado que algún esquema intuitivamente válido sea reconocido como inválido, dado que otras expresiones distintas de las constantes lógicas pueden ocultar aspectos del significado que proporcionan al argumento credibilidad intuitiva. Esto puede evitarse, por ejemplo, explicitando el significado oculto en premisas adicionales. En efecto, hemos considerado un ejemplo precisamente de este tipo en la discusión del argumento (8) en §3.1. Aquí volveremos a numerar el argumento como (1).

(1) Gaspar es más grande que Juan.
Juan es más grande que Pedro.
———————————————
Gaspar es más grande que Pedro.

Una traducción directa resulta en un esquema de argumento que (como veremos) es inválido: Ggj,Gjp/Ggp. Pero agregando la transitividad de *más grande que*, mencionada en esa discusión, resulta en el siguiente esquema de argumento, el cual (como veremos) *es* válido: $Ggj, Gjp, \forall x \forall y \forall z((Gxy \land Gyz) \rightarrow Gxz)/Ggp$.

Existen dos enfoques esencialmente diferentes de la noción de validez tal como se la aplica a los esquemas de argumento. El primero es el enfoque *semántico*, el cual conlleva la interpretación de las oraciones de la lógica de predicados y, por lo tanto, conceptos como modelo y verdad. Este enfoque será desarrollado de un modo sistemático en §4.2, pero no estaría de más anticiparse dando la definición intuitiva de validez (semántica) para esquemas de argumento en lógica de predicados.

Definición 1

> $\phi_1,\ldots, \phi_n/\psi$ es *semánticamente válido* si para todo modelo M que interprete todas las letras de predicado, constantes y cualquier símbolo de función que aparezca en $\phi_1,\ldots, \phi_n, \psi$, y para los cuales $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n) = 1$, también se cumple que $V_M(\psi) = 1$.

En otras palabras, $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ es (semánticamente) válido si no es posible que tanto $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n) = 1$, y $V_M(\psi) = 0$. Aceptar la *verdad* de $\phi_1,\ldots,\phi_n$ nos compromete, pues, a aceptar la verdad de ψ. Si $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ no contiene ninguna premisa, es decir $n = 0$, la validez del esquema de argumento depende de si ψ puede ser inferido o no de todos modos a partir de nada. Luego, la definición se reduce a: ψ es semánticamente válido sii ψ es universalmente válida (en lógica proposicional: una tautología).

El segundo enfoque de la noción de validez es por vía de métodos sintácticos. A pesar de que los métodos semánticos tienden a proporcionar una mejor comprensión (y tienden a ser más fértiles en cuanto a, por ejemplo, sus aplicaciones lingüísticas), ninguna introducción a la lógica sería completa sin un tratamiento sintáctico de la noción de inferencia. La noción semántica de validez se basa en una cuantificación universal sobre esa misteriosa totalidad, la clase de todos los modelos (existen infinitos modelos, y los modelos mismos pueden ser infinitamente grandes). La noción de significado que usamos en el enfoque sintáctico es más instrumental: el significado de una parte de una oración reside en las conclusiones que pueden inferirse de esa oración gracias a que justamente esa parte aparece precisamente en ese lugar. En función de las consideraciones anteriores se construye una lista precisa y finita de pequeños pasos de razonamientos casi enteramente triviales. Estos pasos pueden vincularse para formar cadenas formales de argumentos más extensas que se denominan *derivaciones*. Las relaciones de inferencia sintáctica tienen, pues, la siguiente forma: $\phi_1, \ldots, \phi_n/\psi$ es *sintácticamente válido* si existe una derivación de ψ a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$. El enfoque sintáctico que hemos elegido es el de la *deducción natural*. El mismo ilustra más claramente el punto de vista instrumental acerca del significado de las conectivas y de los cuantificadores. Y este nuevo punto de vista también debería ayudar a profundizar nuestra comprensión de lo que significan las constantes lógicas.

Discutiremos los enfoques semántico y sintáctico en §§4.2 y 4.3, respectivamente. Después, en §4.4, discutiremos importantes conexiones entre ambos. En última instancia resultará que estos dos métodos divergentes nos llevan a considerar como válidos exactamente los mismos esquemas de argumento. Reconforta saber que la noción semántica de validez, con su fuerte compromiso ontológico, corre paralela a métodos combinatorios simples que evitan por completo tales conceptos abstractos (véase §4.4).

Concluimos esta sección con algunos comentarios acerca de la vinculación entre las relaciones de inferencia y el significado de una oración o de una parte de una oración. En realidad, el hecho de que, por ejemplo, ψ se siga de ϕ (ϕ/ψ es válido) indica que hay una conexión entre los significados de ϕ y ψ. Pero si no solamente ψ se sigue de ϕ sino que también ϕ se sigue de ψ, entonces hay un sentido en el cual ϕ y ψ tienen el mismo significado. En tales casos se dice que ϕ y ψ tienen el mismo *significado extensional*. No es muy difícil apreciar que (y esto se probará en el teorema 3 en §4.2.2), semánticamente hablando, esto es igual a la equivalencia de ϕ y ψ. La lógica de predicados tiene la propiedad de que ϕ y ψ pueden ser libremente sustituidas una por la otra sin pérdida de significado extensional en tanto sean equivalentes (esto es, en tanto tengan el mismo significado extensional). Nos referiremos a esto como el *principio de extensionalidad* para la lógica de predicados. Estas observaciones se aplican directamente sólo a aquellas oraciones que comparten el mismo significado en sentido 'lógico' estricto. Hay pares de oraciones como (2) y (3) que son un poco más complicadas:

(2) Gaspar es más grande que Pedro.

Pedro es más pequeño que Gaspar.

(3) Pedro es soltero.

Pedro es un hombre no casado.

Discutiremos esto brevemente en §4.2.2.

4.2 Relaciones de inferencia semánticas

4.2.1 *Validez semántica*

Primero analizaremos en forma ligeramente distinta la definición de validez semántica, a la que nos referiremos sencillamente como *validez*. Presentaremos en primer lugar la definición para la lógica de predicados; inmediatamente después se presentará la restricción obvia para la lógica proposicional.

Definición 2

(a) Un modelo M es *apropiado* para un esquema de argumento $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ si todas las letras de predicado, constantes y símbolos de funciones que aparecen en $\phi_1,\ldots,\phi_n$ o en ψ están interpretados en M.

(b) $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ es *válido* (en notación abreviada: $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$) si para todo modelo M apropiado para $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ se cumple que $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n) = 1$, entonces se cumple que $V_M(\psi) = 1$.

En este caso también decimos que ψ es una *consecuencia semántica* de $\phi_1,\ldots,\phi_n$. Si $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ no es válido, entonces también puede escribirse como $\phi_1,\ldots,\phi_n \not\models \psi$.

Nótese que si $n = 0$, la validez de $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ se reduce a la validez universal de ψ y que la notación $\models$ no es por tanto más que una ampliación de la notación introducida en §3.6.4. La definición para la lógica proposicional es un poco más simple:

Definición 3

Para fórmulas $\phi_1,\ldots,\phi_n$, ψ de la lógica proposicional, se cumple que $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$ sólo en caso que para toda valuación V tal que $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n) = 1$, se cumple que $V_M(\psi) = 1$.

Podríamos, por supuesto, restringirnos a usar únicamente valuaciones 'apropiadas' para $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ siendo éstas funciones que proyectan todas las letras proposicionales que aparecen en $\phi_1,\ldots,\phi_n$, ψ sobre 0 o 1, pero no necesariamente todas las demás letras proposicionales. De hecho esto es más o menos lo que hacemos en las tablas de verdad.

En lógica proposicional puede decidirse la validez de todo esquema de argumento por medio de las tablas de verdad. Discutiremos los esquemas (4) y (5) como ejemplos:

(4) $p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r / \neg p$

(5) $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r / p$

La tabla de verdad para (4) se da en (6):

(6)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$		$\neg p$
1	1	1	1	1	0	0		
1	1	0	0	0	1	1		
1	0	1	0	0	0	1		
1	0	0	0	0	1	1		
0	1	1	1	1	0	0		
0	1	0	0	1	1	1	*	1
0	0	1	0	1	0	1	*	1
0	0	0	0	1	1	1	*	1

Sólo tenemos que tener en cuenta la valuación de la conclusión $\neg p$ en los casos (marcados con *) en los cuales las valuaciones de las premisas $p \rightarrow (q \wedge r)$ y $q \rightarrow \neg r$ son ambas 1. Ahora bien, en cada uno de esos tres casos $\neg p$ tiene el valor 1. Entonces $p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow \neg r \models \neg p$.
La tabla de verdad para el esquema (5) se consigna en (7):

(7)

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$		p
1	1	1	0	0	0	1	0	1	*	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	*	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0		
1	0	0	0	1	0	1	1	1	*	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1		
0	1	0	1	1	1	1	0	1	*	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0		
0	0	0	1	1	0	0	1	1		

En esta tabla de verdad queda de manifiesto que si V es tal que V(p) = 0, V(q = 1 y V(r) = 0, entonces se cumple que $V(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)) = V(\neg q \rightarrow \neg r) = 1$ y V(p = 0. Queda claro, a partir de lo anterior, que $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg \not\models p$. Una valuación como V con V(p) = 0, V(q) = 1 y V(r) = 0, la cual muestra que un esquema de argumento no es válido, se denomina *contraejemplo* de ese esquema de argumento (por ejemplo, la V dada es un contraejemplo de $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), (\neg q \rightarrow \neg r) / p$).

Si uno lo desea se puede convertir un contraejemplo de este tipo en un contraejemplo de la vida real, reemplazando las letras proposicionales por oraciones reales con los mismos valores de verdad que las proposiciones que reemplazan. En este caso, por ejemplo:

p: Nueva York está en el Reino Unido; q: Londres está en el Reino Unido; r: Moscú está en el Reino Unido.

Ejercicio 1:

Determine si los siguientes esquemas de argumento son válidos. Si el esquema es inválido proporcione un contraejemplo.

(a) $p \wedge q \,/\, p$

(b) $p \wedge q \,/\, q$

(c) $p \vee q \,/\, p$

(d) $p, q \,/\, p \wedge q$

(e) $p \,/\, p \vee q$

(f) $q / p \vee q$

(g) $p / p \wedge q$

(h) $p, p \rightarrow q \,/ q$

(i) $p, q \rightarrow p \,/\, q$

(j) $p, \neg p \,/\, q$

(k) $p \rightarrow (q \wedge \neg q) \,/\, \neg p$

(l) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \,/\, r$

(m) $p \vee q, (p \wedge q) \rightarrow r \,/\, r$

(n) $p \vee q, p \rightarrow q \,/\, q$

(o) $p \vee q, p \rightarrow q \,/\, p$

(p) $p \rightarrow q, \neg q / \neg p$

(q) $p \rightarrow q \,/\, \neg p \rightarrow \neg q$

Una diferencia esencial entre la lógica proposicional y la lógica de predicados es que en lógica proposicional, para determinar la validez de un esquema de argumento, siempre es suficiente un número finito de valuaciones (adecuadas). Mientras que en la lógica de predicados un número infinito de modelos pueden ser relevantes respecto de la validez de un esquema de argumento; y los modelos mismos pueden también ser infinitos. Esto sugiere que bien podría no haber un método que en un número finito de pasos nos permita determinar si cualquier esquema de argumento dado, en lógica de predicados, es válido o inválido. La sospecha de que no existe un método general ha sido formulada con precisión y ha sido probada; éste es seguramente uno de los resultados más sorprendentes en la lógica moderna (véase el Teorema de Church en §4.4). En lógica de predicados existen métodos sistemáticos para investigar la validez de esquemas de argumento, pero éstos no pueden garantizar un resultado positivo o negativo en un tiempo finito para cada esquema de argumento. No discutiremos ninguno de estos métodos sistemáticos pero daremos unos pocos ejemplos que muestran que en la práctica las cosas no son tan malas mientras nos restrinjamos a fórmulas sencillas.

A los contraejemplos del cálculo de predicados también se les denomina *contramodelos*. Como hemos mencionado en §3.6.3, podemos restringirnos a modelos en los cuales cada elemento del dominio tiene un nombre. Hacemos esto en los ejemplos (a)-(h).

(a) Comenzamos por un esquema sencillo de argumento inválido: $\exists xLx / \forall xLx$ (la traducción de un argumento del lenguaje natural tal como *Hay mentirosos. Luego, todos son mentirosos*).

Prueba: (de que el esquema no es válido). Para este propósito necesitamos un modelo M con $V_M(\exists xLx) = 1$ y $V_M(\forall xLx) = 0$. Un modelo tal se denomina *contraejemplo de*, o *contramodelo para*, el esquema. En este caso no es difícil construir un contraejemplo. Por ejemplo, sea $D = \{1, 2\}$, $I(L) = \{1\}$, $I(a_1) = 1$, e $I(a_2) = 2$. Luego, tenemos que $V_M(\exists xLx) = 1$, dado que $V_M(La_1) = 1$ porque $1 \in$

I(L). Y, por otra parte, $V_M(\forall xLx) = 0$, dado que, $V_M(La_2) = 0$ porque $2 \notin I(L)$. Siguiendo esta línea podemos construir un contramodelo más concreto M'. Supongamos que Ana es mentirosa y Beatriz no. Tenemos D_M = {Ana, Beatriz}, $I_{M'}(L$ = {Ana} y también $I_M(a_1)$ = Ana e $I_{M'}(a_2)$ = Beatriz. Luego, exactamente el mismo argumento que se ha dado antes muestra que $V_M(\exists xLx) = 1$, mientras que $V_{M'}(\forall xLx) = 0$. Es más realista aún si se define M"con $D_{M'}$ = el conjunto de todas las personas e $I_{M'}(L)$ = el conjunto de todos los mentirosos. Si una vez más suponemos que Ana es mentirosa y Beatriz no, e introducimos un vasto número de otras constantes para dar un nombre a cualquier otro individuo, entonces razonando de modo similar obtenemos nuevamente que $V_{M'}(\exists xLx) = 1$ y $V_{M'}(\forall xLx) = 0$. Debería haber quedado suficientemente claro no sólo que los modelos abstractos son más fáciles de manejar sino también que nos ayudan a evitar introducir presuposiciones inadvertidamente. En lo que sigue, entonces, todos los contraejemplos serán modelos abstractos cuyos dominios son conjuntos de números.

(b) Consideremos ahora un ejemplo sencillo de esquema de argumento válido: $\forall xSx/Sa_1$ (una traducción de, por ejemplo, *Todos son mortales. Luego Sócrates es mortal*). Debemos mostrar que $V_M(Sa_1) = 1$ para todo modelo apropiado tal que $V_M(\forall xSx) = 1$.Demos esto último por supuesto. De modo que para toda constante a interpretada en M, $V_M(Sa) = 1$. La constante a_1 debe ser interpretada en M, dado que M es apropiado para $\forall xSx/Sa_1$. Así, tiene que cumplirse que $V_M(Sa_1 = 1$. Hemos probado de esta manera que $\forall xSx \models Sa_1$.

(c) El esquema válido $\forall x(Mx \rightarrow Sx), Ma_1/Sa_1$(una traducción de, por ejemplo, *Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Luego, Sócrates es mortal*) es ligeramente más complicado. Sea M apropiado para este esquema y $V_M(\forall x(Mx \rightarrow Sx)) = V_M(Ma_1) = 1$. Luego, debe cumplirse que $V_M(Ma \rightarrow Sa) = 1$, para toda constante a que es interpretada en M. Así, en particular, tenemos que $V_M(Ma_1 \rightarrow Sa_1) = 1$. Junto con $V_M(Ma_1) = 1$, esto implica directamente que $V_M(Sa_1) = 1$. De este modo, hemos mostrado que $\forall x(Mx \rightarrow Sx), Ma_1 \models Sa_1$.

(d) El esquema $\forall x\exists yAxy/\exists y\forall xAxy$ (una traducción de *Todos aman a alguien. Luego, existe alguien a quien todos aman*) es inválido. Para demostrarlo se requiere de un modelo M en el que se interpreta A, y tal que $V_M(\forall x\exists yAxy) = 1$ mientras que $V_M(\exists y\forall xAxy) = 0$. Elegimos D = {1, 2}, $I(a_1) = 1$ e $I(a_2) = 2$ e $I(A) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ (así, interpretamos a A como la relación de desigualdad en D: los pares $\langle 1,1\rangle$ y $\langle 2,2\rangle$ están ausentes en I(A)). Ahora tenemos que $V_M(\forall x\exists yAxy) = 1$,porque (i) $V_M(\exists yAa_1y = 1$, dado que $V_M(Aa_1a_2) = 1$; y (ii) $V_M(\exists yAa_2y) = 1$, dado que $V_M(Aa_2a_1) = 1$. Pero, por otra parte, tenemos que $V_M(\exists y\forall xAxy) = 0$, porque (iii) $V_M(\forall xAxa_1) = 0$, dado que $V_M(Aa_1a_1) = 0$; y (iv) $V_M(\forall xAxa_2) = 0$, ya que $V_M(Aa_2a_2) = 0$. Así hemos mostrado que $\forall x\exists yAxy \not\models \exists y\forall xAxy$. También se obtiene un contraejemplo si se interpreta a A como la relación de igualdad. Teniendo en cuenta la traducción, tal vez esto último sea más realista. El contraejemplo dado en (d) puede modificarse sencillamente de modo tal que se transforme en un contraejemplo del esquema de argumento (e).

(e) $\forall x(Ox \rightarrow \exists y(By \wedge Lxy))/\exists y(By \wedge \forall x(Ox \rightarrow Lxy))$ (una traducción de, por ejemplo, *Todos los lógicos están leyendo un libro. Luego, hay un libro que están leyendo todos los lógicos*). Si tomamos I(O) = D e I(B) = D, entonces el contraejemplo dado en (d) también sirve como contraejemplo para este esquema. Técnicamente esto es correcto pero, sin embargo, podríamos plantear objeciones. El esquema informal que se pretende traducir parece presuponer implícitamente que los lógicos no son libros y que los libros no son lógicos y que, además de los libros y de los lógicos, existen otras cosas en el mundo. Estas presuposiciones implícitas pueden hacerse explícitas incluyendo premisas que las expresen en el esquema de argumento. El esquema resultante, $\forall x(Ox \rightarrow \neg Bx)$, $\exists x(\neg Ox \wedge \neg Bx)$, $\forall x(Ox \rightarrow \exists y(By \wedge Lxy))/\exists y(By \wedge \forall x(Ox \rightarrow Lxy))$, no es más válido que el original. Ahora, en un contramodelo M' elegimos $D_{M'} = \{1,2,3,4,5\}$, $I(a_1) = 1$, $I(a_2) = 2$, etc., $I(O) = \{1,2\}$, $I(B) = \{3,4\}$ e $I(L) = \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$. Siendo así, no es demasiado difícil comprobar que, en efecto, tenemos $V_{M'}(\forall x(Ox \rightarrow \neg Bx) = V_{M'}(\exists x(\neg Ox \wedge \neg Bx) = V_{M'}(\forall x(Ox \rightarrow \exists y(By \wedge Lxy))) = 1$, mientras que $V_{M'}(\exists y(By \wedge \forall x(Ox \rightarrow Lxy))) = 0$.

(f) $\exists y\forall xAxy/\forall x\exists yAxy$ (una traducción de, por ejemplo, *Existe alguien a quien todos aman. Luego, todos aman a alguien*). A diferencia de la *conmutación de cuantificadores* realizada en (d), esta conmutación de cuantificadores es válida. Supóngase $V_M(\exists y\forall xAxy) = 1$. Tenemos que mostrar entonces $V_M(\forall x\exists yAxy) = 1$.

De acuerdo con el supuesto anterior, hay una constante a interpretada en M, tal que $V_M(\forall xAxa) = 1$. Esto significa que para cada constante b que se interpreta en M, $V_M(Aba)=1$. Ahora bien, para cada b también debe cumplirse que $V_M(\exists yAby)=1$, y por ello está garantizado que $V_M(\forall x\exists yAxy) = 1$, probándose que $\exists y\forall xAxy \models \forall x\exists yAxy$. La prueba de que la inversa de (e) es un esquema de argumento válido es un poco más complicada, pero sigue la misma línea de desarrollo.

(g) $\forall xMx/\exists xMx$ (una traducción de, por ejemplo, *Todos son mortales. Luego, alguien es mortal*). Supóngase que M es apropiado para este esquema y que $V_M(\forall xMx) = 1$. Así, para cada constante a que es interpretada en M se cumple que $V_M(Ma) = 1$. Tal constante tiene que existir, dado que estuvimos de acuerdo en que los dominios nunca pueden ser vacíos, mientras que en nuestro enfoque A cada elemento del dominio tiene un nombre. Así, $V_M(\exists xMx) = 1$. Hemos probado pues que el esquema es válido: $\forall xMx \models \exists xMx$. La validez de este esquema depende de nuestra elección de dominios no vacíos. Cabe agregar que Aristóteles consideró sólo predicados con extensiones no vacías. Por tanto, en su lógica, a diferencia de la lógica moderna, el siguiente esquema es válido.

(h) $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ /$\exists x(Hx \wedge Mx)$ (una traducción de, por ejemplo, *Todos los hombres son mortales. Luego, algunos hombres son mortales*). Como contraejemplo tenemos por caso, M con $D_M = \{1\}$, $I(H) = I(M)=\varnothing$, e $I(a_1) = 1$. Porque entonces tenemos $V_M(Ha_1 \rightarrow Ma_1) = 1$, de manera que $V_M(\forall x(Hx \rightarrow Mx))$ $=1$, mientras que $V_M(Ha_1 \wedge Ma_1) = 0$, por tanto $V_M(\exists x(Hx \wedge Mx)) = 0$. Si esto parece un poco extraño, debería recordarse que este esquema también puede verse como una traducción de un esquema intuitivamente inválido: *Todos los unicornios son cuadrúpedos. Luego, hay unicornios que son cuadrúpedos.* Además, la traducción original incluye la presuposición implícita de que hay de hecho 'hombres', en el sentido arcaico de seres humanos. Esta presuposición puede hacerse explícita agregando una premisa que la exprese, y el esquema de argumento resultante $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$, $\exists xHx/\exists x(Hx \wedge Mx)$ es válido. Para apreciar esto, sea M cualquier modelo apropiado para este esquema y tal que $V_M(\forall x(Hx \rightarrow Mx)) = 1$ y $V_M(\exists xHx) = 1$. Ahora tenemos que mostrar que $V_M(\exists x(Hx \wedge Mx)) = 1$. El segundo supuesto nos proporciona una constante a que se interpreta en M y para la cual $V_M(Ha) = 1$. Del supuesto $V_M(\forall x(Hx \rightarrow Mx)) = 1$ se sigue, en particular, que $V_M(Ha \rightarrow Ma) = 1$, de lo que se sigue por la tabla de verdad de $\rightarrow$ que $V_M(Ma) = 1$ y, entonces, por la tabla de verdad de $\wedge$ se sigue que $V_M(Ha \wedge Ma) = 1$. Ahora, se sigue directamente que $V_M(\exists x(Hx \wedge Mx)) = 1$.

Ejercicio 2

Mediante contraejemplos muestre que los siguientes esquemas de argumento son inválidos.

(a) $\exists xAx, \exists xBx/\exists x(Ax \wedge Bx)$
(b) $\forall x(Ax \vee Bx)/\forall xAx \vee \forall xBx$
(c) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists xBx/\neg\exists xAx$.
(d) $\exists x(Ax \wedge Bx), \exists x(Bx \wedge Cx)/\exists x(Ax \wedge Cx)$
(e) $\forall x(Ax \vee Bx), \exists x\neg Ax, \exists x\neg Bx, \forall x((Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx)/\exists xCx$
(f) $\neg\forall x(Ax \rightarrow Bx), \neg\forall xBx/\forall xAx$
(g) $\forall xAx/\exists x(Bx \wedge \neg Bx)$
(h) $\forall x\exists yRxy/\exists xRxx$
(i) $\forall xRxx/\forall x\forall yRxy$
(j) $\exists x\forall yRxy, \forall xRxx/\forall x\forall y(Rxy \vee Ryx)$
(k) $\forall x\exists yRxy, \forall x(Rxx \leftrightarrow Ax)/\exists xAx$
(l) $\forall x\exists yRxy, \forall x\forall y(Rxy \vee Ryx)/\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
(m) $\forall x\exists yRxy, \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)/\exists xRxx$
(n) $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx), \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)/\exists xRxx$
(o) $\exists x\exists y\forall z(x = z \vee y = z)/\forall x\forall y(x = y)$
(p) $\forall x\exists y(x \neq y)/\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
(q) $\forall x\exists y(Rxy \wedge x \neq y), \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)/\forall x\forall y(x = y \vee Rxy \vee Ryx)$
(r) $\forall x(Ax \leftrightarrow \forall yRxy), \exists x\forall y(Ay \leftrightarrow x = y)/\forall x\forall y((Rxx \wedge Ryy) \rightarrow x = y)$

4.2.2 *El principio de extensionalidad*

A continuación nos ocuparemos del principio de extensionalidad para la lógica de predicados y de las propiedades de sustitución estrechamente relacionadas con el mismo. Además, demostraremos algunas de estas propiedades. El siguiente teorema que muestra una relación entre argumentos (de premisas a conclusiones) e implicaciones materiales (de antecedentes a consecuentes) servirá como introducción :

Teorema 1

(a) $\phi \models \psi$ sii $\models \phi \rightarrow \psi$
(b) $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ sii $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \models \phi_n \rightarrow \psi$

Prueba: Será suficiente con una prueba de (b), dado que (a) es un caso especial de (b).

(b) $\Rightarrow$: Supóngase $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$. Supóngase además que para alguna V adecuada (si las referencias al modelo del cual se origina V son irrelevantes, las dejaremos de lado), $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_{n-1}) = 1$.Tenemos que mostrar que $V(\phi_n \rightarrow \psi) = 1$. Supóngase que este no sea el caso. Luego, por la tabla de verdad de · se sigue que $V(\phi_n) = 1$ y $V(\psi) = 0$. Pero esto es imposible, dado que de ser así toda $V(\phi_1),\ldots,V(\phi_n)$ tendría el valor 1. Por ende, de $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$ se sigue que $V(\psi) = 1$ y no 0.

(b) $\Leftarrow$: Supóngase $\phi_1,\ldots,\phi_{n-1} \models \phi_n \rightarrow \psi$. Supóngase además que para alguna V adecuada $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_n) = 1$. Tenemos que mostrar que necesariamente $V(\psi) = 1$. Ahora, si $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_n) = 1$, entonces obviamente $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_{n-1}) = 1$. De acuerdo con el supuesto, tenemos entonces que $V(\phi_n \rightarrow \psi) = 1$, de lo cual, junto con $V(\phi_n) = 1$, se sigue que $V(\psi) = 1$.□

Una consecuencia directa de este teorema es que para determinar cuáles esquemas de argumento son válidos, es suficiente con saber cuáles fórmulas son universalmente válidas. Esto se expresa en el teorema 2:

Teorema 2

$$\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi \text{ sii } \models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\phi_n \rightarrow \psi)\ldots)) \text{ sii } \models (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi.$$

Prueba: Una aplicación repetida del teorema 1.□

Hay un teorema sobre equivalencia material que es análogo al teorema 1 y que ya hemos encontrado en logica proposicional.

Teorema 3

Las siguientes afirmaciones pueden deducirse unas de otras; son equivalentes:

(i) $\phi \models \psi$ y $\psi \models \phi$

(ii) ϕ es equivalente a ψ

(iii) $\models \phi \leftrightarrow \psi$

Prueba: Es suficiente con probar que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supóngase (i). Supóngase primero que $V(\phi) = 1$. Luego, $V(\psi) = 1$, porque $\phi \models \psi$. Ahora supóngase que $V(\phi) = 0$. Luego, es imposible que $V(\psi) = 1$, dado que en este caso de $\psi \models \phi$ se seguiría que $V(\phi) = 1$ y así también que $V(\psi) = 0$. Evidentemente $V(\phi) = V(\psi)$ bajo toda circunstancia, por tanto, ϕ y ψ son equivalentes, por definición.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supóngase (ii). Tenemos que probar ahora que $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ para cualquier V adecuada. Pero esto es inmediatamente evidente, dado que bajo toda circunstancia $V(\phi) = V(\psi)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supóngase (iii). Ahora supóngase que para alguna V adecuada para $\phi \models \psi$, $V(\phi) = 1$. Puesto que $\phi \leftrightarrow \psi$ es universalmente válida, $V(\phi) = V(\psi)$ se cumple para toda V. De esto se sigue que $V(\psi) = 1$ y así hemos probado que $\phi \models \psi$. Exactamente de la misma manera puede probarse que $\psi \models \phi$.□

Este teorema puede reforzarse del mismo modo que el teorema 1(a) se refuerza con el 1(b).

Teorema 4:

$(\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi \models \chi$ y $\phi_1,\ldots,\phi_n, \chi \models \psi)$ sii $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi \leftrightarrow \chi$.

Omitiremos la prueba.

Ahora estamos en condiciones de dar una versión simple del teorema prometido según el cual en lógica de predicados, al igual que en lógica proposicional, las fórmulas equivalentes pueden sustituirse entre sí, sin pérdida de significado extensional. En primer lugar formularemos este teorema para oraciones, es decir, para fórmulas sin variables libres.

Teorema 5:

Si ϕ y ψ son equivalentes, ϕ es una subfórmula de χ, y $[\psi/\phi]\chi$ es la fórmula que se obtiene reemplanzando esta subfórmula ϕ por ψ en χ , entonces χ y $[\psi/\phi]\chi$ son equivalentes.

Bosquejo de prueba: Puede darse una prueba rigurosa por inducción sobre (la construcción de) χ. Sin embargo está claro (¡el principio de composicionalidad de Frege!) que el valor de verdad de ϕ tiene exactamente el mismo efecto sobre el valor de verdad de χ que el que tiene el valor de verdad de ψ sobre el valor de verdad de $[\psi/\phi]\chi$. De manera que si ϕ y ψ tienen los mismos valores de verdad, entonces también deben tenerlos χ y $[\psi/\phi]\chi$.□

El mismo razonamiento también prueba el próximo teorema más potente (en el cual ϕ, ψ, χ, $[\psi/\phi]\chi$ son las mismas que más arriba):

Teorema 6: (*Principio de extensionalidad para oraciones en lógica de predicados*)

$$\phi \leftrightarrow \psi \models \chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi.$$

Y una consecuencia directa del teorema 6 es:

Teorema 7:

Si $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \phi \leftrightarrow \psi$, entonces $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi$.

Prueba: supóngase que $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \phi \leftrightarrow \psi$. Además, para cualquier V adecuada, sea $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_n) = 1$. Luego, ciertamente $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$. De acuerdo con el teorema 6 tenemos entonces que $V(\chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi) = 1$, con lo cual queda probado que $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi$.□

El teorema 7 puede parafrasearse del siguiente modo: si bajo supuestos dados dos oraciones son equivalentes (poseen el mismo significado extensional), entonces bajo los mismos supuestos puede sustituirse una por otra sin pérdida de significado extensional. También hay un principio de extensionalidad para fórmulas en general; pero antes de formularlo debemos generalizar el teorema 3, para poder emplear más cómodamente la equivalencia de fórmulas.

Teorema 8:

Si las variables libres en ϕ y ψ se encuentran entre $x_1,\ldots,x_n$, entonces ϕ y ψ son equivalentes sii $\models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Prueba: la prueba se dará sólo para $n = 1$, dado que el caso general no es esencialmente diferente. Escribiremos x en lugar de x_1.

$\Rightarrow$: Supóngase que ϕ y ψ son equivalentes. Luego, por definición, para todo M adecuado y g, $V_{M,g}(\phi) = V_{M,g}(\psi)$. Esto es, para todo M apropiado y g, $V_{Mg}(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$. Pero, entonces, para todo M apropiado g, y $d \in D_M$, se cumple que $V_{M,g[x/d]}(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$. De acuerdo con la definición de verdad de Tarski, esto significa que para todo M apropiado y g se cumple que $V_{M\,g}(\forall x(\phi \leftrightarrow \psi)) = 1$. Y ésta es la conclusión que necesitábamos.

$\Leftarrow$: la prueba anterior de $\Rightarrow$ también sirve para la inversa.□

Ahora podemos probar por el prinicipio de extensionalidad para fórmulas en lógica de predicados del mismo modo en que hemos probado los teoremas 6 y 7. Daremos los teoremas pero omitiremos sus pruebas. Las condiciones sobre ϕ, ψ, χ y $[\psi/\phi]\chi$ son las mismas que las anteriores, excepto por el hecho de que ϕ y ψ pueden ser ahora fórmulas, a condición de que todas sus variables libres se encuentren entre $x_1,\ldots,x_n$ (si ϕ y ψ son oraciones, entonces $n = 0$).

Teorema 9: (*Principio de extensionalidad para la lógica de predicados*)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n(\phi \leftrightarrow \psi) \models \chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi$$

Teorema 10:

Si $\phi_1,\ldots,\phi_m \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\phi \leftrightarrow \psi)$ entonces $\phi_1,\ldots,\phi_m \models \chi \leftrightarrow [\psi/\phi]\chi$.

El teorema 10 expresa nuevamente el hecho de que fórmulas con el mismo significado extensional pueden sustituirse entre sí sin pérdida de significado extensional. De hecho este teorema justifica, por ejemplo, que se quiten los paréntesis en las conjunciones y disyunciones con más de dos miembros (véase §2.5). Los teoremas 9 y 10 pueden generalizarse, de manera que ϕ no necesite tener precisamente las variables $x_1,\ldots,x_n$ en χ. Sin embargo, una formulación más general resulta muy intrincada, razón por la cual no la daremos.

Concluimos nuestra discusión del principio de extensionalidad para la lógica de predicados con algunos ejemplos. Las fórmulas $\forall x(Ax \wedge Bx)$ y $\forall xAx \wedge \forall xBx$ son equivalentes. De esto se sigue, por el teorema 3, que $\forall x(Ax \wedge Bx) \models \forall xAx \wedge \forall xBx$, que $\forall xAx \wedge \forall xBx \models \forall x(Ax \wedge Bx)$ y que $\forall x(Ax \wedge Bx) \leftrightarrow (\forall xAx \wedge \forall xBx)$.

Esta último puede emplearse en el teorema 10, para $n = 0$. Si elegimos $\forall x(Ax \wedge Bx) \rightarrow \exists x \neg Cx$ como nuestra χ, entonces se sigue que $\forall x(Ax \wedge Bx) \rightarrow \exists x \neg Cx$ y que$(\forall xAx \wedge \forall xBx) \rightarrow \exists x \neg Cx$ son equivalentes entre sí. Y así sucesivamente.

Empleando el teorema 8, la equivalencia de $Ax \wedge Bx$ y de $Bx \wedge Ax$ da como resultado $\models \forall x((Ax \wedge Bx) \leftrightarrow (Bx \wedge Ax))$. Aplicándole el teorema 10, obtenemos la equivalencia de $\forall x((Ax \wedge Bx) \rightarrow \exists yRxy)$ y $\forall x((Bx \wedge Ax) \rightarrow \exists yRxy)$. Además de la conmutatividad de $\wedge$, también pueden aplicarse otras equivalencias, por ejemplo, las leyes asociativas para $\wedge$ y $\vee$. Esto último da como resultado que tanto en la lógica de predicados como en la lógica proposicional se pueden quitar los paréntesis en cadenas de conjunciones y en cadenas de disyunciones. La siguiente es una aplicación del teorema 10 para m > 0: no es difícil establecer que $\neg(\exists xAx \wedge \exists xBx) \models \forall x(Ax \vee Bx) \leftrightarrow (\forall xAx \vee \forall xBx)$. Tomando un ejemplo arbitrario de lo anterior se sigue que $\neg(\exists xAx \wedge \exists xBx) \models (\forall xCx \rightarrow \forall x(Ax \vee Bx)) \leftrightarrow (\forall xCx \rightarrow (\forall xAx \vee \forall xBx))$.

Dado lo anterior, podemos ampliar lo afirmado acerca de los problemas suscitados por los significados extralógicos. Hemos señalado estos problemas respecto de pares de oraciones como (8) (=(2)):

(8) Gaspar es más grande que Pedro.

Pedro es más pequeño que Gaspar.

Habiendo traducido *x es más grande que y* a lógica de predicados como Gxy, y *x es más pequeño que y* como Pxy, ahora tomamos a $\forall x \forall y(Gxy \leftrightarrow Pyx)$ como un supuesto permanente, dado que sólo estamos interesados en modelos M en los cuales $V_M(\forall x \forall y(Gxy \leftrightarrow Pyx)) = 1$. Bajo este supuesto, Gxy y Pyx son equivalentes. Además, de acuerdo con el teorema 10, Gzw y Pwz son equivalentes para variables arbitarias z, w, dado que $\forall x \forall y(Gxy \leftrightarrow Pyx) \models \forall z \forall w(Gzw \leftrightarrow Pwz)$. De hecho, no es difícil apreciar que Gt_1t_2 y Pt_2t_1 también son equivalentes para términos arbitrarios t_1 y t_2 como, por ejemplo, en Ga_1a_2 y Pa_2a_1. De manera que si traducimos *Gaspar* como a_1 y *Pedro* como a_2, las dos oraciones de (8) tienen el mismo significado extensional. Un supuesto de este tipo se denomina *postulado de significación*. El problema con (9) (= (3)).

(9) Pedro es soltero.

Pedro es un hombre no casado.

puede resolverse de un modo similar tomando a $\forall x((Hx \wedge \neg Cx) \leftrightarrow Sx)$ como nuestro postulado de significación; el diccionario para traducirlo es Sx: x es soltero; Cx: x es casado; Hx: x es un hombre. Los postulados de significación proporcionan información acerca del significado de las palabras. Son comparables a las definiciones de los diccionarios, en las cuales *soltero* se define, por ejemplo, como *hombre no casado*. En matemática algunos axiomas cumplen el papel de postulados de significación. Por ejemplo, los siguientes axiomas relacionan los significados de algunas nociones clave en geometría. Si, por ejemplo, interpretamos Px como x es un punto; Lx como x es una línea; y Sxy como x está sobre y, pueden inferirse los siguientes axiomas geométricos: $\forall x \forall y((Px \wedge Py \wedge x \neq y) \rightarrow \exists! z(Lz \wedge Sxz \wedge Syz))$, esto es, por dos puntos diferentes, pasa exactamente una línea, y

$\forall x \forall y((Lx \wedge Ly \wedge x \neq y) \rightarrow \forall z \forall w((Pz \wedge Pw \wedge Szx \wedge Szy \wedge Swx \wedge Swy) \rightarrow z = w)$, esto es, dos líneas diferentes tienen a lo sumo un punto en común.

Además de los principios discutidos más arriba, existen también principios de extensionalidad referidos a las constantes y a las variables, por supuesto que no en términos de los valores de verdad, sino en términos de los elementos de un dominio. Las constantes y las variables se interpretan como elementos de un dominio mediante asignaciones. Aquí hay dos ejemplos de teoremas de este tipo sin sus pruebas:

Teorema 11:

> Si s y t son términos que carecen de variables, entonces, para la fórmula $[t/s]\phi$ obtenida sustituyendo s por t en ϕ, tenemos: $s = t \models \phi \leftrightarrow [t/s]\phi$.

Teorema 12:

> Si s_1, s_2 y t son términos cuyas variables se encuentran entre $x_1,\ldots,x_n$, entonces, para el término $[s_2/s_1]t$ obtenido sustituyendo s_1 por s_2 en t, tenemos: $\models \forall x_1 \ldots \forall x_n(s_1 = s_2 \rightarrow [s_2/s_1]t = t)$.

A continuación consignamos algunas aplicaciones de estos teoremas en un lenguaje en el cual p es un símbolo de función binaria para la función adición: $a_4 = p(a_2, a_2) \models p(a_4, a_4) = p(p(a_2, a_2), p(a_2, a_2))$, y $\models \forall x \forall y \forall z(p(x,y) = p(y,x) \rightarrow p(p(x,y),z) = p(p(y,x),z))$.

Concluimos esta sección retomando brevemente lo expresado en §1.1: sustituyendo las variables por oraciones en un esquema de argumento válido se obtiene como resultado otro esquema de argumento válido. En lógica de predicados se cumple ciertamente que sustituyendo letras de predicado por fórmulas en un esquema de argumento válido obtenemos como resultado otro esquema de argumento válido. Pero, surgen complicaciones en relación con las variables libres y ligadas, lo cual nos conduce a colocar restricciones en las sustituciones, de manera que resulta dificultoso proporcionar una formulación general. Daremos sólo un ejemplo: la sustitución de letras proposicionales en esquemas de argumentos puramente proposicionales por fórmulas de la lógica de predicados:

Teorema 13:

> Supóngase que $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$ en lógica proposicional, y que $\phi_1,\ldots,\phi_n$ y ψ no contienen letras proposicionales que no sean $p_1,\ldots,p_m$.. Además, sean $\chi_1,\ldots,\chi_m$ oraciones en algún lenguaje L de la lógica de predicados, mientras que $\phi_1',\ldots,\phi_n'$ y ψ' se obtienen de $\phi_1,\ldots,\phi_n$ y ψ sustituyendo (simultáneamente) $p_1,\ldots,p_m$ por $\chi_1,\ldots,\chi_m$. Luego, $\phi_1',\ldots,\phi_n' \models \psi'$ en lógica de predicados.

Prueba: Supóngase que $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$, pero que $\phi_1',\ldots,\phi_n' \not\models \psi'$. En ese caso existe un contraejemplo M que es responsable de lo último: $V_M(\phi_1') = \ldots = V_M(\phi_n') = 1$ y $V_M(\psi') = 0$. Luego puede obtenerse un contraejemplo proposicional para el primer esquema de argumento tomando: $V(p_i) = V_M(\chi_i)$ para toda i entre 1 y m. Por tanto, es claro que $V(\phi_1) = \ldots = V(\phi_n) = 1$ pero que $V(\psi) = 0$, dado que $\phi_1,\ldots,\phi_n$ y ψ

están compuestos por $p_1,\ldots,p_m$ exactamente del mismo modo en que $\phi'_1,\ldots,\phi_n$ y ψ'están compuestos por $\ldots$ Tenemos ahora un contraejemplo para nuestro primer supuesto $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$, de manera que no puede darse el caso que $\phi_1,\ldots,\phi_n \not\models \psi$. □

Una consecuencia sencilla del teorema 13 es que las instancias de sustitución de las tautologías proposicionales son fórmulas universalmente válidas. A continuación se ofrecen algunos ejemplos:

$(r \vee s) \wedge (p \rightarrow q) \models (p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$, y

(a) $\forall x\exists yAxy \wedge \forall x\exists yBxy \models \forall x\exists yBxy \wedge \forall x\exists yAxy$

se siguen por T.13 de $p \wedge q \models q \wedge p$.

$\models (((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$, y

(b) $\models ((\forall xAx \rightarrow \exists yBy) \rightarrow \forall xAx) \rightarrow \forall xAx$.

se siguen por T.13 de $\models ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.

Concluimos esta sección con dos ejemplos de esquema de argumento tomados de la lógica de predicados, para los cuales sería excesivamente trabajoso formular un teorema general como el anterior:

$\forall x((Ax \wedge Bx) \vee (Ax \wedge Cx)), \exists x\neg(Ax \wedge Bx) \models \exists x(Ax \wedge Cx)$, y

(c) $\forall x(\exists yAxy \vee \exists zBxz), \exists x\neg\exists yAxy \models \exists x\exists zBxz$.

se siguen de $\forall x(Ax \vee Bx), \exists x\neg Ax \models \exists xBx$.

4.3 Deducción Natural: un enfoque sintáctico de la inferencia

4.3.1 *Reglas de introducción y de eliminación*

Como expusimos en §4.1, en el enfoque sintáctico de la noción de inferencia se especifica una lista finita de pequeños pasos constituidos por razonamientos que se supone son correctos. Luego se especifican reglas que informan acerca de la manera en que pueden vincularse esos pequeños pasos para formar *derivaciones*, es decir, la contrapartida formal de los argumentos. En el método de la deducción natural, estos pasos pueden considerarse como respuestas a las preguntas que se consignan a continuación, y que, a su vez, pueden formularse para cada una de las conectivas (más adelante también se las formulará respecto de los cuantificadores):

(a) ¿Cuándo puede inferirse como conclusión una fórmula cuyo signo principal sea dicha conectiva?

(b) ¿Qué conclusiones pueden inferirse a partir de una fórmula cuyo signo principal sea dicha conectiva?

Los pasos del razonamiento que responden a la pregunta (a) para una conectiva ° se indican en la *regla de introducción*, I°, para dicha conectiva. La respuesta a (b) para una conectiva $\circ$ consiste en su *regla de eliminación*, E$\circ$. Para la conectiva $\wedge$, las respuestas correspondientes a las preguntas (a) y (b) son las siguientes:

(a) Puede inferirse $\phi \wedge \psi$ como conclusión si se dispone tanto de ϕ como de ψ, sea como supuestos previamente formulados o como conclusiones previamente inferidas.

(b) Tanto ϕ como ψ pueden inferirse como conclusión de $\phi \wedge \psi$.

Estas consideraciones dan lugar al siguiente esquema (que, como veremos, está presentado en forma simplificada). Una *derivación* es una lista finita de fórmulas numeradas como la siguiente:

1.	ϕ_1
	$\vdots$
2.	ϕ_n

Al lado de cada fórmula ϕ_i debe anotarse la forma en que se la obtuvo, según cierto código fijo. Hay sólo dos formas diferentes de obtener una fórmula ϕ_i: o bien ϕ_i es un supuesto, en cuyo caso escribimos *supuesto* a su lado; o bien ϕ_i se obtuvo a partir de fórmulas que aparecen por encima de ella, por aplicación de alguna de las reglas aceptadas, en cuyo caso debe anotarse el nombre de la regla en cuestión, seguido por los números de las fórmulas a partir de las cuales se obtuvo ϕ_i. La última fórmula ϕ_n es la *conclusión*, siendo ésta la fórmula que se ha derivado. Los *supuestos* de esta derivación son aquellas fórmulas ϕ_i a cuyo lado se ha escrito *supuesto*. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_m$ los supuestos, escribimos $\phi_1, \ldots, \phi_m \vdash \phi_n$ y decimos: *existe una derivación de* ϕ_n *a partir de (los supuestos)* $\phi_1, \ldots, \phi_m$.

4.3.2 *Conjunción*

Teniendo en cuenta lo antedicho, procederemos a detallar las reglas para la conectiva $\wedge$. La *regla de introducción* I$\wedge$, por medio de la cual pueden inferirse como conclusiones fórmulas cuyo signo principal sea $\wedge$, es la siguiente:

1.	.	
	$\vdots$	
m_1	ϕ	
	$\vdots$	
m_2	ψ	
	$\vdots$	
n.	$\phi \wedge \psi$	I$\wedge$, m_1, m_2

En esta regla, no importa cuál de las fórmulas m_1 o m_2 aparezca primero. La regla I$\wedge$ se emplea en la siguiente derivación, muy sencilla, de $p \wedge q$ a partir de p y q:

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	$p \wedge q$	$I\wedge$, 1, 2

En razón de esta derivación, podemos afirmar que $p, q \vdash p \wedge q$. La siguiente es una derivación ligeramente más complicada, en la cual $(r \wedge p) \wedge q$ se deriva de p, q y r por medio de $I \wedge$:

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	r	supuesto
4.	$r \wedge p$	$I\wedge$, 3,1
5.	$(r \wedge p) \wedge q$	$I\wedge$, 4, 2

En razón de esta derivación, podemos afirmar que $p, q, r \vdash (r \wedge p) \wedge q$.

Ejercicio 3

Muestre que:

(a) $p, q \vdash q \wedge p$;

(b) $p, q, r \vdash q \wedge (p \wedge r)$.

La *regla de eliminación* $E\wedge$ nos proporciona dos formas de inferir conclusiones:

(i) 1. .

m. $\phi \wedge \psi$

n. ϕ $E\wedge$, m

(ii) 1. .

m. $\phi \wedge \psi$

n. ψ $E\wedge$, m

A manera de ejemplo de aplicación de $E\wedge$ presentamos a continuación la derivación de p a partir de $p \wedge q$.

1.	$p \wedge q$	supuesto
2.	p	$E\wedge$, 1

De esto se sigue que $p \wedge q \vdash p$. En la siguiente derivación de $q \wedge p$ a partir de $p \wedge q$, se aplican tanto I$\wedge$ como E$\wedge$:

1.	$p \wedge q$	supuesto
2.	p	E$\wedge$, 1
3.	q	E$\wedge$, 1
4.	$q \wedge p$	I$\wedge$, 3, 2

De esta derivación se sigue que $p \wedge q \vdash q \wedge p$. Como último ejemplo, presentamos una derivación un poco más extensa que muestra que $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$.

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	supuesto
2.	p	E$\wedge$, 1
3.	$q \wedge r$	E$\wedge$, 1
4.	q	E$\wedge$, 3
5.	r	E$\wedge$, 3
6.	$p \wedge q$	I$\wedge$, 2, 4
7.	$(p \wedge q) \wedge r$	I$\wedge$, 6, 5

Si bien esta derivación demuestra que $\wedge$ es asociativa, seguiremos escribiendo los paréntesis en las conjunciones con múltiples miembros. La razón de esto es que de lo contrario sería imposible aplicar E$\wedge$, dado que E$\wedge$ sólo acepta conjunciones con exactamente dos miembros. En el enfoque sintáctico que ahora estamos considerando, no tomamos en cuenta el significado de las fórmulas sino sólo su forma. Lo mismo se aplica para el caso de la disyunción.

Ejercicio 4

Muestre que $p \wedge (q \wedge r) \vdash r \wedge p$.

4.3.3 *Implicación*

Ahora nos ocuparemos de la conectiva · La *regla de eliminación* E$\rightarrow$ es bastante sencilla: de $\phi \rightarrow \psi$, estando ϕ también disponible, podemos inferir la conclusión ψ (*Modus Ponens*).

1.		
	$\vdots$	
m_1.	$\phi \rightarrow \psi$	
	$\vdots$	
m_2.	ϕ	
	$\vdots$	
n.	ψ	E$\rightarrow$, m_1, m_2

Como ejemplo, demostraremos que $p \rightarrow q, p \vdash q$

1. $p \rightarrow q$ supuesto
2. p supuesto
3. q E→, 1,2

La siguiente derivación de $p \wedge q$ a partir de $p \wedge r$, $r \rightarrow q$ emplea todas las reglas que hemos visto hasta ahora:

1. $p \wedge r$ supuesto
2. $r \rightarrow q$ supuesto
3. p E∧, 1
4. r E∧, 1
5. q E→, 2, 4
6. $p \wedge q$ I∧, 3, 5

Ejercicio 5

Muestre que

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \vdash r$.

(b) $p \rightarrow (q \wedge r), r \rightarrow s, p \vdash s$.

La *regla de introducción* I→ complica un poco las cosas. ¿Bajo qué circunstancias puede inferirse una conclusión de la forma $\phi \rightarrow \psi$? En realidad, en este libro ya hemos inferido algunas conclusiones que tienen una forma muy similar. Como lo hemos hecho notar en relación con el teorema 1 (en §2.5), la prueba de un teorema *si A entonces B* generalmente comienza suponiendo *A*, seguido por una demostración de que *B* se sigue inevitablemente. La regla de introducción de la implicación es análoga a ésta. Para derivar $\phi \rightarrow \psi$, primero suponemos ϕ y luego tratamos de derivar ψ. Si logramos hacerlo, entonces inferimos la conclusión $\phi \rightarrow \psi$, pero en ese momento ya no podemos proceder bajo el supuesto ϕ. Decimos que el supuesto ϕ es *cancelado* (o *retirado*). Esto es exactamente lo que hicimos en la prueba del teorema 1. Primero supusimos *A*, y luego probamos *B*. Habiendo hecho esto, estuvimos satisfechos respecto de *si A, entonces B* y proseguimos con la prueba de la segunda mitad del teorema, *si B, entonces A*. Pero aquí ya no podíamos proceder bajo el supuesto *A*, dado que hubiera sido circular. La notación que empleamos para la regla de introducción I→ es la siguiente:

1.

m. ϕ supuesto

n-1. ψ

n. $\phi \rightarrow \psi$ I→

La línea trazada en esta derivación aísla la parte de la misma que procede bajo el supuesto ϕ, a saber, la parte numerada desde m hasta n-1 inclusive. A partir de n no puede usarse, ni m ni ninguna otra fórmula que tenga los números m+1, ..., n-1 derivadas bajo el supuesto ϕ. Luego, esto no se aplica a la fórmula $\phi \rightarrow \psi$ misma, la cual no fue derivada ni de ϕ ni de ninguna otra fórmula en particular sino del hecho de que puede encontrarse un fragmento de derivación como el que se aisló mediante la línea trazada entre las reglas m y n-1. Es por ello que $\phi \rightarrow \psi$ no está seguida por el número de ninguna fórmula: mediante la línea queda claro cuál es la parte de la derivación sobre la que se basa la conclusión $\phi \rightarrow \psi$. La restricción de que la regla I→ sólo puede ser usada sobre los supuestos más recientes es bastante natural, dado que de otra forma los supuestos siempre se perderían.

A partir de ahora escribiremos $\phi \quad \phi_n \vdash \psi$ si existe una derivación que tenga a ψ como su última fórmula y a $\phi \quad \phi$ como supuestos *que no han sido cancelados*. De lo antedicho se sigue que hay derivaciones que carecen por completo de premisas, éstas son las derivaciones en las que se han ido cancelando todos los supuestos. Un ejemplo sencillo de esto es la siguiente derivación que muestra que $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$:

1.	$p \wedge q$	supuesto
2.	p	E∧, 1
3.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	I→

Puede apreciarse fácilmente que todos los supuestos realizados en esta derivación han sido retirados: decimos entonces que $(p \wedge q) \rightarrow p$ es *derivable sin premisas*. El ejemplo siguiente demuestra que : $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (q \wedge p) \rightarrow r$.

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	supuesto
2.	$q \wedge p$	supuesto
3.	q	E∧, 2
4.	p	E∧, 2
5.	$p \wedge q$	I∧, 4, 3
6.	r	E→, 1, 5
7.	$(q \wedge p) \rightarrow r$	I→

El supuesto 2 se cancela mediante la aplicación de I→ en 7. Por el contrario, el supuesto 1 no se cancela, de manera que esta derivación es una derivación de 7 a partir de 1: $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (q \wedge p) \rightarrow r$.

La siguiente derivación sin premisas es un poco más complicada y muestra que: $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

1.	$(p \wedge q) \to r$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	q	supuesto
4.	$p \wedge q$	I∧, 2, 3
5.	r	E→, 1, 4
6.	$q \to r$	I→
7.	$p \to (q \to r)$	I→
8.	$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$	I→

¿Cómo construimos una derivación tal? Para apreciarlo con claridad la reconstruiremos, documentando cada paso de la misma.

La fórmula que queremos derivar es $((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$, una fórmula cuyo signo principal es →. Como regla práctica, suponemos el antecedente de la implicación y luego tratamos de derivar su consecuente, dado que la fórmula en sí misma puede ser derivada por medio de la regla I→. Así, comenzamos con:

1. $(p \wedge q) \to r$ supuesto

Ahora tenemos que derivar $p \to (q \to r)$, otra fórmula cuyo signo principal es →. Siendo así, hacemos lo mismo que antes; suponemos:

2. p supuesto

Luego derivamos $q \to r$, otra fórmula que también tiene → como su signo principal. De esta forma:

3. q supuesto

Ahora debemos obtener r. Hemos llegado a una fase de la derivación en la que no podemos proceder simplemente mediante piloto automático. Necesitamos obtener r a partir de 1, 2 y 3. El único lugar en que aparece r en esas fórmulas es en el consecuente de 1. Siendo así, si necesitamos obtener r de esa fórmula, debemos derivar el antecedente de esa fórmula, $p \wedge q$, de alguna forma, y luego inferir la conclusión r mediante E→. Pero eso es bastante sencillo:

4. $p \wedge q$ I∧, 2

A esta altura podemos seguir nuestro plan y aplicar *Modus Ponens* (E→):

5. r E→, 1, 4

Ahora hemos alcanzado el objetivo que nos propusimos cuando supusimos q en 3: hemos derivado r. La idea que guiaba a nuestra regla práctica era que ahora $q \to r$ puede ser derivada aplicando I→:

6. $q \to r$ I→

De esta forma, hemos alcanzado el objetivo que nos propusimos al suponer p en 2:

7. $p \to (q \to r)$ $\quad$ I→

Y hemos alcanzado el objetivo propuesto al suponer $(p \wedge q) \to r$ en 1:

8. $((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$ $\quad$ I→.

Ejercicio 6

Muestre que:

(a) $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$
(b) $\vdash (p \to (p \to q)) \to (p \to q)$.

Además de las reglas de introducción y eliminación, también introduciremos una *regla de repetición*, *Rep*, la cual nos permite repetir en algún paso posterior de una derivación cualquier fórmula que hayamos obtenido, bajo la obvia restricción de que no se trate de un supuesto que a esta altura ya haya sido cancelado, o que dependa de algún supuesto de este tipo:

1. .

m. ϕ

n ϕ $\quad$ Rep, m

De hecho, esta nueva regla no agrega nada a lo que ya tenemos; simplemente nos permite derivar algunas fórmulas más sencillamente que si debiéramos hacerlo de otro modo. A manera de ejemplo, presentaremos una derivación sin premisas de $p \to (q \to p)$:

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	p	Rep, 1
4.	$q \to p$	I→
5.	$p \to (q \to p)$	I→

Debe hacerse notar que a menudo el carácter tautológico de fórmulas como ésta, en las que se emplea la regla de repetición, es, en cierta forma, antiintuitivo. Esta misma fórmula $p \to (q \to p)$ es una de las tautologías a las que hizo referencia C. I. Lewis como las *paradojas de la implicación material*.

4.3.4 *Disyunción*

Ahora nos ocuparemos de las reglas para la conectiva $\vee$. Para comenzar, podemos concluir $\phi \vee \psi$ sobre la base de ϕ. Estamos considerando la disyunción inclusiva, es por ello que si se nos da ϕ, entonces $\phi \vee \psi$ se cumple, sea que ψ lo haga o no. De la misma forma, siempre podemos concluir $\phi \vee \psi$ sobre la base de ψ. Probablemente, en los contextos cotidianos no nos inclinamos mayormente a razonar de esta manera: si ya sabemos que A, entonces, en general, no estamos muy inclinados a afirmar nada que sea menos informativo, tal como A *o* B (véase cap. 6). Sin embargo, debemos tener presente que aquí nos ocupamos a menudo de conclusiones preliminares o auxiliares. La *regla de introducción* I$\vee$ para la disyunción es la siguiente:

(i) 1.

m. ϕ

n. $\phi \vee \psi$ I$\vee$, m

(n) 1.

m. ψ

n. $\phi \vee \psi$ I$\vee$, m

¿Cómo puede *emplearse* $\phi \vee \psi$ para inferir cierta conclusión χ? Saber solamente que se da $\phi \vee \psi$ no es saber que se da ϕ ni saber que se da ψ, sino sólo que se da cualquiera de las dos. De ahí que si χ debe seguirse de un modo u otro, tendrá que seguirse de las dos. Esto es, χ se sigue de $\phi \vee \psi$ sólo si puede ser derivada a partir de ϕ y también de ψ. En otras palabras: una conclusión χ puede derivarse de $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \chi$ y $\psi \rightarrow \chi$. Siendo así, la *regla de eliminación* E$\vee$ será:

1.

m_1. $\phi \vee \psi$

m_2. $\phi \rightarrow \chi$

m_3. $\psi \rightarrow \chi$

n. χ E$\vee$, m_1, m_2, m_3

Una derivación sencilla que emplea ambas reglas es la derivación de $q \vee p$ a partir de $p \vee q$:

1.	$p \vee q$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	$q \vee p$	I$\vee$, 2
4.	$p \to (q \vee p)$	I$\to$
5.	q	supuesto
6.	$q \vee p$	I$\vee$, 5
7.	$q \to (q \vee p)$	I$\to$
8.	$q \vee p$	E$\vee$, 1, 4, 7

La aplicación de la regla de introducción I$\vee$ en los pasos 3 y 6 de esta derivación, en los que la conclusión es menos informativa que la premisa, puede considerarse como un *reculer pour mieux sauter.*

Hemos dado una regla práctica para $\to$ lo mismo puede hacerse para $\wedge$ y $\vee$. En (10) se ofrece un resumen de estas reglas heurísticas:

(10)

Objetivo	*Sugerencia*
Derivar $\phi \to \psi$	Suponga ϕ y trate de derivar ψ.
Derivar $\phi \wedge \psi$	Trate de derivar tanto ϕ como ψ.
Derivar $\phi \vee \psi$	Trate de derivar ϕ o trate de derivar ψ.
Derivar χ a partir de $\phi \vee \psi$	Trate de derivar χ suponiendo ϕ; si lo logra, infiera la conclusión $\phi \to \chi$. A continuación trate de derivar χ suponiendo ψ; si lo logra, infiera la conclusión $\psi \to \chi$.

Ejercicio 7

Muestre que:

(a) $p \vee (p \wedge q) \vdash p$.

(b) $\vdash (p \vee q) \to ((p \to q) \to q)$.

(c) $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$.

4.3.5 *Negación*

Las reglas simples para la introducción y la eliminación de $\neg$ no son tan obvias como las precedentes. Continuando con el lineamiento seguido hasta ahora, nos preguntamos ¿bajo qué circunstancias podemos inferir la conclusión $\neg\phi$? ¿Cuándo podemos mostrar que no puede darse ϕ; o sea, si habiendo supuesto ϕ, podemos derivar una contradicción? Y, ¿a qué denominaremos una contradicción? ¿A un par de fórmulas ψ, $\neg\psi$o tal vez a una única fórmula de la forma $\psi \wedge \neg\psi$? Cualquiera de las dos podria desempeñar ese papel, pero para este propósito específico es más elegante introducir en el lenguaje formal la fórmula atómica especial $\perp$. Nos referiremos a ella como lo falso (*falsum*). Esta fórmula puede ser vista como la contradicción favorita o la oración indisputablemente falsa, tal como $0 = 1$, por ejemplo, o *Yo no existo*. Podemos inferir la conclusión que $\perp$ si tenemos tanto ϕ como $\neg\phi$. Y esto sólo puede suceder si hemos formulado algunos supuestos contradictorios. La siguiente derivación de $\perp$ puede ser considerada como la *regla de eliminación* E¬

1.		
m_1.	$\neg\phi$	
m_2.	ϕ	
n.	$\perp$	E¬, m_1, m_2

Si $\perp$ puede ser derivada de ϕ, entonces podemos derivar la conclusion $\neg\phi$. Esto se refleja en la *regla de introducción* I¬:

1.		
m.	ϕ	supuesto
n-1	$\perp$	
n.	$\neg\phi$	I¬

Lo que hacen estas reglas es interpretar $\neg\phi$ como $\phi \rightarrow \perp$. De esto se sigue inmediatamente la regla práctica para derivar $\neg\phi$ expresada en (11):

(11)	*Objetivo*	*Sugerencia*
	Derivar $\neg\phi$	Suponga ϕ y trate de derivar un par de fórmulas de la forma ψ, $\neg\psi$.

Un ejemplo de esto es la siguiente derivación sin premisas de $\neg(p \wedge \neg p)$:

1.	$p \wedge \neg p$	supuesto
2.	p	E$\wedge$, 1
3.	$\neg p$	E$\wedge$, 1
4.	$\perp$	E$\neg$, 3, 2
5.	$\neg(p \wedge \neg p)$	I$\neg$

Ejercicio 8:

Muestre que

(a) $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$.

(b) $\vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$.

(c) $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

(d) $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$.

El sistema de derivación para la lógica proposicional que hemos presentado bajo la forma de reglas para la introducción y eliminación de conectivas no es completo en el sentido técnico introducido en §4.3.6. Es incompleto porque restan tautologías que no pueden ser derivadas sin premisas. Pero este sistema de introducción y eliminación tiene una cierta coherencia interna; se le conoce como *lógica minimal*. Dos tautologías importantes que no pueden ser derivadas dentro de la lógica minimal son $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$, el *ex falso sequitur quodlibet*, y $p \vee \neg p$, la *ley del tercero excluido*. Ahora vamos a agregar la *regla EFSQ*, que nos va a permitir derivar el *ex falso sequitur quodlibet*. Simplemente decimos que una fórmula arbitraria puede ser derivada de $\perp$:

1.		
n-1.	$\perp$	
n.	ϕ	EFSQ, n-1.

Dada esta regla, $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ puede ser derivada en forma sencilla sin premisas.

Debe hacerse notar que *ex falso sequitur quodlibet* es otra de las tautologías que C. I. Lewis incluyó entre las paradojas de la implicación material. Sin embargo, la necesidad de emplear la regla EFSQ para realizar una derivación no es siempre tan obvia como en el caso de $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$. Esto se aprecia en el siguiente ejemplo, que demuestra que $p \vee q, \neg p \vdash q$. En nuestro sistema es imposible derivar q a partir de $p \vee q$ y $\neg p$ sin la regla EFSQ.

1.	$p \vee q$	supuesto
2.	$\neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\bot$	E$\neg$, 2, 3
5.	q	EFSQ, 4
6.	$p \rightarrow q$	I$\rightarrow$
7.	q	supuesto
8.	q	Rep, 7
9.	$q \rightarrow q$	I$\rightarrow$
10.	q	E$\vee$, 1, 6, 9

Agregando la regla EFSQ a la lógica minimal, obtenemos un sistema lógico en el que aun no es posible derivar $p \vee \neg p$ sin premisas. A este sistema se le conoce como *lógica intuicionista*, dado que describe la forma de razonar empleada en la, así llamada, matemática intuicionista. Esta escuela del pensamiento matemático fue iniciada por el matemático holandés L. E. J. Brower a principios del siglo XX. La intención de Brower era eliminar de la matemática lo que consideraba presupuestos metafísicos concernientes a la naturaleza de los objetos matemáticos y fundar la disciplina en nuestras intuiciones acerca de los números naturales. Si, junto con Brower, se tiene la opinión de que todos los objetos matemáticos son creación de la mente humana, entonces no se aceptará una prueba de que es imposible que no haya un objeto que tenga la propiedad A como prueba de que hay algún objeto con la propiedad A. Desde esta perspectiva, entonces, el estilo de razonamiento conocido como *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo) es inaceptable, y, en general, no se está justificado al inferir la conclusión ϕ a partir de $\neg\neg\phi$. (Es precisamente este principio el que a continuación deberemos agregar al resto como la regla$\neg\neg$.) De acuerdo con una terminología más moderna, es el razonamiento *constructivo* (en matemática) el que queda formalizado por la lógica intuicionista. Según esto, puede afirmarse una disyunción sólo si uno de los disyuntivos puede afirmarse. Así, $p \vee q$ es verdadera sólo si puede afirmarse p o puede afirmarse q. En forma similar, puede afirmarse una fórmula existencial $\exists x\phi$ sólo si se puede dar un ejemplo: alguna sustitución específica t tal que se pueda afirmar $[t/x]\phi$.

Agregando la regla$\neg\neg$ a la lógica intuicionista, obtenemos la lógica clásica, que no es otra que el sistema que hemos discutido en los capítulos precedentes. La regla$\neg\neg$ es la siguiente:

l.

m. $\neg\neg\phi$

n. ϕ $\neg\neg$, m

Empleando la regla-$\neg\neg$, podemos derivar $p \vee \neg p$ sin premisas:

1.	$\neg(p \vee \neg p)$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	$p \vee \neg p$	I$\vee$, 2
4.	$\perp$	E$\neg$, 1, 3
5.	$\neg p$	I$\neg$
6.	$p \vee \neg p$	I$\vee$, 5
7.	$\perp$	E$\neg$, 1, 6
8.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	I$\neg$
9.	$p \vee \neg p$	$\neg\neg$, 8

Esta derivación podría requerir algún comentario. Debe comprenderse que $p \vee \neg p$ no puede ser derivada en forma más directa que ésta. La regla práctica para $\vee$ no nos sirve aquí, dado que ni p ni $\neg p$ pueden ser derivadas sin premisas. Por ello, intentamos un desvío con la ayuda de la regla-$\neg\neg$, tratando de derivar en primer lugar $\neg\neg(p \vee \neg p)$. De acuerdo con la regla práctica para $\neg$ primero debemos suponer $\neg(p \vee \neg p)$ (1) y luego tratar de obtener una contradicción. Dado que sólo disponemos de la fórmula $\neg(p \vee \neg p)$, no es sorprendente que tratemos de obtener $\neg(p \vee \neg p)$ y $p \vee \neg p$ como nuestras dos fórmulas contradictorias. Para hacer esto, debemos derivar $p \vee \neg p$. De acuerdo con la regla práctica para $\vee$, esto significa derivar o bien p o bien $\neg p$. Dado que p no parece ser un comienzo muy prometedor, debemos tratar de derivar primero $\neg p$. De acuerdo con la regla práctica para $\neg$, debemos entonces suponer p y tratar de derivar una contradicción a partir de ese supuesto. Ahora que hemos llegado tan lejos, todo parece acomodarse en su lugar. En (3), obtenemos $p \vee \neg p$, que contradice a $\neg(p \vee \neg p)$ y , de esta forma, nos permite concluir primero (4) $\perp$ y luego, con I$\neg$ obtenemos (5) $\neg p$. Ahora (6), $p \vee \neg p$, se sigue de acuerdo con nuestro plan, y también (7) $\perp$. Por consiguiente, a partir de $\neg(p \vee \neg p)$ podemos inferir la falsedad ($\perp$); y luego la conclusión, (8) $\neg\neg(p \vee \neg p)$ mediante I$\neg$; una única aplicación de la regla-$\neg\neg$ al paso (8) resulta en (9) $p \vee \neg p$.

Ejercicio 9

Muestre que

(a) $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(Sugerencia: trate de derivar $\neg\neg p$ de $(p \rightarrow q) \rightarrow p$).

(b) $\vdash \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$.

(c) $\vdash \neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$.

Se pueden formular reglas para $\leftrightarrow$, pero las omitiremos porque no arrojan nueva luz sobre el tema.

Ejercicio 10

Muestre que:

(a) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(b) $(p \wedge q) \wedge (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$.

(c) $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

(d) $p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$.

(e) $p \to \neg p, \neg p \to p \vdash \perp$

(Éste es el 'esqueleto proposicional' de la paradoja del mentiroso.)

Ejercicio 11

Es posible considerar a las reglas de introducción y eliminación de una expresión lingüística como la explicitación de los aspecto lógicos esenciales que reglan su uso. Por esta razón, ciertas teorías modernas del significado (M. Dummet, D. Prawitz) prefieren basarse en un análisis de la deducción natural más que en un análisis que dependa de las condiciones de verdad. Sin embargo, la sola introducción de dichas reglas teoréticas de prueba podría ser peligrosa, tal como fue señalado por A. Prior. ¿Por qué es incorrecto introducir una nueva conectiva $\circ$ que tenga las reglas de introducción de $\vee$ y las reglas de eliminación de $\wedge$?

4.3.6 *Cuantificadores*

Todas las reglas precedentes se aplican igualmente en lógica de predicados, razón por la cual será suficiente con dar reglas de introducción y eliminación para los cuantificadores universal y existencial. Luego veremos que en nuestras derivaciones podemos restringir las fórmulas a oraciones (siendo éstas fórmulas que carecen de variables libres) en tanto dispongamos de una provisión ilimitada de constantes. Vamos a proceder bajo este supuesto. La *regla de introducción* I$\exists$ para el cuantificador existencial es lo suficientemente obvia; siempre podemos inferir la conclusión $\exists x\phi$ si tenemos $[a/x]\phi$ para alguna constante a (no importa cuál):

1.		
m.	$[a/x]\phi$	
n.	$\exists x\phi$	I$\exists$, m

Un ejemplo de aplicación de I$\exists$ es la siguiente derivación de $\exists xAxx$ a partir de Aaa:

1.	Aaa	supuesto
2.	$\exists$xAxx	I$\exists$, 1

En esta derivación, la fórmula ϕ a la cual se aplicó I$\exists$ era Axx: [a/x]Axx = Aaa. Como segundo ejemplo, tenemos una derivación de $\exists$x$\exists$yAxy a partir de Aaa:

1.	Aaa	supuesto
2.	$\exists$yAay	I$\exists$, 1
3.	$\exists$x$\exists$yAxy	I$\exists$, 2

Aquí I$\exists$ se aplica a Aay en el paso 2: [a/y]Aay = Aaa; y a $\exists$yAxy en el paso 3: [a/x]$\exists$yAxy = $\exists$yAay.

Ejercicio 12

Muestre que Aa $\rightarrow$ Bb $\vdash$ $\exists$x$\exists$y(Ax $\rightarrow$ By). Consigne la fórmula a la que aplica I$\exists$ cada vez que lo haga.

La *regla de eliminación* E$\forall$ tampoco presenta grandes dificultades; a partir de $\forall$xϕ podemos concluir [a/x]ϕ; para cualquier constante a.

1.	.	
	⋮	
m.	$\forall$xϕ	
	⋮	
n.	[a/x]ϕ	E$\forall$, m

Usando esta regla ahora podemos derivar, por ejemplo, $\exists$xAx de $\forall$xAx.

1.	$\forall$xAx	supuesto
2.	Aa	E$\forall$, 1
3.	$\exists$xAx	I$\exists$, 2

Aquí E$\forall$ es aplicada a la fórmula Ax.

Ejercicio 13

Muestre que:

(a) $\forall$xAxx $\vdash$ Aaa.
(b) $\forall$x$\forall$yAxy $\vdash$ Aab.
(c) $\forall$x$\forall$yAxy $\vdash$ Aaa.

Consigne la fórmula a la que aplica E$\forall$ cada vez que lo haga.

La formulación de la *regla de introducción* I$\forall$ para el cuantificador universal resulta un poco más complicada. Como primera aproximación podemos afirmar que puede derivarse la conclusión $\forall$xϕ si se ha derivado [a/x]ϕ para toda constante a. El problema es que hay infinitas constantes, pero debemos lograr que nuestras derivaciones se mantengan finitas. Lo que podemos hacer es afirmar que podríamos concluir $\forall$xϕ si es cierto que todas esas derivaciones pueden hacerse en principio.

Éste es el caso si $\forall x\phi$ es derivable para alguna constante que pueda ser considerada arbitraria, una constante cuya identidad sea desconocida en la derivación. Ahora bien, a puede ser considerada arbitraria en cualquier paso de una derivación si a no aparece en ningún supuesto previo que no haya sido cancelado a esa altura de la derivación, y si a no aparece en la fórmula ϕ misma. Estas dos condiciones resultan ser las restricciones apropiadas para la aplicabilidad de la siguiente regla I$\forall$:

1.		
m.	$[a/x]\phi$	
n.	$\forall x\phi$	I$\forall$, m

Como ejemplo tenemos la siguiente derivación que muestra que $\forall x\forall yAxy \vdash \forall xAxx$.

1.	$\forall x\forall yAxy$	supuesto
2.	$\forall yAay$	E$\forall$, 1
3.	Aaa	E$\forall$, 2
4.	$\forall xAxx$	I$\forall$, 3

En 2, 3 y 4, las reglas se aplican a $\forall yAxy$ ($[a/x]\forall yAxy$ $\forall yAay$), Aay ($[a/y]Aay=Aaa$), y Axx ($[a/x]Axx=Aaa$), respectivamente. Esto no puede invertirse. Todo intento de derivar $\forall x\forall yAxy$ de $\forall xAxx$ está condenado al fracaso (y así debe ser, ya que, por ejemplo, cada uno puede amarse a sí mismo sin que todos amen a todos):

1.	$\forall xAxx$	supuesto
2.	Aaa	E$\forall$, 1
3.	$\forall yAay$	no permitido, ya que a aparece en Aay ($[a/y]Aay = Aaa$)

Esto muestra la manera en que las restricciones formuladas anteriormente previenen un resultado indeseable.

La tabla (12) ofrece algunas reglas prácticas para encontrar derivaciones con cuantificadores.

(12)

Objetivo	*Sugerencia*
Derivar $\exists x\phi$	Trate de derivar $[a/x]\phi$ para cualquier constante a (cualquier a servirá).
Derivar $\forall x\phi$	Trate de derivar $[a/x]\phi$ para alguna constante a que a esa altura de la derivación pueda ser considerada arbitraria.

Otra ilustración que emplea E$\forall$ e I$\forall$ es el siguiente ejemplo, que muestra que $\forall x\forall yAxy \vdash \forall x\forall yAyx$:

1.	$\forall x \forall y Axy$	supuesto
2.	$\forall y Aay$	$E\forall$, 1
3.	Aab	$E\forall$, 2
4.	$\forall y Ayb$	$I\forall$, 3
5.	$\forall x \forall y Ayx$	$I\forall$, 4

Ejercicio 14

Muestre que:

(a) $\forall x (Ax \wedge Bx) \vdash \forall x Ax \wedge \forall x Bx$.

(b) $\forall x Ax \wedge \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \wedge Bx)$.

(c) $\forall x \forall y Axy \vdash \forall x \forall y(Axy \wedge Ayx)$.

(d) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \forall x Ax \vdash \forall x Bx$.

(e) $\neg \exists x Ax \vdash \forall x \neg Ax$.

(f) $\neg \exists x \neg Ax \vdash \forall x Ax$ (sugerencia: trate de derivar $\neg\neg Aa$).

Ahora nos ocuparemos de la regla de eliminación para el cuantificador existencial. Al formular esta regla se presentan muchos de los problemas que se presentaron al formular $I\forall$. ¿Cuándo podemos inferir la conclusión ψ de $\exists x\phi$? Lo único que sabemos es que en alguna parte hay algo que satisface ϕ; acerca de ese algo no tenemos derecho a suponer nada en absoluto. En otras palabras, $[a/x]\phi$ puede usarse para derivar ψ siempre y cuando a pueda ser considerada arbitraria en el contexto formado por esta derivación particular. Más precisamente: una conclusión ψ puede ser inferida de $\exists x\phi$ y $[a/x]\phi \rightarrow \psi$ si a es 'arbitraria'. Nuevamente, una constante arbitraria a es una constante que no aparece ni en las premisas ni en ϕ; pero debe agregarse el requisito adicional de que a no aparezca en ψ. Ésas son, pues, las tres restricciones para la aplicabilidad de la siguiente regla $E\exists$:

1.		
m_1.	$\exists x\phi$	
m_2.	$[a/x]\phi \rightarrow \psi$	
n.	ψ	$E\exists$, m_1, m_2

Como ejemplo de aplicación, contamos con la siguiente derivación, que muestra que $\exists x Axx \vdash \exists x \exists y\, Axy$:

1.	$\exists xAxx$	supuesto
2.	Aaa	supuesto
3.	$\exists yAay$	$I\exists$, 2
4.	$\exists x\exists yAxy$	$I\exists$, 3
5.	$Aaa \rightarrow \exists x\exists yAxy$	$I\rightarrow$
6.	$\exists x\exists yAxy$	$E\exists$, 1, 5

Que una constante no pueda aparecer en la conclusion cuando se aplica $E\exists$ quedará claro a partir de la siguiente *incorrecta* y por supuesto indeseable derivación de $\forall x\exists yAxy$ de $\exists xAxx$:

1.	$\exists xAxx$	supuesto
2.	Aaa	supuesto
3.	$\exists yAay$	$I\exists$, 2
4.	$Aaa \rightarrow \exists yAay$	$I\rightarrow$
5.	$\exists yAay$	$E\exists$, 1, 4 incorrecto(*)
6.	$\forall x\exists yAxy$	$I\forall$, 5

(*) porque la constante a aparece en la conclusión $\exists yAay$.
Esta regla da lugar a la regla práctica (13) para derivar fórmulas a partir de fórmulas cuantificadas existencialmente:

(13)

Objetivo	*Sugerencia*
Derivar ψ a partir de $\exists x\phi$	Suponga $[a/x]\phi$ para alguna constante a que pueda ser considerada arbitraria a esa altura de la derivación y respecto de ψ, y trate de derivar ψ. Si logra hacerlo, entonces infiera la conclusión $[a/x]\phi \rightarrow \psi$.

A modo de ilustración, presentamos algunos ejemplos. Comenzamos con una derivación que muestra que $\exists x\exists yAxy \vdash \exists x\exists yAyx$:

1.	∃x∃yAxy	supuesto
2.	∃yAay	supuesto
3.	Aab	supuesto
4.	∃yAyb	I∃, 3
5.	∃x∃yAyx	I∃, 4
6.	Aab → ∃x∃yAyx	I→
7.	∃x∃yAyx	E∃, 2, 6
8.	∃yAay → ∃x∃yAyx	I→
9.	∃x∃yAyx	E∃, 1, 8

Y aquí mostramos que ∃x∀yAxy ⊢ ∀y∃xAxy:

1.	∃x∀yAxy	supuesto
2.	∀yAay	supuesto
3.	Aab	E∀, 2
4.	∃xAxb	I∃, 3
5.	∀yAay → ∃xAxb	I→
6.	∃xAxb	E∃, 1, 5
7.	∀y∃xAxy	I∀, 6

Algunos comentarios pueden ayudar a clarificar cómo se llegó a esta derivación. En el paso 2, simplemente seguimos la regla práctica para la eliminación de ∃. La fórmula que queríamos derivar a esta altura era ∀y∃xAxy, y la regla práctica para derivar fórmulas universales recomienda sustituir una constante 'arbitraria' por la y de ∃xAxy y luego tratar de derivar el resultado. La constante a no nos sirve, dado que aparece en el supuesto ∀yAay, pero b servirá. Por ello, tratamos de derivar ∃xAxb. Y esto no es muy difícil, dado que Aab puede ser derivado de ∀yAay. El resto continúa mecánicamente.

Concluimos derivando ∃xAx de ¬∀x¬Ax. Para hacer esto casi con seguridad necesitaremos la regla¬¬, dado que, como lo mencionáramos en nuestra discusión sobre la lógica intuicionista, éste es el argumento no constructivo por excelencia.

1.	$\neg\forall x\neg Ax$	supuesto
2.	$\neg\neg\exists xAx$	supuesto
3.	Aa	supuesto
4.	$\exists xAx$	I$\exists$, 3
5.	$\perp$	E$\neg$, 2, 4
6.	$\neg Aa$	I$\neg$
7.	$\forall x\neg Ax$	I$\forall$, 6
8.	$\perp$	E$\neg$, 1, 7
9.	$\neg\neg\neg\exists xAx$	I$\neg$
10.	$\exists xAx$	$\neg\neg$, 9

Dada la regla $\neg\neg$, esta derivación no presenta genuinos problemas. Suponemos $\neg\forall x\neg Ax$ en (1) y tratamos de derivar $\neg\neg\exists xAx$. Siguiendo la regla práctica para suponemos $\neg\neg\exists xAx$ en (2) y tratamos de derivar una contradicción. Parece prometedor tratar de derivar $\forall x\neg Ax$, en contradicción con $\neg\forall x\neg Ax$, por ello seguimos la regla práctica de $\forall$ y tratamos de derivar $\neg Aa$. La regla práctica para nos lleva entonces a suponer Aa en (3) y tratar de derivar una contradicción. Esto es lo suficientemente sencillo: $\exists xAx$ está en contradicción con $\neg\neg\exists xAx$. El resto de la derivación se sigue de acuerdo con el plan subyacente a todos los supuestos formulados precedentemente.

Ejercicio 15

Muestre que:

(a) $\exists x(Ax \wedge Bx) \vdash \exists xAx \wedge \exists xBx$.

(b) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists xAx \vdash \exists xBx$.

(c) $\exists x\neg Ax \vdash \neg\forall xAx$.

(d) $\forall x\neg Ax \vdash \neg\exists xAx$.

(e) $\neg\forall xAx \vdash \exists x\neg Ax$.

(f) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists x\neg Bx \vdash \exists x\neg Ax$.

(g) $\forall x(Ax \vee Bx), \exists x\neg Bx \vdash \exists xAx$.

(h) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists x(Ax \wedge Cx) \vdash \exists x(Bx \wedge Cx)$.

4.3.7 *Reglas*

Concluimos §4.3 regresando brevemente a las reglas (i)-(vii), tratadas en §3.6.5. Reemplazando $\models$ por $\vdash$ en todas ellas, obtenemos las reglas correspondientes (i*)-(vii*), que pueden probarse sin dificultad. Como ejemplo, tomaremos (i*) o *Modus Ponens*:

(i*) Si $\vdash \phi$ y $\vdash \phi \rightarrow \psi$, entonces $\vdash \psi$.

Esto puede probarse de la siguiente manera: supóngase $\vdash \phi$ y $\vdash \phi \rightarrow \psi$. Esto significa que existe una derivación de ϕ sin premisas (en, digamos, m líneas), y otra derivación, también sin premisas, de $\phi \rightarrow \psi$ (en, digamos, n líneas). Luego escribimos una derivación debajo de la otra, comenzando por la derivación de ϕ, y renumeramos todas las líneas de la derivación de $\phi \rightarrow \psi$: todos los números (no olvidarse los que van a continuación de las fórmulas) se incrementan en la cifra que corresponde a m. Al final agregamos una aplicación de E→, derivando la conclusión ψ:

1.		
m.	ϕ	
m + 1.		
m + n.	$\phi \rightarrow \psi$	
m + n + 1.	ψ	E→, m + n, m

El resultado final es la derivación de ψ.

Todas las reglas se aplican igualmente en las derivaciones que tienen premisas. Como ejemplo, probaremos (vi*) de la siguiente forma:

(vi*) $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \neg\neg\phi$ sii $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$

Prueba ⇒: Supóngase que tenemos una derivación de $\neg\neg\phi$ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Esto puede convertirse en una derivación de ϕ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sencillamente agregando una nueva línea en la que la conclusión ϕ se infiere a partir de $\neg\neg\phi$ por medio de la regla ¬¬.

⇐: En el siguiente esquema se aprecian las alteraciones requeridas:

1.	ψ_1	
n.	ψ_n	
m.	ϕ	
m + 1.	$\neg\phi$	supuesto
m + 2.	$\perp$	E¬, m + 1, m
m + 3	$\neg\neg\phi$	I¬

Ejercicio 16

Muestre que $\vdash \phi \wedge \psi$ sii $\vdash \phi$ y $\vdash \psi$.

4.4 Corrección y completitud

En esta sección relacionaremos, aunque sin proporcionar pruebas rigurosas, el enfoque semántico de la inferencia lógica con el enfoque sintáctico, es decir, $\models$ con $\vdash$. Como ya lo hemos dicho, ambos son equivalentes. O, para expresarlo con mayor precisión, para oraciones cualesquiera $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$ formuladas en cualquier lenguaje L de la lógica de predicados, se cumple $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$ si y sólo si $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$. Esto puede ser dividido en dos implicaciones, una en cada dirección. Las trataremos en forma separada, formulándolas a la manera de dos teoremas.

Teorema 14 (*Teorema de corrección para la lógica de predicados*)
Para todas las oraciones $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$ (formuladas en algún lenguaje L de la lógica de predicados), si $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$, entonces $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$.

Teorema 15 (*Teorema de completitud para la lógica de predicados*)
Para todas las oraciones $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$ (formuladas en algún lenguaje L de la lógica de predicados), si $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$, entonces $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$.

Ante todo, estos teoremas son afirmaciones acerca de las reglas que hemos dado para el sistema de deducción natural. El teorema de corrección establece que las reglas son correctas: si las aplicamos a premisas $\phi_1,\ldots,\phi_n$, verdaderas en algún modelo M, sólo pueden dar lugar a conclusiones que sean verdaderas en M. Para probar este teorema (cosa que no haremos), es suficiente con constatar lo antedicho respecto de cada una de las reglas. Por ejemplo, la regla de introducción para $\wedge$ es correcta, dado que si tanto $V_M(\phi) = 1$ como $V_M(\psi) = 1$, entonces podemos estar seguros de que también $V_M(\phi \wedge \psi) = 1$. Respecto de las otras reglas, la prueba no presenta genuinos problemas, a pesar de que se plantean algunas complicaciones con las reglas para cuantificadores; ya nos hemos encontrado con las mismas complicaciones en relación con las restricciones de estas reglas. El teorema de corrección nos asegura que las restricciones son suficientes para impedir que se infieran todas las conclusiones indeseables que de otra forma podrían inferirse. En el caso especial de $n = 0$, puede apreciarse que el teorema de corrección se reduce a: si ϕ puede ser derivada sin premisas, entonces ϕ es universalmente válida.

El teorema de completitud nos asegura que las reglas son completas en el sentido de que si $\phi_1,\ldots,\phi_n/\psi$ es válido, esto es, si $\phi_1,\ldots,\phi_n \models \psi$, entonces hay suficientes reglas para permitirnos derivar ψ a partir de $\phi_1,\ldots,\phi_n$. En otras palabras, las reglas en sí mismas son suficientes como para generar todos los esquemas de argumento válidos; nada ha sido olvidado. Es claro que este resultado es mucho menos obvio que el teorema de corrección, incluso si cuando presentábamos las reglas llegamos a pensar que podríamos obtener todos los esquemas de argumento válidos y, en particular, que podríamos derivar sin premisas todas las tautologías y otras fórmulas universalmente válidas (véase la discusión acerca de las reglas EFSQ y $\neg\neg$). Además, este resultado no solamente es menos obvio, sino que su prueba es menos sencilla.

Pero los teoremas de corrección y completitud no son sólo afirmaciones acerca de las reglas de derivación. También expresan algo acerca de la semántica, acerca del concepto de validez semántica. Lo característico de las reglas de derivación es que no dejan ningún lugar a dudas acerca de cuáles combinaciones de símbolos son derivaciones apropiadas y cuáles no lo son. Esto es verdadero acerca de la deducción natural, pero es igualmente esencial para otros sistemas formales de prueba existentes. Lo que expresan los teoremas de corrección y completitud es que los esquemas de argumento válidos son precisamente aquellos que pueden obtenerse como derivaciones en el sistema formal en cuestión. Esto no se cumple siempre: se cumple para la lógica de predicados, pero no se cumple para la lógica de segundo orden o para la matemática en general (acerca de esto, véase más abajo).

Debe hacerse notar que el teorema de completitud no contradice de ninguna forma al teorema de Church acerca de la indecidibilidad de la lógica de predicados, mencionado brevemente en §4.2. Si un esquema de argumento dado es válido entonces se nos asegura que existe alguna derivación finita de su conclusión a partir de sus premisas. De esta forma disponemos de un método que ,tarde o temprano, nos mostrará que el esquema es válido: sencillamente comenzamos a generar derivaciones y esperamos a que aparezca la correcta. El problema se plantea con los esquemas que no son válidos; no tenemos ningún método que nos garantice que descubrirá su invalidez. En este caso, generar derivaciones no nos sirve, dado que tendríamos que esperar para asegurarnos que el esquema de argumento *no* aparece. Y, puesto que hay infinitas derivaciones posibles, nunca podríamos estar seguros.

También podemos presentar una versión diferente del teorema de completitud, la cual resulta ser de algún interés. Pero primero introduciremos el concepto de consistencia y probaremos algunas cosas sencillas relacionadas con dicho concepto.

Definición 4

Decimos que $\phi_1,\ldots,\phi_n$ es *inconsistente* si $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \perp$; decimos que $\phi_1,\ldots,\phi_n$ es *consistente* si no es inconsistente, es decir, si $\phi_1,\ldots,\phi_n \nvdash \perp$.

Teorema 16

(a) $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi$ es inconsistente sii $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \neg\psi$.

(b) $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi$ es consistente sii $\phi_1,\ldots,\phi_n \nvdash \neg\psi$.

(c) $\phi_1,\ldots,\phi_n, \neg\psi$ es consistente sii $\phi_1,\ldots,\phi_n \nvdash \psi$.

Prueba:
(a) $\Rightarrow$: Supóngase $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi$ es inconsistente, esto es, supóngase $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi \vdash \perp$. Luego, existe una derivación de $\perp$ a partir de $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi$. Esta derivación puede transformarse en una derivación de $\neg\psi$ a partir de $\phi_1,\ldots,\phi_n$ agregando I$\neg$ como último paso:

1.	ϕ_1	supuesto
n.	ϕ_n	supuesto
n + 1	ψ	supuesto
m.		
m + 1	$\neg\psi$	I$\neg$

$\Leftarrow$: Supóngase $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \neg\psi$. Luego se deriva $\neg\psi$ a partir de $\phi_1,\ldots,\phi_n$. Ahora fórmese una derivación que comience con los supuestos $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$, seguidos por el recordatorio de la derivación dada (algunos de los números deberán adaptarse). Esto resultará en una derivación de $\neg\psi$ a partir de ϕ ϕ_n, ψ (en la cual verdaderamente no se usa ψ). Ahora podemos convertir esta derivación en una derivación de $\perp$ a partir de ϕ ϕ_n, ψ mediante el agregado de E$\neg$ como último paso.

1.	ϕ_1	supuesto
n.	ϕ_n	supuesto
n + 1.	ψ	supuesto
m + 1	$\neg\psi$	
m + 2	$\perp$	E$\neg$, n + 1, m 1 □

(b) es una consecuencia inmediata de (a).

(c) ϕ $\phi_n, \neg\psi$ es consistente sii (de acuerdo con (b))

ϕ $\phi_n \nvdash \neg\neg\psi$ sii (de acuerdo con (vi*)

consignada en §4.3.7) ϕ $\phi_n \nvdash \psi$. □

Antes de presentar el teorema de completitud en su forma alternativa, considérese en primer lugar su contrapositiva: si $\phi_1,\ldots,\phi_n \nvdash \psi$, entonces $\phi_1,\ldots,\phi_n \nvDash \psi$. Si empleando el teorema 16c, reemplazamos el antecedente, entonces obtenemos: si $\phi_1,\ldots,\phi_n,\neg\psi$ es consistente, entonces ϕ $\phi_n \nvDash \psi$. Reformulando su consecuente obtenemos: si $\phi_1,\ldots,\phi_n,\neg\psi$ es consistente, entonces hay un modelo M apropiado para ϕ_n,ψ tal que $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n)$ 1 y $V_M(\psi) = 0$. O, en otras palabras, si $\phi_1,\ldots,\phi_n$ ψ es consistente, entonces hay un modelo M apropiado tal que $V_M(\phi_1) = \ldots = V_M(\phi_n) = V_M(\neg\psi) = 1$. Si, para abreviar, decimos simplemente que M es un *modelo* para la cadena de fórmulas $\chi_1, \ldots, \chi_m$ sólo en el caso de que $V_M(\chi_1) = \ldots = V_M(\chi_m) = 1$, entonces el teorema de completitud es equivalente al siguiente resultado.

Teorema 17 (*Teorema de consistencia*)

Si la cadena de oraciones $\chi_1, \ldots, \chi_m$ es consistente, entonces existe un modelo para $\chi_1, \ldots, \chi_m$.

Exactamente de la misma manera se puede mostrar que el teorema de corrección es el inverso del teorema 17:

Teorema 18

Si la cadena de oraciones $\chi_1, \ldots, \chi_m$ tiene modelo, entonces $\chi_1, \ldots, \chi_m$ es consistente.

Actualmente es habitual probar el teorema 17 en lugar de probar el teorema de completitud directamente. Se supone que un conjunto de oraciones es consistente y luego se trata de proporcionarle un modelo. Esta idea fue iniciada por Henkin (1949). La prueba original del teorema de completitud dada por Gödel (1930) era más directa.

Todos estos teoremas ponen en evidencia una peculiaridad sorprendente de la lógica moderna: su capacidad para teorizar acerca de sus propios sistemas y para probar resultados significativos acerca de los mismos. Esta actividad 'autorreflexiva' suele denominarse *metalógica*. La metalógica moderna se ocupa de muchas más cuestiones que las abordadas hasta aquí. Por ejemplo, podemos indagar acerca de la consistencia y completitud de otros sistemas distintos de la lógica de predicados estándar, tales como la lógica intuicionista o lógicas de orden superior (véase cap. 5). Pero también hay otros teoremas metalógicos importantes acerca de la lógica de predicados misma; vamos a inspeccionar algunos, comenzando por una indicación tomada de un tema previamente tratado.

Con anterioridad afirmamos que la validez de una inferencia puede ser descripta como la ausencia de contraejemplos. La determinación de esto último es una tarea pasmosa, como lo hicimos notar, dado que todas las interpretaciones de todos los modelos podrían ser candidatas en principio. Pero, tal vez nuestro recelo frente a la 'inmensa totalidad de las interpretaciones' parezca un poco exagerado. Después de todo, en lógica proposicional es posible resolverlo explorando la lista finita de interpretaciones que son relevantes respecto de la validez de cualquier esquema dado. No obstante, en esto, así como en muchos otros respectos, la lógica proposicional difícilmente sea representativa de las teorías lógicas. De manera que, cuando se evalúan esquemas en lógica de predicados, deben tomarse en cuenta todas las estructuras que tengan dominios D arbitrarios. Y hay verdaderamente un 'inmenso' número de ellas. El dominio D puede ser finito o infinito, y dentro de este último tipo hay diferentes variedades: algunos son enumerablemente infinitos (como los números naturales) y algunos son no enumerablemente infinitos (como los números reales o incluso mayores). En 1916, L. Löwenheim probó que la lógica de predicados es insensible al menos respecto de esta última diferencia entre los tamaños de los infinitos:

> Si una inferencia tiene un contraejemplo con dominio infinito, entonces tiene un contraejemplo con un dominio. enumerablemente infinito.

La fuerza genuina de este resultado probablemente sólo se aprecie si se conocen los fundamentos de la teoría de conjuntos de Cantor. Pero la siguiente formulación, más fuerte, realizada por D. Hilbert y P. Bernays en 1939, aun debe sorprendernos bastante:

> Si una inferencia posee un contraejemplo, entonces tiene un contraejemplo en la *aritmética* obtenido mediante la sustitución de las letras de predicado por predicados aritméticos apropiados.De esta manera las fórmulas se transforman en proposiciones acerca de números naturales.

Este teorema condujo a W. V. O. Quine (1970) a una interesante idea. En buen estilo nominalista, comparó las nociones de validez que hemos considerado, $\vdash$ y $\models$, con el 'enfoque sustitucional' de la validez: toda sustitución por expresiones lingüísticas apropiadas en $\phi_1,\ldots,\phi_n, \psi$ que hace verdaderas a todas las premisas, también hace verdadera a la conclusión.

Puede constatarse en forma sencilla que la derivabilidad sintáctica implica esta forma de validez. Pero, a la inversa, la no derivabilidad también implica (de acuerdo con el Teorema de completitud) la existencia de un contraejemplo, el cual (de acuerdo con el resultado de Hilbert-Bernays) proporciona un contraejemplo en la aritmética, y que a su vez, puede servir como contraejemplo nominalista. Los nominalistas no creen en estructuras abstractas como las que están involucradas en la definición de $\models$. El efecto de la idea de Quine es que, a pesar de ello, los nominalistas pueden reconciliarse con la noción: al menos respecto de la lógica de predicados, no hay nada incorrecto en $\models$. Esto nos permite apreciar que algunas veces los teoremas metalógicos pueden usarse para plantear cuestiones filosóficas.

Hemos visto la manera en que podemos emplear estructuras finitas y enumerablemente infinitas para determinar validez en lógica de predicados. Si existen contraejemplos, entonces los encontraremos en esas estructuras. ¿Puede esto mejorarse aun más? ¿Podemos, tal vez, emplear sólo estructuras *finitas*? La respuesta es que no podemos. Por ejemplo, todo modelo finito de $\forall x \neg Rxx$ (irreflexividad de R) y $\forall x \forall y \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ (transitividad de R) tiene un elemento R-máximo ($\exists x\ \forall y \neg Rxy$). Pero la derivación de la última de esas fórmulas a partir de las dos primeras es inválida. Un contraejemplo serían los números naturales con R interpretada como *menos que* (compárese esto con lo que prometía el Teorema de Completitud de Hilbert y Bernays). Peor aún, como lo probara B. Trahtenbrot en 1950, no puede haber un teorema de completitud para la clase de inferencias de la lógica de predicados que son válidas para estructuras finitas. Estas ideas también tienen cuanto menos alguna importancia para la semántica del lenguaje natural. Dado que las estructuras con las cuales pretenden relacionarse las oraciones del lenguaje natural generalmente son finitas, lo antedicho muestra que las estructuras infinitas no son simplemente una sutileza teórica: son indispensables si queremos tener una noción de validez caracterizable sintácticamente.

En 1969 P. Lindström probó que las metapropiedades que hemos discutido son esencialmente características de la lógica de predicados. (Ahora nos ocupamos sólo de lenguajes que tengan el mismo vocabulario no lógico que la lógica de predicados.)

> Todo sistema lógico juntamente con una semántica, que incluya a la lógica de predicados y para el que se cumplan los teoremas de completitud y de Löwenheim, debe coincidir con la lógica de predicados.

Esta forma de expresarlo no es muy precisa: verdaderamente, un aspecto no trivial del logro de Lindström consistió en encontrar una *formulación* exacta para este teorema metalógico. Pero la idea equivale a lo siguiente: extender la lógica de predicados significa perder al menos una de las metapropiedades de completitud, o el resultado de Löwenheim.

En particular, el sistema más fuerte de la *lógica de segundo orden* es *incompleto*, tal como se consignará con mayor detalle en §5.4. Para este sistema no existe un análogo del teorema de completitud, porque su clase de oraciones universalmente válidas es demasiado compleja como para admitir una axiomatización efectiva. (En relación con los *cuantificadores generalizados*, tales como 'la mayoría' o 'infinitamente muchos', los cuales serán tratados en el vol.2, se presentan efectos similares a los señalados por Lindström.) Este fenómeno es el que hace que la lógica de predicados sea, por un lado, tan adecuada , y, por el otro, que todas sus extensiones sean tan extrañas y constituyan un reto para la investigación.

Otro aspecto de las inferencias que ha sido estudiado extensamente es su *decidibilidad*. ¿Hay un método efectivo de prueba que permita decidir si, para un sistema lógico, una inferencia dada es válida o no? Para la lógica proposicional lo hay. Como ya lo hemos visto, por ejemplo usando la prueba de la tabla de verdad:

> En lógica proposicional, ser un esquema de argumento válido es una noción decidible.

Y *a fortiori*

> Ser una tautología de la lógica proposicional es una noción decidible.

Más aún, mediante métodos un poco más complicados, también se puede establecer la decidibilidad para la lógica de predicados *unarios*: la parte de la lógica de predicados que emplea símbolos de predicado unarios. Sin embargo, la lógica de predicados como un todo es *indecidible*. En 1936, A. Church demostró el resultado negativo mencionado con anterioridad (*teorema de Church*):

> Ser una fórmula universalmente válida de la lógica de predicados no es una noción decidible.

De esta manera, lo mismo debe aplicarse al conjunto de esquemas de argumento válidos de la lógica de predicados. No obstante, a la luz de nuestra discusión previa, lo que sigue *es* verdadero:

> El conjunto de esquemas de argumento válidos en lógica de predicados tiene una axiomatización sintáctica efectiva.

Esto es así porque esta afirmación es siempre verdadera para un sistema que tenga un cálculo de prueba sintáctico que sea completo respecto de su noción de inferencia. Y la lógica de predicados es un sistema de ese tipo. Sin embargo, para los sistemas lógicos incompletos como la lógica de segundo orden que mencionáramos previamente (o la teoría de los tipos que será presentada en el vol. 2), no existe ni siquiera un resultado análogo al mencionado en último lugar. El conjunto de esquemas de argumento que son válidos en esos sistemas no tiene ninguna caracterización sintáctica efectiva. Esto no significa que no pueda usarse el cálculo de la deducción natural en estos casos: de hecho, hay cálculos de prueba sintácticos correctos e interesantes para la lógica de segundo orden también. Pero en vista de la ineludible incompletitud del sistema, dichos cálculos nunca pueden producir todas sus fórmulas universalmente válidas.

Todos estos resultados dan una idea acerca de los poderes y limitaciones del aparato lógico de la deducción. Pero el razonamiento concreto siempre involucra dos factores distintos: hay una inferencia y hay estructuras de *conocimiento* iniciales a partir de las cuales debe seguirse la inferencia. El segundo aspecto formal también ha sido estudiado extensamente por los lógicos desde una perspectiva matemática, siguiendo una larga tradición en la investigación acerca de los fundamentos de la matemática (y ocasionalmente de otras ciencias también). Esto comprende investigaciones acerca de la estructura lógica de las teorías matemáticas axiomatizadas, las diversas propiedades metalógicas que las teorías pueden tener, y las relaciones lógicas que se pueden establecer entre ellas en la red de conocimiento científico. Para el estudio de temas tales como la representación eficiente y la comunicación del conocimiento se vuelven relevantes muchos rasgos diferentes de nuestro aparato lógico. Éstos van desde la elección de un vocabulario óptimo en el cual formularlo a la elección de un sistema de inferencia apropiado mediante el cual desarrollarlo y transmitirlo. Por ejemplo, se han obtenido resultados acerca del papel de las *definiciones* en las teorías científicas (Teorema de Beth). A pesar de que la investigación acerca de los fundamentos tiende a desarrollarse en un medio que se preocupa más por el lenguaje científico que por el lenguaje natural, también es una fuente de inspiración para la lógica general y para los estudios semánticos (para un estudio extenso véase Barwise 1977).

Ejercicio 17 ◇

Algunos libros de texto de lógica consideran que la habilidad lógica básica consiste en *conservar la consistencia* más que en realizar inferencias. De manera que resulta interesante estudiar las propiedades básicas de la consistencia. Pruebe o refute las siguientes afirmaciones para conjuntos de fórmulas X, Y y fórmulas ϕ:

(i) Si X e Y son consistentes, entonces también lo es su unión $X \cup Y$.
(ii) Si X es consistente, entonces también lo es $X \cup \{\phi\}$ o $X \cup \{\neg\phi\}$.
(iii) Si X es inconsistente y ϕ no es universalmente válida, entonces existe una $Y \subseteq X$ consistente maximal que no implica a ϕ. ¿Este Y es único?

Ejercicio 18 ◇

A pesar de que la lógica de predicados tomada en su totalidad es indecidible, muchas de sus *partes* se comportan mejor respecto de la decidibilidad. Por ejemplo, como se mencionó anteriormente en el texto, la lógica de predicados *unarios* es decidible. Otra instancia provechosa es la parte consistente en *fórmulas universales*, esto es, fórmulas con predicados arbitrarios pero que contengan solamente cuantificadores universales restringidos a apariciones delante de fórmulas sin cuantificadores.

(i) ¿Cuáles de los requerimientos expresados anteriormente para las relaciones binarias (véase §3.8) son universales?
(ii) Pruebe que la consecuencia válida entre las fórmulas universales es decidible, mostrando que para su determinación es necesario tener en cuenta sólo ciertos modelos finitos.

5 Más allá de la lógica estándar

5.1 Introducción

Tal como lo señaláramos en el capitulo 1, no existe una cosa tal como *una* lógica para propósitos generales que caracterice a *todos* los argumentos válidos o las relaciones entre los significados de *todas* las expresiones de un lenguaje. Hay una amplia gama de sistemas lógicos, cada uno de los cuales investiga argumentos cuya validez depende de ciertas expresiones, a saber, las constantes lógicas de ese sistema. Sin embargo, la lógica proposicional y la de predicados, los dos sistemas lógicos discutidos en los capítulos precedentes, pueden ser consideradas como *lógica estándar*, dado que todos los otros sistemas pueden tomarse por extensiones, desviaciones (lógicas divergentes) o variantes de éstas. En el volumen 2 discutiremos dos extensiones amplias e importantes, la *lógica intensional* y la *lógica de los tipos*. En este capítulo nos ocuparemos de extensiones, desviaciones y variantes más pequeñas y menos importantes. Hay dos razones para hacer esto. En primer lugar, para enfatizar que el conjunto de herramientas que la lógica ofrece a otras disciplinas es bastante amplia. Se dispone de una amplia gama de sistemas lógicos diferentes para diversos propósitos, y si la herramienta apropiada no está disponible, a menudo es posible adaptar otra para la tarea. En segundo lugar, especialmente en el caso de la lógica de segundo orden que abordaremos en §5.4, con el fin de preparar el terreno para los sistemas lógicos más ricos que discutiremos en el volumen 2.

Un sistema lógico queda caracterizado por su conjunto de *constantes lógicas* y por la *interpretación* que reciben. O, dicho de otra forma, un sistema lógico queda caracterizado por los *esquemas de argumento* que son válidos en el mismo. Ahora bien, la razón principal por la cual nos apartamos de la lógica estándar consiste en que deseamos obtener más esquemas de argumento válidos, o esquemas diferentes de argumentos válidos. Una *extensión* de un sistema lógico tiene un conjunto más grande de constantes lógicas, de manera que puede tratar a los esquemas de argumento sobre la base de nuevas constantes además de todas las del esquema de argumento original. Se dice que se trata de una extensión del sistema original porque extiende el conjunto de los esquemas de argumento válidos. Una *desviación* de un sistema lógico emplea las mismas constantes lógicas pero las interpreta en forma diferente. Así, el conjunto de esquemas de argumento válidos no se amplía; pero, en cierto sentido, cambia. Una lógica desviada tiene la misma sintaxis que el sistema original, de manera que no se modifica su apariencia, sino que lo que cambia es el contenido.

Una *variación* de (o *variante* de) un sistema lógico es lo opuesto a una desviación. El contenido es el mismo pero se altera la sintaxis. Una variante caracteriza al mismo conjunto de esquemas de argumento válidos. Ya hemos visto una variante de la lógica proposicional, a saber, el sistema lógico obtenido en §2.7 al reemplazar la conectiva coordinante $\rightarrow$ por la conectiva subordinante $\mapsto$, e interpretarla en forma directa por medio de funciones de verdad. En §5.6 nos ocuparemos de una variante de la lógica de predicados estándar en la que no se emplean variables; el papel de las mismas es desempeñado por ciertas clases de operaciones. Esto implica una drástica modificación de la sintaxis, pero el contenido de la lógica de predicados estándar queda inalterado. §5.3 está dedicado a la lógica de predicados multivariada, una variante de la lógica de predicados muy útil/factible/común. En la lógica multivariada el dominio se divide en varios subdominios, cada uno de los cuales contiene alguna clase particular de entidad.

La lógica intuicionista, mencionada brevemente en §4.3, es un ejemplo obvio de lógica desviada de la lógica proposicional estándar; y las lógicas multivalentes que discutiremos en §5.5 son otros ejemplos. Estas últimas se apartan de la lógica estándar al atribuir a las oraciones otros valores de verdad además de los dos que hemos estado usando hasta ahora, *verdadero* y *falso*. Al menos inicialmente, la sintaxis de la lógica proposicional permanece inalterada, pero las constantes lógicas reciben otra interpretación. Un resultado característico de lo anterior es que en lógica multivalente, al igual que en lógica intuicionista, la ley del tercero excluido ya no se cumple. La fórmula $\phi \vee \neg\phi$ ya no es universalmente válida.

La forma más simple de *extensión* se obtiene sencillamente agregando una o más constantes lógicas, sin cambiar de ninguna forma las interpretaciones del sistema. Ya hemos tratado esto en §3.7, donde se discutió la *lógica de predicados estándar con identidad*. Habiendo agregado = como constante lógica, obtuvimos más esquemas de argumento válidos y pudimos, por ejemplo, definir los numerales por medio de cuantificadores e identidad. En §5.2 nos referiremos a extensiones de lenguajes de la lógica de predicados estándar obtenidos agregando *descripciones*. Las descripciones son expresiones lógicas compuestas por medio de las cuales podemos referirnos a individuos. Pueden servir, por ejemplo, para representar *descripciones definidas* como *la actual reina de Holanda*. En cierto sentido las extensiones del lenguaje lógico que se obtienen agregando descripciones, lo cual implica adicionar el *operador iota* como constante lógica nueva, no aportan ninguna modificación esencial, dado que las fórmulas que contienen descripciones pueden, bajo ciertas circunstancias, reemplazarse por fórmulas que contengan sólo los cuantificadores usuales y la identidad.

Pero, extender la lógica de predicados estándar a la lógica de segundo orden, tema que discutiremos en §5.4, implica cambios esenciales. Para decirlo en pocas palabras, equivale a introducir variables de predicado que cumplen la misma función respecto de las propiedades que la que cumplen las variables de individuo usuales respecto de las entidades individuales. Se pueden colocar cuantificadores delante de las variables de predicado, de la misma forma en que pueden colocarse delante de las variables individuales, y esto permite cuantificar propiedades. El resultado es un sistema lógico genuinamente más rico. Por otro lado, las interpretaciones no se alteran; los modelos para la lógica de predicados estándar están incluidos en los modelos para la lógica de segundo orden. Las expresiones de un lenguaje para la lógica de segundo orden siguen siendo interpretadas en términos de los dos valores de verdad y un conjunto de entidades, y lo mismo se aplica para la *lógica de los tipos* que investigaremos en el volumen 2; la cual es una extensión de la lógica de segundo orden y, por consiguiente, de la lógica de predicados estándar. Sin embargo no se aplica lo mismo a la *lógica intensional*, otra extensión de la lógica estándar que discutiremos en el volumen 2. La lógica intensional no sólo es un sistema más rico, sino que los modelos en términos de los cuales se interpreta el lenguaje también son más ricos. Respecto de esto, puede decirse que la lógica intensional es a la lógica de predicados lo que la lógica de predicados es a la lógica proposicional. Los modelos para la lógica de predicados incluyen algo que los modelos para la lógica proposicional no tienen: un conjunto de entidades. Y los modelos para la lógica intensional incluyen un conjunto de *contextos* que los modelos para la lógica de predicados no tienen.

No nos extenderemos más sobre el tema de las relaciones entre la lógica estándar y los sistemas lógicos no estándar que desarrollaremos aquí o en el volumen 2. A esta altura la amplia variedad de sistemas lógicos puede parecer un poco sobrecogedora, pero, como veremos, sus similitudes son más numerosas y más significativas que sus diferencias. Por ejemplo, para los diversos sistemas serán distintos los esquemas de argumento que son válidos; pero la noción de validez lógica es en esencia común a todos ellos, al igual que algunos aspectos importantes del concepto de significado. (El concepto de significado empleado en lógica se discute en el cap. 1, vol. 2.) Además, en lo que concierne a la relación entre lenguaje y significado, el principio de composicionalidad desempeña un papel central en todos los sistemas. Existe un consenso considerable acerca de lo que son la lógica, el lenguaje y el significado y acerca de sus mutuas relaciones.

5.2 Descripciones definidas

En lógica de predicados estándar hay sólo una clase de expresiones que puede usarse para referirse a alguna entidad o individuo en particular y ésta es la de las constantes de individuo. Por otra parte, la idea subyacente a las variables de individuo es que no se refieren a individuos particulares sino que pueden usarse para referirse a muchas cosas distintas. En casi todos los ejemplos de traducciones del lenguaje natural a la lógica de predicados que hemos visto hasta ahora, las constantes de individuo han servido como traducciones de nombres propios. Los nombres propios son expresiones que se refieren a cosas individuales particulares, pero afortunadamente no son las únicas expresiones que pueden usarse para este propósito. Si así fuere, sería imposible hablar acerca de la gente sin conocer sus nombres. Otra forma de referirse a individuos o cosas en particular es por medio de una descripción, como en (1)-(4).

(1) La reina de Holanda.

(2) El primer hombre en pisar la Luna.

(3) La madre de Elvis Presley.

(4) El rancho de Ronald Reagan.

Expresiones como éstas se denominan *descripciones definidas*. Cada uno de los ejemplos consiste en una expresión predicativa, que puede ser compuesta y un artículo definido. Los predicados de los ejemplos se eligieron de forma que podamos estar razonablemente seguros de que existe sólo un individuo que satisface a cada uno de ellos, siendo éstos los únicos individuos a los que se refieren las descripciones definidas.

Hasta aquí hemos usado sencillamente constantes de individuo en tanto que traducciones formales de las descripciones definidas. Pero las traducciones serán más fieles si introducimos una notación especial para las mismas que haga justicia a su carácter de expresiones compuestas. Para este propósito introducimos ahora al *operador iota* ι (*iota* griega) que, al igual que los cuantificadores existencial y universal, siempre precede a una variable y está seguido por una función proposicional, la cual es su alcance. El operador iota aparece en expresiones como ιxFx, $\iota xGxy$, y $\iota x(Fx \wedge Gxa)$. Estas expresiones se denominan *descripciones*. Las descripciones son términos compuestos, dado que mientras que un cuantificador seguido por una función proposicional es una oración u otra función proposicional, el operador iota seguido por una función proposicional es siempre un término, una expresión que puede aparecer entre los argumentos de un predicado *n*-ario al igual que una constante o una variable de individuo. De esta forma obtenemos fórmulas como:

(5)	$C_1(\iota xR_1x)$	La reina de Holanda está conduciendo una bicicleta.
(6)	$b = \iota xQx$	Beatriz es la reina de Holanda.
(7)	$\iota xR_1x = \iota xJx$	La reina es la jefa de Estado.
(8)	$\forall x(H_1x \rightarrow A(x, \iota yR_1y)$	Todo holandés ama a la reina.
(9)	$g = \iota xH_2(x, \iota yR_1y)$	Guillermo Alejandro es el hijo de la reina.

A pesar de que en sentido estricto no es necesario, en ocasiones agregaremos paréntesis extra y separaremos los argumentos de las relaciones mediante comas, a fin de que las fórmulas sean más legibles. Nótese que en estos ejemplos la expresión *reina de Holanda*, entre otras, se ha traducido como un predicado unario. Obviamente podemos explicitar la estructura con mayor profundidad traduciendo (5) como, por ejemplo, $C_1(\iota xR_1(x, h))$.

Para poder incorporar las descripciones formadas con el operador *iota* al lenguaje de la lógica de predicados, debemos ampliar la definición de fórmula de la lógica de predicados (definición 1 en §3.3) para convertirla en una *definición inductiva simultánea* de términos y fórmulas. Debemos definir ambos conjuntamente porque ahora las fórmulas pueden formar parte de los elementos con los que se construye un término y viceversa. A continuación consignamos las cláusulas que deben agregarse para lograr esto:

(a) Si α es una constante o variable de individuo en L, entonces α es un término en L.

(b) Si ϕ es una fórmula en L y x es una variable, entonces $\iota x\phi$ es un término en L.

La cláusula para fórmulas atómicas será:

(i) Si A es una letra de predicado n-aria ($n \geqslant 1$) y $t_1 \dots t_n$ son términos en L, entonces $At_1 \dots t_n$ es una fórmula en L.

No es necesario modificar las cláusulas (ii)-(iv) para conectivas y cuantificadores. Sólo se requiere adaptar la cláusula final:

(v) Sólo las expresiones que puedan ser generadas mediante las cláusulas (i)-(iv) en un número finito de pasos son fórmulas o términos en L.

La innovación sintáctica obtenida al introducir el operador iota en el lenguaje de la lógica de predicados no es suficiente. También debemos ajustar la semántica diciendo cómo deben interpretarse las nuevas descripciones. Aquí empleamos el enfoque B de las interpretaciones que emplea asignaciones, expuesto en §3.6.3. Ahora juntamos la definición 8, que interpreta términos, con la definición 9, la definición de verdad, obteniendo de esta manera una nueva definición que interpreta simultáneamente términos y fórmulas del lenguaje de la lógica de predicados con descripciones. Para interpretar descripciones agregamos la siguiente cláusula nueva:

(10) $\|\iota x\phi_{M,g}$ es el único individuo $d \in D$ tal que $V_{M,g[x/d]}(\phi) = 1$.

Debemos vincular de esta forma las definiciones que interpretan términos con aquellas que interpretan fórmulas, porque la interpretación de todo término ahora depende de las interpretaciones de las fórmulas que aparecen en el mismo (y viceversa). Sin embargo, el problema con (10) es que si no hay exactamente un individuo que satisfaga ϕ, entonces $\|\iota x\phi\|_{M,g}$ no queda definido. Si no existe un individuo tal, o si hay muchos, entonces (10) no dice de qué forma debería interpretarse $\iota x\phi$. (11) y (12) son ejemplos de descripciones en las que esto falla en el mundo real. (13) es un ejemplo bien conocido de Russell.

(11) El hermano de la reina Beatriz.

(12) La hija de la reina Beatriz.

(13) El rey de Francia.

El hecho de que estas descripciones quedan indefinidas se transfiere también a algunas oraciones en las que aparecen las mismas. Por ejemplo, la oración (14) no es ni verdadera ni falsa:

(14) El rey de Francia es calvo.

Expresado formalmente, si no hay un único individuo que satisfaga ϕ, entonces no sólo $\|\iota x\phi\|_{M,g}$ queda indefinida sino que también sucede lo mismo con $V_{M,g}(F(\iota x\phi))$, lo cual significa que la fórmula $F(\iota x\phi)$ no es ni verdadera ni falsa. Pero el principio fundamental de bivalencia, que requiere que toda fórmula sea o bien verdadera o bien falsa, no permite esto. Hay muchas maneras de abordar el problema, pero aquí sólo discutiremos las soluciones propuestas por Frege y Russell. Ambas se esfuerzan por mantener el principio de bivalencia. En este punto difieren del enfoque adoptado en las lógicas multivalentes, en las que se toman en cuenta otros valores de verdad además de *verdadero* y *falso*. Más adelante en esta sección volveremos sobre este enfoque y lo trataremos en mayor extensión en §5.5, dedicado a lógicas multivalentes.

Frege consideraba que la aparición de descripciones definidas que no denotan alguna cosa única constituían una deficiencia del lenguaje natural. Pensó que un lenguaje lógico adecuadamente construido debe proporcionar siempre un único *descriptum*. Una forma de hacer esto consiste en incluir en el dominio una *entidad nula* especial, la cual se toma por convención como la entidad denotada por las descripciones que no logran satisfacer el requisito existencial o el requisito de unicidad. Lo mismo se hace en matemáticas, donde, por ejemplo, se considera que 0 es el valor de $x/0$ si se desea que x/y siempre se defina. Es claro que la solución de Frege es puramente formal y no es muy intuitiva, pero resuelve las dificultades técnicas.
Si d_0 es el individuo especial nulo, entonces la cláusula para interpretar descripciones puede ser la siguiente:

(15) $\|\iota x\phi\|_{M,g}$ es el único individuo $d \in D$ tal que $V_{M\,g[x/d]}(\phi) = 1$ si existe un individuo tal; de lo contrario es el individuo nulo d_0.

Dada la cláusula (15), la interpretación de las descripciones queda definida bajo toda circunstancia. Y si nos aseguramos que d_0 no pertenece a la interpretación de ningún predicado normal tal como *calvo*, entonces la oración (14) es falsa.

La solución de Russell tiene en común con la solución propuesta por Frege no sólo que conserva el principio de bivalencia sino también que localiza la raíz del problema en una deficiencia del lenguaje natural. La solución de Russell se conoce como su *teoría de las descripciones* y fue presentada por primera vez en su artículo "On Denoting" (1905). El enfoque sigue la línea de la tesis de la forma engañosa, de acuerdo con la cual a veces la forma gramatical de las oraciones no refleja su forma lógica 'real' y por ello es engañosa (véase también §1.5.1). Esta tesis ha desempeñado un papel prominente en la filosofía analítica. Se consideró que una tarea importante de la filosofía consistía en ir más allá de la forma gramatical superficial de las oraciones y revelar su forma lógica subyacente. La teoría de las descripciones de Russell es un ejemplo clásico de esto último.

Al analizar las descripciones definidas como descripciones formadas por medio del operador iota habíamos supuesto que las descripciones definidas y los nombres propios tienen la misma función sintáctica. Oraciones como (16) y (17) parecerían sugerir que esto es bastante razonable:

(16) Beatriz está conduciendo una bicicleta.

(17) La reina de Holanda está conduciendo una bicicleta.

Tanto el nombre propio *Beatriz* como la descripción definida *la reina de Holanda* parecen asumir el papel de sujeto del predicado *está conduciendo una bicicleta*. En este punto Russell intervendría diciendo que la forma gramatical de estas dos oraciones es engañosa. Las descripciones definidas deben considerarse sujetos normales sólo en la misma medida que las expresiones cuantificadas como *todos* y *ninguno*. El problema con las descripciones definidas se genera porque tomamos equivocadamente su forma gramatical engañosa por su forma lógica.

La teoría de Russell de las descripciones nos proporciona un método para traducir fórmulas que contengan al operador iota a fórmulas que contengan sólo los cuantificadores usuales de la lógica de predicados estándar. Este método emplea *definiciones contextuales*. No podemos brindar una definición general del operador iota y de las descripciones que se forman con el mismo (esto sería una *definición explícita*). Pero, para cada fórmula dada que contenga una descripción, es decir en cualquier contexto particular, podemos proporcionar una fórmula equivalente en la cual se reemplaza el operador iota por los cuantificadores usuales. La eliminación del operador iota significa que se puede conservar el principio de bivalencia. De acuerdo con Russell, una oración como (17) expresa que existe un individuo x que tiene las siguientes tres propiedades:

(i) x es la reina de Holanda: R_1x;

(ii) ningún individuo y distinto de x tiene la propiedad de ser la reina de Holanda: $\forall y(R_1y \rightarrow y = x)$; y

(iii) x está conduciendo una bicicleta: C_1x.

Esto significa que la oración (17) puede traducirse como la siguiente fórmula (18); la misma puede parecer un poco complicada pero está formulada en lógica de predicados estándar:

(18) $\exists x(R_1x \wedge \forall y(R_1y \rightarrow y = x) \wedge C_1x)$

También se puede dar la siguiente formulación equivalente un poco más sencilla:

(19) $\exists x(\forall y(R_1y \leftrightarrow y = x) \wedge C_1x)$

En general, lo que antecede significa que toda fórmula de la forma $G(\iota xFx)$ puede reducirse a una fórmula de la lógica de predicados estándar mediante la siguiente definición:

Definición 1

$$G(\iota xFx) =_{def} \exists x(\forall y(Fy \leftrightarrow y = x) \wedge Gx)$$

Como mencionamos anteriormente, ésta es una definición contextual de las descripciones. En lógica de predicados no se puede dar una definición explícita del operador *iota*. Nótese también que la definición 1 puede expresarse en forma más general, dado que tal como la consignamos puede usarse sólo si la función proposicional que figura en la descripción es una fórmula atómica con un predicado unario y si el contexto es tal que la descripción misma aparece como el argumento de un predicado unario. Aquí omitiremos la formulación general obvia de la definición 1.

La oraciones como (14), que contienen descripciones que no logran satisfacer el requisito existencial o que no logran satisfacer el requisito de unicidad, son sencillamente falsas, como es el caso en el análisis de Frege. Si Holanda no tuviera una monarquía o sencillamente no tuviera un monarca, entonces (19), la traducción de (17), sería falsa. Éste es el punto fuerte de la teoría de Russell, pero según algunos estudiosos, como Strawson (1950), también es su punto débil. De acuerdo con el análisis de Strawson, la existencia de exactamente un individuo que tenga la propiedad de ser la reina de Holanda no *se afirma* cuando se profiere la oración (17); *se presupone*. Y si no queda satisfecho este *presupuesto*, entonces no podemos decir que se expresa una proposición que es verdadera o falsa. No intentaremos decidir si la posición correcta es la de Strawson o la de Russell. Para nuestros propósitos actuales importan más algunas de las implicaciones de la posición de Strawson desde un punto de vista lógico. El tratamiento que hace Russell de las descripciones definidas deja inalterada a la lógica de predicados estándar, pero el enfoque de Strawson parecería poner en cuestión al principio de bivalencia. En §5.5 analizaremos algunos intentos por proporcionar una base lógica a la posición de Strawson empleando un sistema de lógica multivalente.

Toda teoría de las descripciones definidas debe dar alguna explicación de las expresiones negativas que contengan descripciones definidas, como las siguientes:

(20) La reina de Holanda no está conduciendo una bicicleta.

(21) El rey de Francia no es calvo.

Para Strawson la cuestión es bastante sencilla: estas oraciones presuponen la existencia de una única reina de Holanda y de un único rey de Francia, tal como lo hacen las oraciones afirmativas con las que comenzamos y afirman que la primera no está conduciendo una bicicleta y que el último no es calvo.

La teoría de Russell es un poco más sutil. Superficialmente podríamos pensar que la oración (21) es precisamente la negación de la oración (14), de manera que debe ser verdadera bajo toda circunstancia que hace falsa a (14). De acuerdo con Russell, la cuestión no es tan sencilla. Russell considera que una oración como (21) es ambigua, de forma tal que según una lectura es verdadera y según otra es falsa. La lectura que la hace verdadera puede ser parafraseada como sigue: no se da el caso que hay un único individuo que es rey de Francia y es calvo. La fórmula (22) corresponde a esta lectura. La lectura según la cual (21) es falsa puede parafrasearse como: Hay un único individuo que es rey de Francia y no es calvo. La fórmula (23) concuerda con esta lectura (R_2x: x es rey de Francia; C_2x: x es calvo).

(22) $\neg\exists x(\forall y(R_2y \leftrightarrow y = x) \wedge C_2x)$

(23) $\exists x(\forall y(R_2y \leftrightarrow y = x) \wedge \neg C_2x)$

Ambas fórmulas de la lógica de predicados estándar pueden obtenerse a partir de la representación de (21) mediante el operador iota: $\neg C_2(\iota xR_2x)$. La primera se obtiene aplicando la definición 1 a $C_2(\iota xR_2x)$ en la fórmula $\neg C_2(\iota xR_2x)$. Esto otorga al operador negación amplio alcance sobre los cuantificadores, como queda de manifiesto a partir de (22). La fórmula (23) se obtiene aplicando la definición 1 a la fórmula $\neg C_2(\iota x R_2 x)$ misma. En este caso los cuantificadores tienen amplio alcance. Según la terminología del propio Russell, (23) representa la lectura de (21) en la que la descripción definida tiene una ocurrencia *primaria* y (22) representa la lectura en la que la descripción definida tiene una ocurrencia *secundaria*.

Para una oración como (21), el enfoque de Frege proporciona en forma más natural la lectura según la cual es falsa. Pero incluso si las descripciones se interpretan según el enfoque de Frege, es posible traducirlas por medio de una definición contextual a una formulación que emplee los cuantificadores usuales. Si se hace esto, entonces se produce una ambigüedad similar a la que notamos en el enfoque de Russell. La ventaja que tiene la teoría de Russell sobre la de Frege es que no requiere de la entidad nula. Por otro lado, la teoría de Frege permite que las descripciones definidas se interpreten como tales. Hemos mencionado que la teoría de las descripciones de Russell se inspira en la idea de que la forma gramatical a menudo es engañosa. Desde un punto de vista sintáctico, las descripciones definidas parecerían ser aptas para desempeñar el mismo papel que los nombres propios; parecería que son entidades independientes. Pero, desde un punto de vista lógico esto no es manifiestamente verdadero. El hecho de que las descripciones sólo admiten una definición contextual muestra que, al menos en lo que concierne a su forma lógica, las descripciones definidas no son entidades independientes. No existe una expresión lógica que corresponda a la descripción *la reina de Holanda*. Así, las descripciones se asemejan a (otros) términos cuantificados como *cada hombre*, *algún hombre* y *todo hombre*. La forma lógica de expresiones como éstas sólo puede darse en forma relativa a los contextos, es decir las oraciones completas, en los que aparecen. Al igual que el análisis lógico de oraciones cuantificadas universal y existencialmente, la teoría de Russell de las descripciones parecería apoyar la idea de que hay una diferencia fundamental entre la forma gramatical de las oraciones, es decir, su forma sintáctica superficial y su forma lógica. Esta idea ha sido extremadamente influyente.

Nótese que todo lo expresado aquí acerca de 'expresiones lógicas' y 'formas lógicas' se aplica solamente a expresiones de la lógica de predicados estándar y a formas lógicas de la lógica de predicados estándar. Debemos tener presente esta restricción cuando concluimos que hay una diferencia esencial entre forma gramatical y forma lógica. Desde la perspectiva de la lógica de predicados, las descripciones y los cuantificadores no pueden ser unidades independientes, pero esto no implica que no haya sistemas lógicos en los cuales sean unidades independientes. En el volumen 2 mostraremos que tanto las descripciones definidas como (otras) expresiones cuantificadas pueden traducirse al lenguaje formal si tomamos en cuenta un lenguaje lógico más rico que el de la lógica de predicados estándar (a saber, la lógica de orden superior con abstracción lambda), de manera que puedan interpretarse como unidades independientes. Así, las descripciones y las expresiones cuantificadas también pueden colocarse en la misma categoría lógica, de manera que la forma gramatical que Russell consideraba tan engañosa puede ser rehabilitada en lo que concierne a la forma lógica. Estos resultados van en contra de la influyente idea según la cual hay una distinción fundamental entre forma gramatical y lógica.

5.3 Cuantificación restringida: lógica de predicados multivariada

En §3.3 las oraciones (24) y (25) se tradujeron como las fórmulas (26) y (27) respectivamente:

(24) Todos los maestros son tolerantes.

(25) Algunos maestros son tolerantes.

(26) $\forall x(Mx \rightarrow Tx)$

(27) $\exists x(Mx \wedge Tx)$

Decimos que el cuantificador $\forall x$ está *restringido a* Mx en (26) y que el cuantificador $\exists x$ está *restringido a* Mx en (27). En general: si ϕ es una fórmula que tiene a x como variable libre, entonces se dice que $\forall x$ está restringido a ϕ en $\forall x(\phi \rightarrow \ldots)$ y que $\exists x$ está restringido a ϕ en $\exists x(\phi \wedge \ldots)$. Lo mismo se aplica si la fórmula completa es subfórmula de alguna otra fórmula. Si se examinan los ejemplos de traducciones dados hasta aquí, se verá que los cuantificadores casi siempre están restringidos. Las expresiones como *todos* (*everyone*) y *alguien* se cuentan entre las pocas que pueden traducirse como cuantificadores no restringidos, e incluso son las únicas si la oración no dice nada acerca de otras entidades que no sean personas, dado que ésta es la condición bajo la cual podemos restringir el dominio a personas. Si se mencionan cosas que no sean personas, entonces se necesitan cuantificadores restringidos; por ejemplo, en la fórmula (29), que es la traducción de (28), se necesitan dos:

(28) Todos le dieron algo a Daniel.

(29) $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Cy \wedge Dxyd))$

El cuantificador $\forall x$ ha sido restringido a P (para personas) y el cuantificador $\exists y$ se ha restringido a C (para cosas). De esta forma el dominio incluye tanto personas como cosas.

Tal vez sería más natural dividir el dominio en diferentes subdominios, por ejemplo, distinguiendo entonces entre personas, otros seres vivientes y todas las otras cosas. Se pueden usar variables tipográficamente diferentes, interpretándolas en diferentes subdominios. Así, por ejemplo, podemos tener x, y, z como variables para el subdominio que contiene sólo personas; k, l, m como variables para otros seres vivientes; u, v, w como variables que se refieren a todas las otras cosas (adicionando subíndices a cada una de esas variables en caso de que corran el riesgo de agotarse). En este caso será necesario consignar los subdominios de las interpretaciones de las diferentes constantes. De esta forma, la oración (28) puede traducirse como (30):

(30) $\forall x \exists u Dxud$

Adviértase que (30) tiene los cuantificadores no restringidos $\forall x$ y $\exists u$ en lugar de los cuantificadores restringidos $\forall x(Px \rightarrow$ ... y $\exists y(Cy \wedge$ de (29). El precio a pagar por esta simplificación es que se complica la definición del lenguaje y de la sintaxis.

Como resultado de las modificaciones mencionadas más arriba se obtiene una lógica denominada *lógica de predicados multivariada*. Al definir un lenguaje para la lógica de predicados multivariada, debemos especificar qué clases hay, cuáles son sus respectivas variables y a qué clase pertenece cada una de las constantes. Al formular la semántica, también debemos dividir todos los dominios en diferentes subdominios, uno para cada clase. Luego se debe proporcionar una definición de verdad. Dado que esto último no resulta muy complicado, dejamos esta tarea al lector.

Es dificil apreciar lo que se gana al introducir nuevos lenguajes para los propósitos antes mencionados. Todo lenguaje multivariado para la lógica de predicados puede convertirse en un lenguaje para la lógica de predicados estándar agregando letras de predicado unarias, una para cada clase. Así, las variables pueden interpretarse sobre el dominio completo, los predicados se apropian de la tarea de referir a las diferentes clases. Por ejemplo, considerando a (30) como una fórmula de la lógica multivariada e introduciendo P y C para referirse a las clases correspondientes a x y a u respectivamente, puede recuperarse (29) (o al menos una variante que, a pesar de tener variables diferentes a las de (29), tiene la misma interpretación). En forma similar, cualquier modelo para la lógica de predicados multivariada puede convertirse de manera sencilla en un modelo para la lógica de predicados estándar.

Pero la lógica de predicados multivariada tiene algunas ventajas. Por ejemplo, considérense las oraciones (31) y (32):

(31) El Monte Blanco le dio algo a Daniel.

(32) Todos le dieron algo al Monte Blanco.

Al traducir estas oraciones a la lógica de predicados estándar obtenemos las dos oraciones siguientes:

(33) $\exists y(Cy \wedge Dmyd)$

(34) $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Cy \wedge Dxym))$

Pero en lógica multivariada también podemos elegir bloquear la traducción de (31) y de (32). Podemos elegir que se requiera, por ejemplo, que las cosas sólo se den a personas o sólo las personas den cosas, aceptando Dhst como fórmula sólo si h y t son las clases correctas de constantes o variables, es decir, que se refieren a personas. Pero este enfoque trae aparejados numerosos problemas, comenzando por las especificaciones exactas para las clases de clases de variables que cada uno de los predicados puede aceptar como argumentos. Por esta razón este enfoque no parece muy satisfactorio para abordar tales oraciones. Pero esto reaparece bajo una forma más satisfactoria (vol. 2) en la *lógica de los tipos*, donde las diferentes clases (*tipos*) distinguen expresiones que tienen *funciones* completamente diferentes. En la lógica de segundo orden (véase §5.4) hallamos algo similar. Otra forma de resolver la eventual inquietud respecto de (31) y de (32) consiste en no impedir que se traduzcan a fórmulas pero hacer los arreglos necesarios para que en la semántica las fórmulas no reciban ni el valor de verdad *verdadero* ni el valor de verdad *falso*. El sistema lógico que surge como consecuencia de esto, la lógica multivalente (véase §5.5), no es una variante de la lógica de predicados estándar sino una genuina lógica desviada de la misma. Incidentalmente, estos tipos de problemas también han sido tema de animados debates en lingüística, centrados en ejemplos como el bien conocido (35):

(35) Las incoloras ideas verdes duermen furiosamente.

La oración (35) viola las *restricciones en la selección*. Si se piensa que las restricciones en la selección son una cuestión sintáctica, se elige la primer alternativa bosquejada más arriba, juzgando que las oraciones como (31), (32) y (35) están sintácticamente mal formadas. Si se piensa que pertenecen a la semántica, se elegirá la segunda alternativa. Otros piensan que la explicación acerca de lo que es insatisfactorio respecto de oraciones como (31), (32) y (35) debe buscarse absolutamente fuera de la gramática.

Una lógica de predicados multivariada sólo ofrece una solución mínima a lo que algunos consideran como antinatural respecto de la forma en que se manipulan los cuantificadores al traducir (24) como (26), (25) como (27) y (28) como (29). ¿Qué sucede con oraciones como (36)?

(36) Toda la gente acaudalada le dio algo a Daniel.

La misma se traduce como (37) en la lógica estándar o, en forma equivalente, como (38):

(37) $\forall x((Px \wedge Ax) \rightarrow \exists y(Cy \wedge Dxyd))$

(38) $\forall x(Px \rightarrow (Ax \rightarrow \exists y(Cy \wedge Dxyd)))$

El cuantificador $\forall x$ está restringido a $Px \wedge Ax$ en (37) y está restringido dos veces en (38), primero a Px y luego a Ax, que equivale a lo mismo. De manera que para 'encubrir' estas restricciones en una lógica multivariada deberíamos introducir algunas clases más, para Ax y para $Px \wedge Ax$. Esto no es muy elegante; pero además, distinguir entre personas y personas acaudaladas mediante la introducción de clases especiales para ellas sienta un mal precedente. No queda claro dónde debería detenerse la división en clases cada vez más especiales. Quizás aquello que se considera antinatural respecto de traducciones como (37) y (38) pueda eliminarse más fácilmente si se recuerda que lo que importa respecto de las traducciones no son las fórmulas en sí mismas sino sus significados. Una traducción es realmente una interpretación indirecta, en la cual las fórmulas funcionan como intermediarios entre las oraciones y sus significados. Las fórmulas son *notaciones* para los significados. Y las notaciones no son ni naturales ni antinaturales, sencillamente son más útiles o menos útiles. En este caso podría ser mejor introducir una notación escribiendo $\forall x^{\phi}(\psi)$ en lugar de $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ y $\exists x^{\phi}(\psi)$ en lugar de $\exists x(\phi \wedge \psi)$. Por ende, (26), (27), (29), (33) y (37) pueden reescribirse como (39), (40), (41), (42) y (43) respectivamente:

(39) $\forall x^{Mx}(Tx)$

(40) $\exists x^{Mx}(Tx)$

(41) $\forall x^{Px}\exists y^{Cy}(Dxyd)$

(42) $\exists y^{Cy}(Dmyd)$

(43) $\forall x^{Px \wedge Ax}\exists y^{Cy}(Dxyd)$

La notación de una fórmula como (38) conserva el cuantificador restringido, como se aprecia en (44):

(44) $\forall x^{Px}(Ax \rightarrow \exists y^{Cy}(Dxyd))$

Una solución para esto sería acortar aun más tales fórmulas. Por ejemplo, (44) podría acortarse como (45):

(45) $\forall x^{Px\ Ax}\exists y^{Cy}(Dxyd)$

Al formular tales taquigrafías, uno debe asegurarse de que la fórmula original pueda siempre recuperarse a partir de su abreviatura. Por esta razón, (37) se abrevia como (43) y (38) se abrevia como (45). Respecto de oraciones más complicadas como (46), es cuestionable si es más legible la traducción estándar (47) o su abreviatura (48):

(46) Quien tiene un perro que muerde a alguien, es deplorable.

(47) $\forall x(Px \rightarrow (\exists y(Ry \wedge Txy \wedge \exists z(Pz \wedge Myz)) \rightarrow Dx))$

(48) $\forall x^{Px, \exists y^{Ry \wedge Txy}(\exists z^{Pz}(Myz))}(Dx)$

A manera de conclusión, dedicaremos unas palabras a las relaciones inferenciales. La lógica multivariada no es muy novedosa en lo que respecta a su semántica, dado que sus modelos apenas difieren de los estándar. En lo que respecta a la sintaxis, el sistema de deducción natural puede ser modificado en forma sencilla para nuestros propósitos introduciendo separadamente reglas de introducción y eliminación para los cuantificadores de cada clase. La lógica multivariada hereda los teoremas de corrección y completitud de la lógica de predicados estándar.

5.4 Lógica de segundo orden

La lógica de segundo orden emplea dos clases diferentes de variables: x, y, z (las variables de individuo) y X, Y, Z (las variables de predicado) y por ahora, dos clases de constantes correspondientes a las mencionadas variables. Superficialmente, la lógica de segundo orden podría parecer un caso especial de la lógica multivariada. Pero, como veremos, la forma particular en que se interpretan las dos clases da como resultado que la lógica de segundo orden sea muy diferente de la lógica multivariada. Las variables de individuo tienen el mismo rango que en la lógica estándar: un conjunto de entidades acerca de las cuales las fórmulas dicen algo. Las variables de predicado tienen como rango al conjunto de propiedades que tienen dichas entidades. En la lógica de segundo orden, pueden traducirse oraciones como (50) y (51) y puede mostrarse por qué (51) se sigue de (49) y (50):

(49) Marte es rojo.

(50) El rojo es un color.

(51) Marte tiene un color.

Quizás (50) se parezca mucho a otras oraciones que ya hemos considerado con anterioridad. Si *Sócrates es un hombre* puede traducirse como Hs, ¿por qué no traducir (50) sencillamente como Cr? Podríamos hacerlo, pero no podríamos hacerlo si también quisiéramos traducir (49) como Rm. No podemos considerar a *rojo* como una propiedad una vez (en Rm) y como una entidad la siguiente vez (en Cr). Así, *x es un color* no debe considerarse como una propiedad de entidades sino como una propiedad de propiedades de entidades. Una propiedad tal se denomina *propiedad de segundo orden*. En la lógica de segundo orden se reservan símbolos especiales para propiedades de segundo orden. A la lógica de predicados estándar a veces se le denomina *lógica de predicados de primer orden* para distinguirla de la lógica de segundo orden, dado que se ocupa sólo de propiedades de entidades y relaciones entre entidades, las propiedades y relaciones *de primer orden*.

La lógica de segundo orden es una extensión de la lógica de primer orden porque también tiene variables y cuantificadores para propiedades y (si se desea) para relaciones. Ahora (49)-(51) pueden traducirse como (52)-(54):

(52) Rm

(53) $\mathcal{C}$R

(54) $\exists X(\mathcal{C}X \wedge Xm)$

En (52) y (53) queda de manifiesto que lo que en lógica de primer orden eran letras de predicado ahora son constantes de predicado de primer orden. Una constante de predicado de primer orden puede aplicarse a una constante de individuo, como la R en (52), pero también puede aparecer como argumento de una constante de predicado de segundo orden, como la R en (53). Como queda de manifiesto en (54), (51) es interpretada como la proposición que expresa que Marte tiene una propiedad (a saber, la propiedad de ser rojo) la cual a su vez tiene la propiedad de ser un color. Afirma que hay un color que es una propiedad de Marte. Para expresar esto hay que cuantificar propiedades de primer orden. La variable X es una variable de propiedades. Aquí no tendremos en cuenta las variables de relaciones entre entidades, dado que lo complican todo sin introducir algo realmente nuevo. (En la lógica de los tipos con abstracción *lambda* hay un enfoque mejor; véase vol. 2.) En forma similar, nos limitaremos a las constantes de predicado de segundo orden que expresan propiedades de propiedades y relaciones entre propiedades. De manera que no consideraremos propiedades de relaciones o relaciones entre relaciones.

A partir de (52)-(54) es evidente que la lógica de segundo orden no es simplemente una clase particular de lógica multivariada, como la descripta en §5.3. Por ejemplo, la distinción entre variables de individuo x, y, z y las variables de predicado X, Y, Z no es una distinción entre diferentes subdominios de un mismo dominio. Se trata más bien de una distinción entre diferentes funciones: las primeras se refieren a entidades y las segundas se refieren a propiedades de dichas entidades (de los conjuntos que estas últimas forman). Más o menos lo mismo se aplica a la distinción entre constantes de predicado de primer y segundo orden.

El vocabulario de *un lenguaje de segundo orden* L para la lógica de predicados consiste en un conjunto de *constantes de individuo*, un conjunto de *constantes de predicado de primer orden* y un conjunto de *constantes de predicado de segundo orden*. El conjunto de constantes de predicado de primer orden contiene elementos tales como la R de (52); el conjunto de constantes de predicado de segundo orden contiene elementos tales como la *C* de (53). Al igual que con las letras de predicado de la lógica de predicados de primer orden, se asocia a cada constante de predicado un número que proporciona su aridad. Además de estas constantes, todos los lenguajes de segundo orden tienen el mismo conjunto de variables de individuo x, y, z y variables de predicado X, Y, Z, los cuantificadores, las conectivas y paréntesis. Ahora podemos dar la definición de fórmula para un lenguaje L de segundo orden para la lógica de predicados:

Definición 2

Si L es un lenguaje para la lógica de predicados de segundo orden, entonces:

(i) Si A es una constante de predicado de primer orden *n*-aria de L y $t_1,\ldots,t_n$ son términos individuales de L, entonces $At\ldots t_n$ es una fórmula (atómica) de L;

(ii) Si X es una variable de predicado y t es un término individual de L, entonces Xt es una fórmula atómica de L;

(iii) Si A es una constante de predicado de segundo orden *n*-aria de L y $T_1,\ldots,T_n$ son constantes de predicado de primer orden unarias de L o variables de predicado, entonces $AT_1\ldots T_n$ es una fórmula (atómica) de L;

(iv) Si ϕ es una fórmula de L, entonces $\neg\phi$ también lo es;

(v) Si ϕ y ψ son fórmulas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$,$(\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ también lo son;

(vi) Si x es una variable de individuo y ϕ es una fórmula de L, entonces $\forall x\phi$ y $\exists x\phi$ también son fórmulas de L;

(vii) Si X es una variable de predicado y ϕ es una fórmula de L,entonces $\forall X\phi$ y $\exists X\phi$ también son fórmulas de L;

(viii) Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas (i)-(vii) en un número finito de pasos, son fórmulas de L.

Al igual que en lógica de predicados de primer orden, se puede dar una definición de las apariciones libres y ligadas de variables en fórmulas.

Un modelo para un lenguaje de segundo orden siempre incluye un modelo para la parte de primer orden de dicho lenguaje. Usualmente consiste en un dominio D y una función de interpretación I que proyecta todas las constantes de individuo sobre elementos de D y proyecta las constantes de predicado de primer orden *n*-arias sobre subconjuntos de D^n. Pero, ¿cómo debe interpretarse la cuantificación de propiedades? Dado que las propiedades deben interpretarse como subconjuntos del dominio y que se supone que los cuantificadores se aplican a todas las propiedades, presumiblemente los cuantificadores deben aplicarse a *todos los subconjuntos del dominio D*. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A se denomina *conjunto potencia* de A y su notación es POT(A). Puede definirse como sigue: $\mathrm{POT}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathrm{POT}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. De esta forma una asignación g asignará elementos del dominio D a variables individuales y subconjuntos de D, es decir, a elementos de POT(D), a variables de predicado. Y, ¿cómo deben interpretarse las constantes de predicado de segundo orden? Ellas expresan propiedades de, o relaciones entre, propiedades de entidades. De manera que así como un predicado unario de primer orden se interpreta como un conjunto de entidades, un predicado unario de segundo orden se interpreta como un conjunto de conjuntos de entidades, es decir, un subconjunto de POT(D). $I(\mathcal{C})$, la interpretación de la constante de predicado de segundo orden *es un color*, es entonces $\{I(R), I(V), \ldots\}$, siendo R la constante de predicado de primer orden *es rojo*, V *es verde*, etc. En general, la interpretación $I(\mathcal{F})$ de una constante $\mathcal{F}$ de predicado de segundo orden *n*-aria es un subconjunto de $(\mathrm{POT}(D))^n$. La definición de verdad para un lenguaje L de segundo orden para la lógica de predicados consiste entonces en la definición de verdad usual para su parte de primer orden, que no repetiremos aquí (véase definición 9 en §3.6.3), junto con las siguientes cláusulas:

(ii') $V_{M,g}(Xt) = 1$ sii $\|t\|_{M,g} \in g(X)$;

(iii') $V_{M,g}(AT_1 \ldots T_n) = 1$ sii $\langle \|T_1\|_{M,g}, \ldots, \|T_n\|_{M,g} \rangle \in I(A)$;

(vii') $V_{M,g}(\forall X\phi) = 1$ sii para todo $E \subseteq D$, $V_{M,g[X/E]}(\phi) = 1$;
$V_{M,g}(\exists X\phi) = 1$ sii hay al menos un $E \subset D$ tal que $V_{M,g[X/E]}(\phi) = 1$.

Para extender el sistema de deducción natural que empleamos en §4.3 a la lógica de segundo orden podemos comenzar agregando las reglas $I\forall_2$, $E\forall_2$, $I\exists_2$ y $E\exists_2$ para los nuevos cuantificadores. Estas reglas son análogas a las que ya tenemos; aquí presentamos $I\forall_2$ a manera de ejemplo.

1.

m. $[A/X]\phi$

n. $\forall X\phi$ $\quad I\forall_2$, m

Esta regla puede ilustrarse como sigue. Puede mostrarse empleando solamente las reglas de primer orden que $\vdash \forall z((Ay \wedge Az) \rightarrow Ay)$. Agregando una aplicación de $I\forall_2$ como último paso de la derivación de esta fórmula, obtenemos una derivación de $\forall X\forall y\forall z((Xy \wedge Xz) \rightarrow Xy)$. Al igual que en lógica de primer orden, A debe ser tal que pueda considerarse arbitraria, lo cual significa que no puede aparecer en ningún supuesto ni en ϕ. Y, dado que restringimos la cuantificación a propiedades, A debe ser siempre una constante de predicado unaria.

Lo que sigue puede ser una sorpresa. No puede haber un teorema de completitud para la lógica de segundo orden. Hay un teorema de corrección, pero sólo significa que ninguna de las reglas de derivación es defectuosa. La lógica de segundo orden es mucho más poderosa que la lógica de primer orden, teniendo quizás un poder de expresión inesperado. Por ejemplo, la identidad es definible en lógica de segundo orden, dado que se cumple la Ley de Leibniz: $\forall y\forall z(y=z \leftrightarrow \forall X(Xy \leftrightarrow Xz))$. Incluso es definible el conjunto de los números naturales con las operaciones $+$ y $\times$, lo cual significa que se aplica el resultado de Gödel acerca de la incompletitud y que, por ende, no se puede disponer de un sistema de prueba sintáctico completo. Esto es, hay inferencias que son semánticamente válidas pero que no pueden verificarse sintácticamente mediante un sistema de prueba, sea mediante el sistema de deducción natural que hemos dado o sea mediante cualquier extensión del mismo. Para aplicaciones en la lingüística ésto no parece plantear problema alguno. En primer lugar, el sistema dado puede reforzarse de manera que produzca todas las inferencias (o, en todo caso, todas las que parecen cumplir una función en el lenguaje natural). Esto puede lograrse reforzando las reglas $I\exists_2$ y $E\forall_2$ con $I\exists_2^*$ y $E\forall_2^*$. $I\exists_2$ se introdujo en forma análoga a $I\exists$ y, por ende, tiene la siguiente forma:

l.

⋮

m. $[A/X]\phi$

⋮

n. $\exists X\phi$ $\quad I\exists_2$, m

Pero parecería razonable que pudiéramos inferir $\exists X\phi$ no sólo a partir de $[A/X]\phi$ sino también a partir de $[\psi/X]\phi$, si ψ es una fórmula que tiene una sola variable libre, dado que una fórmula tal también expresa una propiedad. La nueva regla $I\exists_2^*$ es la regla reforzada que permite realizar esto. El siguiente es un ejemplo de aplicación de la nueva regla. Se puede dar una derivación de primer orden de $\forall y((Ay \wedge By) \leftrightarrow (Ay \wedge By))$. Si tratamos a esta fórmula como $[Ay \wedge By/X]\ \forall y(Xy \leftrightarrow (Ay \wedge By))$ obtenemos una derivación de $\exists X\forall y(Xy \leftrightarrow (Ay \wedge By))$ mediante la adición de una única aplicación de $I\exists_2^*$. Dicho en términos concretos, esto significa que si *enojado* y *bello* son ambas propiedades, entonces *enojado y bello* también es una propiedad. Puede mostrarse, exactamente de la misma manera, que a toda fórmula dada ϕ que tenga una sola variable libre le corresponde una propiedad. No obstante, se garantiza sólo la *existencia* de las nuevas propiedades. Con la excepción de la lógica de los tipos (véase vol. 2), que emplea el operador *lambda* para este propósito, no creamos ninguna *notación* nueva para esta propiedad. La regla para cuantificadores $E\forall_2$ se refuerza mediante $E\forall_2^*$ de la misma forma que $E\exists_2$ se refuerza con $E\exists_2^*$.

Un segundo comentario acerca de la incompletitud de la lógica de segundo orden concierne a su relación con la lógica multivariada. Hasta cierto punto, la lógica de segundo orden puede considerarse como un sistema lógico multivariado especial como el que vimos en §5.3. A continuación consignamos la forma en que puede hacerse esto. Las variables de predicado X, Y, Z se reemplazan por variables u, v, w y se introduce una especie de relación de 'aplicabilidad' A. La idea es que Aux significa que u es aplicable a x (o que u es verdadera respecto de x). Luego, todas las fórmulas de la forma Xt pueden reemplazarse por fórmulas de la forma Aut. Teniendo en cuenta las restricciones consignadas en §5.3, pueden excluirse las fórmulas como Auv y Axu. De esta forma tenemos una lógica multivariada normal. Hay un teorema de completitud para esta lógica multivariada que es heredado por la lógica de segundo orden, con la restricción de que esta lógica de segundo orden no es completa respecto de la semántica definida más arriba sino con respecto a la parte de dicha semántica que puede expresarse por medio de la relación de aplicabilidad A. En los modelos para esta lógica multivariada no tenemos realmente entidades y sus propiedades sino su simulación por medio de dos clases de entidades y la relación de aplicabilidad A de una a la otra. Ahora no ahondaremos más en esta cuestión. Sin embargo, la simulación no es perfecta, dado que el significado intuitivo de A no puede ser capturado completamente por los axiomas y sólo se pueden justificar aquellas inferencias que dependan de requisitos que puedan imponerse explícitamente sobre A.

En la traducción a términos de la lógica multivariada las reglas $I\forall_2$, $E\forall_2$, $I\exists_2$ y $E\exists_2$ siguen siendo válidas, pero no lo son $I\exists_2^*$ y $E\forall_2^*$. Para conservar estas dos, es necesario adicionar axiomas que expliciten más el significado intuitivo de A. Esto puede lograrse, por ejemplo, agregando el siguiente esquema de axioma, el *principio de comprehensión* (55):

(55) $\exists u \forall x(Aux \leftrightarrow \psi)$

Si se agrega (55) para cada fórmula ψ que tenga una sola variable libre x, entonces el sistema resultante equivale al sistema de deducción natural con las reglas $I\forall_2$, $E\forall_2^*$, $I\exists_2^*$ y $E\exists_2^*$. Pero dado que, como ya lo mencionáramos, de esta forma no pueden darse todos los aspectos del significado de A, la lógica de segundo orden tomada en su totalidad nunca puede considerarse un caso especial de la lógica multivariada.

5.5 Lógica multivalente

5.5.1 *Introducción*

En la lógica proposicional estándar (y, por supuesto, en la lógica de predicados estándar), el valor de verdad que obtienen todas las fórmulas es o bien 1 o bien 0. Decimos que la lógica clásica es *bivalente*. En una lógica bivalente, la fórmula conocida como el *principio del tercero excluido*, $\phi \vee \neg\phi$, es válida. Pero, por varias razones y para múltiples propósitos, se han desarrollado otros sistemas con tres o incluso infinitos valores de verdad. Los sistemas lógicos con más de dos valores se denominan sistemas lógicos multivalentes o lógicas multivalentes.

En esta sección discutiremos varias lógicas proposicionales multivalentes, sus bases intuitivas y sus aplicaciones. Prestaremos mayor atención a los aspectos que son relevantes para la investigación del lenguaje natural. En particular, consideraremos aplicaciones posibles de lógicas multivalentes al análisis del concepto semántico de presuposición.

Las lógicas proposicionales multivalentes no son *extensiones*, en el sentido introducido en §5.1, de la lógica estándar. Se trata de lo que hemos dado en llamar *desviación* de la lógica proposicional estándar. Los sistemas lógicos multivalentes no fueron concebidos para interpretar más clases de expresiones sino para rectificar lo que se considera un defecto en las interpretaciones estándares de las fórmulas. Una vez desarrollado un nuevo sistema lógico, a menudo resulta deseable y posible introducir nuevas clases de expresiones y entonces la desviación se convierte en una extensión también. Pero comenzaremos por los lenguajes usuales de la lógica proposicional estándar y mostraremos cómo puede dárseles una semántica con más de dos valores de verdad.

5.5.2 *Sistemas lógicos trivalentes*

Ya desde Aristóteles, la crítica al principio del tercero excluido ha estado estrechamente ligada al estatuto de las proposiciones acerca de eventos futuros contingentes y, por ende, al problema filosófico del determinismo. Esto también vale para el sistema trivalente creado por el lógico polaco Lukasiewicz, cuyos argumentos en contra de la bivalencia derivan del *argumento de la batalla naval* de Aristóteles. Considérese la oración *Mañana habrá una batalla naval.* Esta oración afirma que un evento contingente tendrá lugar en el futuro: es posible que la batalla naval se produzca, pero también es posible que no se produzca. A partir de esto podemos concluir que en el día de hoy la oración no es ni verdadera ni falsa, dado que si hoy la oración ya fuera verdadera, entonces la batalla naval necesariamente tendria lugar y si hoy ya fuera falsa, entonces sería imposible que la batalla naval tuviere lugar. De ninguna de las dos formas esto condice con la contingencia de la batalla naval. Aceptar que las proposiciones acerca de eventos localizados en un futuro contingente son ahora verdaderas o ahora falsas equivale a aceptar el determinismo y el fatalismo.

La validez de este argumento es discutible. Se puede representar su forma de la siguiente manera:

(56) $\phi \to$ necesariamente ϕ

(57) $\neg\phi \to$ es imposible ϕ (= $\neg\phi \to$ necesariamente $\neg\phi$)

(58) $\phi \vee \neg\phi$

(59) necesariamente $\phi \vee$ necesariamente $\neg\phi$

Para evadir la conclusión determinista (59), Aristóteles rechazó (58), la ley del tercero excluido. Sin embargo, en la actualidad estaríamos mucho más inclinados a pensar que el problema está en las premisas (56) y (57) más que en (58). De la verdad de ϕ no podemos inferir *necesariamente* ϕ y lo mismo se aplica para la falsedad. De la falsedad de ϕ no podemos inferir *necesariamente* $\neg\phi$. Para defender apropiadamente esta concepción, se requiere de un análisis lógico de la noción de necesidad. La lógica modal ofrece un análisis tal que discutimos en el vol. 2. Allí, en §2.3.5 se discute la (in)validez de argumentos como en el mencionado más arriba.

A pesar de que el interés original de Lukasiewicz por la lógica multivalente no era completamente de carácter lógico, la misma es lo suficientemente interesante por derecho propio dado que se pueden enumerar (y se han enumerado) otros intereses distintos de los originales. El sistema de Lukasiewicz puede consignarse por medio de las tablas de verdad que aparecen en (60):

(60)

ϕ	$\neg\phi$
1	0
#	#
0	1

$\phi \wedge \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	0
0	0	0	0

	$\phi \vee \psi$		
$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	1	1
#	1	#	#
0	1	#	0

	$\phi \rightarrow \psi$		
$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	1	1	#
0	1	1	1

El tercer valor (#) corresponde a *indeterminado* o *posible*. Debe quedar clara la manera en que deben leerse estas tablas. La forma de las mismas es levemente diferente de la forma de las tablas de verdad que hemos encontrado hasta ahora. La figura (61a) muestra la tabla de verdad bivalente de la conjunción escrita según esta nueva forma. Y la figura (61b) muestra cómo tabular la conjunción trivalente según la forma original.

(61) a.

	$\phi \wedge \psi$	
$\phi \setminus \psi$	1	0
1	1	0
0	0	0

b.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	1
1	#	#
1	0	0
#	1	#
#	#	#
#	0	0
0	1	0
0	#	0
0	0	0

Las tablas consignadas en (61) son útiles si uno sólo pretende describir la forma en que deben interpretarse las conectivas, pero debemos mantener la forma original de escribir las tablas de verdad si queremos usarlas para calcular los valores de verdad de fórmulas compuestas a partir de los valores de verdad de sus letras proposicionales.

De acuerdo a la tabla de la negación consignada en (60), si el valor de $\neg\phi$ es indeterminado, el valor de ϕ es indeterminado. Y a partir de la tabla de la disyunción se sigue que no se cumple *la ley del tercero excluido*. Como puede verse en (62), $\phi \vee \neg\phi$ nunca tiene el valor de verdad 0, pero tampoco tiene siempre el valor 1. Si ϕ tiene el valor de verdad #, entonces $\neg\phi$ también tiene el valor #.

(62)

ϕ	$\neg\phi$	$\phi \vee \neg\phi$
1	0	1
#	#	#
0	1	1

En forma similar, de la tabla de la conjunción se sigue que no se cumple *la ley de no contradicción* $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$. Por otro lado, ley de identidad sí se cumple: $\phi \rightarrow \phi$ es válido, dado que de acuerdo con (63) su valor de verdad es siempre 1.

(63)

ϕ	$\phi \rightarrow \phi$
1	1
#	1
0	1

Esto sucede porque de acuerdo con la tabla de la implicación consignada en (60), si ϕ tiene el valor de verdad #, entonces $\phi \rightarrow \phi$ no tiene el valor de verdad # sino 1. Vinculado con esto mencionamos el hecho de que mientras que la interdefinibilidad de $\vee$ y $\wedge$ por medio de $\neg$ aun se cumple, la interdefinibilidad de $\vee$ y $\rightarrow$ o la de $\wedge$ y $\rightarrow$ no se cumple. La razón de esto es que si tanto ϕ como ψ tienen el valor #, entonces tanto $\phi \vee \psi$ como $\phi \wedge \psi$ tienen ambos el valor de verdad #, mientras que en ese mismo caso $\phi \rightarrow \psi$ tiene el valor de verdad 1.

Kleene propuso un sistema trivalente que difiere del de Lukasiewicz precisamente en este punto. En (64) consignamos su interpretación de $\rightarrow$

(64) a.

ϕ	$\neg\phi$
1	0
#	#
0	1

b. $\phi \wedge \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	0
0	0	0	0

c. $\phi \vee \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	1	1
#	1	#	#
0	1	#	0

d. $\phi \rightarrow \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	1	#	#
0	1	1	1

A pesar de que el sistema de Kleene difiere del sistema de Lukasiewicz sólo en la implicación, en (64) lo consignamos en forma completa dado que en lo que sigue nos referiremos a él. De acuerdo con la tabla de la implicación de Kleene, $\phi \rightarrow \phi$ ya no es más una fórmula válida. Por otro lado, se recupera la interdefinibilidad de $\vee$ y $\rightarrow$ vía negación, al igual que la de $\wedge$ y · Kleene no interpreta al tercer valor como 'indeterminado' sino como 'indefinido'. El valor de una fórmula puede ser determinado o definido incluso si el valor de una o más de sus partes no lo es. Éste es el caso si el valor conocido de cierta parte es suficiente para decidir el valor de la fórmula completa. Sabemos, por ejemplo, que $\phi \rightarrow \psi$ es siempre verdadera si su antecedente es falso, sea cual fuere el valor del consecuente. De manera que si ϕ tiene el valor 0, entonces $\phi \rightarrow \psi$ tiene el valor 1, sea o no # el valor de ψ.

Un resultado indeseable de la interpretación del tercer valor como 'indefinido' es que si el valor de verdad de ϕ es indefinido, entonces el valor de verdad de $\phi \vee \neg\phi$ también lo es. Esto no es muy satisfactorio dado que incluso si aun no se conoce el valor de ϕ, es claro que el valor de ϕ depende del de $\neg\phi$. No conocemos el valor de ϕ, pero sabemos que $\neg\phi$ tiene el valor 1 si ϕ tiene el valor 0 y viceversa. De manera que se puede argumentar que sabemos que $\phi \vee \neg\phi$ tiene el valor de verdad 1 aunque no conozcamos aún el valor de verdad de ϕ.

Para resolver esta dificultad van Fraassen desarrolló el método de las *supervaluaciones.* A todas las fórmulas que tienen el mismo valor bajo toda valuación en la lógica estándar (es decir, las tautologías y las contradicciones de la lógica estándar) el método les otorga ese mismo valor. No sucede lo mismo con las fórmulas contingentes. Aquí no discutiremos en mayor profundidad el tema de las supervaluaciones.

Cuando el tercer valor se interpreta como *sinsentido* se origina otra clase de sistema trivalente. Bochvar propuso el sistema presentado en (65) con esta interpretación en mente.

(65) a.

ϕ	$\neg\phi$
1	0
#	#
0	1

b.

$\phi \wedge \psi$			
$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	#
0	0	#	0

c.

$\phi \vee \psi$			
$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	1
#	#	#	#
0	1	#	0

d.

$\phi \rightarrow \psi$			
$\phi \setminus \psi$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	#
0	1	#	1

En (65) el tercer valor es dominante en el sentido de que una fórmula compuesta recibe el valor # cuando cualquiera de sus partes componentes lo hace. Si cualquier parte de una oración es un sinsentido, entonces la oración completa es un sinsentido. Esta interpretación de las conectivas se conoce como la *interpretación débil*, a diferencia de la *interpretación fuerte* de Kleene. Lukasiewics, Kleene y Bochvar coinciden en dar el mismo valor de verdad que la lógica clásica a toda fórmula cuyas subfórmulas tengan todas valores de verdad clásicos. El sistema de Bochvar difiere de los otros dos en que si en su sistema una fórmula tiene un valor de verdad clásico, entonces todas sus subfórmulas deberán tenerlo también. Como hemos visto, en los sistemas de Lukasiewicz y Kleene, una fórmula puede tener un valor de verdad clásico incluso si alguna de sus subfórmulas no tiene un valor de verdad clásico.

5.5.3 *Lógicas trivalentes y la noción semántica de presuposición*

Una aplicación importante, pero muy debatida, de la lógica trivalente a la lingüística se ocupa de las presuposiciones. En §5.2 vimos la manera en que la teoría de Russell de las descripciones analiza oraciones que tienen descripciones definidas, como (66) y (67):

(66) El rey de Francia es calvo.

(67) La reina de Holanda está conduciendo una bicicleta.

Su teoría analiza las oraciones de manera que entre las cosas que afirman esas oraciones se halla la existencia de un rey de Francia y de una reina de Holanda. Luego, de acuerdo con Russell, una oración como (66) es falsa. El análisis de Russell de las descripciones definidas fue criticado por Strawson en 'On Referring' (1950). De acuerdo con Strawson, la teoria de Russell brinda un cuadro distorsionado de la forma en que se usan las descripciones definidas. Cuando se afirma la oración (66) no se está afirmando que existe un rey de Francia; esto es algo que (66) supone, una *presuposición*. Y si no existe un rey de Francia, entonces la oración (66) no es falsa, dado que no hay ninguna proposición de la cual se pueda decir que es verdadera o falsa.

Si el concepto de presuposición pertenece al campo de la semántica o al de la pragmática siempre ha sido una cuestión discutida. Si pertenece a la semántica, entonces la falsedad de una presuposición afecta el valor de verdad de una oración. Y si pertenece a la pragmática, entonces el concepto de presuposición debe describirse en términos de la forma en que usamos el lenguaje. Por ejemplo, para proferir una oración correctamente, un hablante debe creer en todas sus presuposiciones. No intentaremos dirimir la cuestión aquí. Pero en el capítulo 6 volvemos sobre la distinción entre aspectos semánticos y pragmáticos del significado.

En los ejemplos que siguen, nos limitaremos a la *presuposición existencial* de las descripciones definidas. La presuposición existencial de una descripción definida es el supuesto de que existe algún individuo que responde a la misma. También está la *presuposición de singularidad*, que es el presupuesto de que sólo un único individuo responde a la misma. Otras clases de expresiones tienen sus propias clases especiales de presuposiciones. Por ejemplo, los verbos y las frases verbales tales como *saber* y *ponerse furioso* tienen *presuposiciones acerca de hechos*. Las oraciones (68) y (69) presuponen que Juan besó a María:

(68) Pedro sabe que Juan besó a María.

(69) A Pedro le puso furioso que Juan besara a María.

Por otro lado, verbos como *creer* y *decir*, no llevan presuposiciones acerca de hechos. Un último ejemplo:

(70) Todos los hijos de Juan son calvos.

Una oración como (70) tiene también una presuposición existencial, a saber, que Juan tiene hijos.

Los que defienden una lógica multivalente en el análisis de la presuposición consideran que la noción de presuposición es un concepto *semántico*. Luego, presentan la posición de Strawson como la consignamos a continuación. Si una de las presuposiciones de la oración no es verdadera, entonces la oración no es ni verdadera ni falsa, sino que tiene un tercer valor. Por ende, una presuposición equivocada afectaría el valor de verdad de una oración. Este enfoque conduce a la siguiente definición de presuposición:

Definición 3

ψ es una presuposición de ϕ sii para toda valuación V: si $V(\psi) \neq 1$, entonces $V(\phi) \neq 1$ y $V(\phi) \neq 0$.

En un sistema trivalente, esto significa que si $V(\phi) \neq 1$ y $V(\phi) \neq 0$, entonces $V(\phi) = \#$. De esta forma, la definición 3 equivale a la formulación más usual:

(71) ψ es una presuposición de ϕ sii para toda valuación V: si $V(\psi) \neq 1$, entonces $V(\phi) = \#$.

La negación ha sido la misma en todos los sistemas trivalentes que hemos visto hasta ahora. En particular, en todos los casos, $V(\phi) = \#$ sii $V(\neg\phi) = \#$. Esto junto con (71) nos da (72):

(72) ψ es una presuposición de ϕ sólo en caso de que ψ sea una presuposición de $\neg\phi$.

Se considera que esta propiedad es característica de las presuposiciones. No sólo las oraciones (66) y (67) presuponen la existencia de un rey francés y de una reina holandesa sino que también lo hacen sus negaciones (73) y (74) respectivamente:

(73) El rey de Francia no es calvo.

(74) La reina de Holanda no está conduciendo una bicicleta.

También podríamos haber tomado como punto de partida el hecho de que las presuposiciones se conservan bajo la negación y emplear este hecho como argumento a favor de la lógica multivalente en el análisis semántico de las presuposiciones. Luego, podríamos razonar como sigue: tanto la verdad de (67) como la de su negación (74) 'implican' la verdad de (75):

(75) Hay una reina de Holanda.

Pero entonces la relación implicacional entre (67) y (75) y entre (74) y (75) no puede ser la noción normal de inferencia lógica de un sistema bivalente, dado que en un sistema lógico tal, las tautologías son las únicas fórmulas implicadas tanto por una fórmula como por su negación, mientras que (75) es claramente una proposición contingente. Ésto podrá verse en lo que sigue. Que tanto ϕ como $\neg\phi$ 'impliquen' a la fórmula ψ significa:

(76) Para toda valuación V: si $V(\phi) = 1$,

entonces $V(\psi) = 1$; y si $V(\neg\phi) = 1$, entonces $V(\psi) = 1$.

Esto equivale a:

(77) Para toda valuación V: si $V(\phi) = 1$ o $V(\neg\phi) = 1$, entonces $V(\psi) = 1$.

Pero como el antecedente de (77), $V(\phi) = 1$ o $V(\neg\phi) = 1$, siempre es verdadero en un sistema bivalente, (77) equivale a:

(78) Para toda valuación V: $V(\psi) = 1$.

Es decir, ψ es una tautología. La solución es abandonar la bivalencia, o sea, el requisito de que para toda oración ϕ, o bien $V(\phi) = 1$ o bien $V(\neg\phi) = 1$. (Russell tenía una solución diferente: retirar el supuesto según el cual (74) es la negación directa de (67).) En un sistema trivalente con $\neg$ definida como en las tablas consignadas en §5.5.2, (77) es equivalente al *definiendum* de la definición 3, la definición de presuposición. De manera que la preferencia por un tratamiento semántico del concepto de presuposición nos proporciona un argumento a favor de la lógica trivalente.

En §5.5.2 presentamos varios sistemas trivalentes diferentes. En este punto se plantea la cuestión de determinar cuál de esos tres sistemas se adapta mejor para el tratamiento de la presuposición. La cuestión se relaciona con la forma en que las presuposiciones de una oración compuesta dependen de las presuposiciones de sus partes componentes, conocido como el *problema de la proyección para las presuposiciones*. Como veremos, los diferentes sistemas multivalentes con sus diferentes tablas de verdad para las conectivas brindan respuestas diferentes.

Si elegimos el sistema de Bochvar, en el cual las oraciones compuestas reciben el valor # siempre que alguna de sus partes componentes lo reciba, la presuposición es *acumulativa* (*cumulative*). Las presuposiciones de una oración compuesta son precisamente todas las presuposiciones de sus partes componentes. Si falla cualquier presuposición de cualquiera de las partes componentes de una oración, entonces también falla la presuposición de la oración en su totalidad. Si la presuposición de cualquiera de las partes componentes de una oración no tiene el valor de verdad 1, entonces la fórmula en su totalidad tiene el valor de verdad #. Esto se sigue directamente de las tablas de verdad de las conectivas consignadas en

(65) y de la definición 3.

Si agregamos un nuevo operador P a nuestros lenguajes proposicionales, entonces $P\phi$ puede representar a las presuposiciones de ϕ. En (79) definimos a este operador como:

(79)

ϕ	$P\phi$
1	1
#	0
0	1

La fórmula $P\phi$ es equivalente a las condiciones necesarias y suficientes para la satisfacción de las presuposiciones de ϕ. La fórmula $P\phi$ recibe el valor 1 si todas las presuposiciones de ϕ son satisfechas y en caso contrario recibe el valor 0. $P\phi$ en sí misma no tiene ninguna presuposición, dado que nunca recibe el valor #. $PP\phi$ es siempre una tautología. Las consecuencias lógicas de $P\phi$ son precisamente las presuposiciones de ϕ. Mediante la construcción de tablas de verdad puede comprobarse fácilmente que se cumplen las siguientes equivalencias:

(80) $P\phi$ y $P\neg\phi$ son equivalentes.

(81) $P(\phi \vee \psi)$, $P(\phi \wedge \psi)$ y $P(\phi \rightarrow \psi)$ son equivalentes a $P\phi \wedge P\psi$.

(80) no es más que una reformulación de la propiedad característica de las presuposiciones presentada en (72), a saber, que ϕ y $\neg\phi$ tienen las mismas presuposiciones. (81) dice que si las presuposiciones son acumulativas (*cumulative*), entonces las presuposiciones de una conjunción y de una disyunción pueden expresarse como la conjunción de las presuposiciones de sus conjuntivos y disyuntivos respectivamente y la presuposición de una implicación puede expresarse como la conjunción de la presuposición de su antecedente y de su consecuente. Esto es así porque en el sistema de Bochvar # aparece en los mismos lugares en las tablas de verdad de las tres conectivas. El valor # aparece siempre que cualquiera de las fórmulas unidas por la conectiva tiene como valor #. (Véase (65).)

De manera que empleando el sistema de Bochvar, obtenemos una noción acumulativa (*cumulative*) de presuposición. Pero generalmente la presuposición no se considera acumulativa (*cumulative*). Hay casos en los que las presuposiciones, como ya lo dijéramos, se *cancelan* al formar fórmulas compuestas, lo que hace que el problema de la proyección sea mucho más interesante. Las oraciones (82)-(84) son ejemplos claros del hecho de que una fórmula no necesariamente hereda todas las presuposiciones de sus subfórmulas:

(82) Si hay un rey de Francia, entonces el rey de Francia es calvo.

(83) O bien no hay un rey de Francia, o el rey de Francia es calvo.

(84) Hay un rey de Francia y el rey de Francia es calvo.

La oración (85):

(85) El rey de Francia es calvo.

es una parte componente de (82), (83) y (84). La oración (86):

(86) Hay un rey de Francia.

es una presuposición de (85), pero no de (82)-(84). Si la oración (86) es falsa, entonces (82) y (83) son verdaderas y (84) es falsa. Esto puede explicarse si en lugar de elegir el sistema de Bochvar elegimos el de Kleene. Una oración como (82) tiene la forma $p \to q$, en la cual p es una presuposición de q. A continuación puede verse que en el sistema de Kleene p no es una presuposición de $p \to q$. Supóngase que el valor de p es 0; entonces q tiene #, dado que p es una de sus presuposiciones. Pero de acuerdo con la tabla de verdad de la implicación del sistema de Kleene, la implicación en su totalidad sigue teniendo el valor 1, dado que su antecedente tiene el valor 0. Así, de acuerdo con la definición 3, p no es una presuposición de $p \to q$, dado que a pesar de que en este caso p no tiene el valor 1, $p \to q$ tampoco tiene el valor #. Algo similar se cumple para la oración (83), que tiene la forma $\neg p \vee q$, en la cual p es nuevamente una presuposición de q. Si p tiene el valor 0 (en cuyo caso q tiene #), entonces la tabla de Kleene para $\vee$ sigue dando como resultado que $\neg p \vee q$ tiene el valor de verdad 1. Finalmente, la oración (84) tiene la forma $p \wedge q$, siendo p nuevamente una presuposición de q. Ahora, si p tiene el valor 0, entonces también lo tiene la conjunción en su totalidad, a pesar del hecho de que q tiene el valor de verdad #. De esta forma, el sistema trivalente de Kleene explica por qué (86), una presuposición de la fórmula (85), se cancela cuando la última se incorpora a las oraciones compuestas (82)-(84). Sin embargo en §5.5.6 veremos que el sistema de Kleene no tiene la última palabra en el análisis de las presuposiciones.

Al igual que en el sistema de Bochvar, en el sistema de Kleene pueden representarse las presuposiciones de ϕ por medio de $P\phi$. Dado que la negación es la misma en ambos sistemas, la equivalencia (80) se sigue cumpliendo. Pero, puesto que las otras conectivas son diferentes, las equivalencias consignadas en (81) ya no se cumplen. En su lugar tenemos las equivalencias (87)-(89) que en cierta forma son más complicadas:

(87) $P(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $((\phi \wedge P\phi) \vee P\psi) \wedge ((\psi \wedge P\psi) \vee P\phi)$.

(88) $P(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $((\neg\phi \wedge P\phi) \vee P\psi) \wedge ((\neg\psi \wedge P\psi) \vee P\phi)$.

(89) $P(\phi \to \psi)$ es equivalente a $((\neg\phi \wedge P\phi) \vee P\psi) \wedge ((\psi \wedge P\psi) \vee P\phi)$.

Ahora introducimos un segundo operador A, interpretado de acuerdo con (90):

(90)

ϕ	$A\phi$
1	1
#	0
0	0

Luego, como resultado de la equivalencia de $A\phi$ y $\phi \wedge P\phi$, (87)-(89) equivalen a (91)-(93):

(91) $P(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $(A\phi \vee P\psi) \wedge (A\psi \vee P\phi)$.

(92) $P(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $(A\neg\phi \vee P\psi) \wedge (A\neg\psi \vee P\phi)$.

(93) $P(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $(A\neg\phi \vee P\psi) \wedge (A\psi \vee P\phi)$.

Una tercera forma de escribir $P(\phi \vee \psi)$, en la que no figura A, es:

(94) $P(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $(\phi \vee P\psi) \wedge (\psi \vee P\phi) \wedge (P\phi \vee P\psi)$.

Para las otras dos conectivas también pueden darse ecuaciones similares a (94).

El operador P también puede emplearse para aclarar la cancelación de presuposiciones en el sistema de Kleene. Si (86) es la única presuposición de (85) entonces (82)-(84) pueden representarse reemplazando (85) por q (y, por ende, reemplazando (86) por Pq):

(95) $Pq \rightarrow q$

(96) $\neg Pq \vee q$

(97) $Pq \wedge q$

El hecho de que la presuposición q de Pq se cancela al formar (95)-(97) queda de manifiesto en el hecho de que (95)-(97) en sí mismas no tienen ninguna presuposición o, expresado con mayor precisión, que sólo tienen presuposiciones que son tautologías. Las fórmulas $P(Pq \rightarrow q)$, $P(\neg Pq \vee q)$ y $P(Pq \wedge q)$ son tautologías; siempre tienen el valor de verdad 1. Esto explica por qué la oración contingente (86) no es una presuposición de (82)-(84).

Las equivalencias como las consignadas en (87)-(89) y (91)-(94) son interesantes por más de una razón. En primer lugar, arrojan alguna luz sobre la manera en que se enfoca el problema de la proyección para presuposiciones en un sistema trivalente como el de Kleene. Por ejemplo, (87) expresa directamente que las presuposiciones de $(\phi \vee \psi)$ quedan satisfechas en cada uno de los tres casos siguientes: si tanto las presuposiciones de ϕ como las de ψ quedan satisfechas (compárese esto con la presuposición acumulativa); si las presuposiciones de ϕ no quedan satisfechas, pero ψ es verdadera; y por último, si las presuposiciones de ψ no quedan satisfechas pero ϕ es verdadera. Este concepto de presuposición es más débil que el acumulativo (*cumulative*) en razón de los dos últimos casos, los cuales corresponden a los dos lugares de la tabla de $\vee$ del sistema de Kleene (véase (64)) que arrojan el valor 1 siendo que el sistema de Bochvar, en esos mismos lugares, arroja el valor # (véase (65)).

En segundo lugar, estas equivalencias son interesantes porque tienen mucho en común con las definiciones inductivas del concepto de presuposición que han sido concebidas como una alternativa a los enfoques trivalentes. Esas últimas definen inductivamente una fórmula ϕ^{Pr} que equivale al conjunto de las presuposiciones de

ϕ. Comienzan por estipular lo que son las presuposiciones de fórmulas atómicas. Las cláusulas inductivas son entonces, por ejemplo:

(98) $\neg\phi^{\mathrm{Pr}} = \phi^{\mathrm{Pr}}$

(99) $(\phi \vee \psi)^{\mathrm{Pr}} = ((\phi \wedge \phi^{\mathrm{Pr}}) \vee \psi^{\mathrm{Pr}}) \wedge ((\psi \wedge \psi^{\mathrm{Pr}}) \vee \phi^{\mathrm{Pr}})$

Con las restantes conectivas sucede algo similar. En la literatura es habitual hablar en términos del conjunto de las presuposiciones de una fórmula. El enfoque que esbozamos aquí equivale a formar un conjunto tal mediante la conjunción de todas las fórmulas. Se ha sugerido que esta clase de definición inductiva es más adecuada que un tratamiento en términos de una semántica trivalente. Pero en vista de la similitud de (87) y (99) parece plausible que los dos enfoques den los mismos resultados.

A pesar de que un sistema trivalente como el de Kleene aborda en forma satisfactoria ciertos aspectos del problema de la proyección para presuposiciones, deja algunos problemas abiertos que discutiremos hasta cierto punto en §5.5.6. Pero primero describiremos sistemas lógicos multivalentes con más de tres valores (§5.5.4) y sus aplicaciones en el análisis de la noción semántica de presuposición (§5.5.5).

5.5.4 *Sistemas lógicos con más de tres valores*

Hasta ahora la discusión sobre sistemas lógicos multivalentes no ha ido más allá de sistemas trivalentes. Pero también se han desarrollado lógicas con más de tres valores. Por ejemplo, un sistema como el de Kleene puede fácilmente generalizarse a sistemas con cualquier número finito n ($n>2$) de valores de verdad. Una notación conveniente para los valores de verdad de tales sistemas emplea fracciones, con el número n-1 como denominador y los números 0, 1,..., n-1 como numerador. Así, el sistema trivalente (n=3) tiene los valores de verdad $\frac{0}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$, ó 0, $\frac{1}{2}$ y 1. De esta forma el tercer valor del sistema Kleene se escribe como $\frac{1}{2}$ en lugar de como #. Un sistema tetravalente (n = 4) tiene entonces los valores de verdad $\frac{0}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{3}$ ó 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y 1. Los valores de verdad de las fórmulas compuestas de un sistema Kleene con n valores de verdad pueden ahora calcularse como sigue:

Definición 4

$V(\neg\phi)$	$= 1 - V(\phi)$
$V(\phi \wedge \psi)$	$= V(\phi)$ si $V(\phi) \leqslant V(\psi)$
	$= V(\psi)$ en caso contrario
$V(\phi \vee \psi)$	$= V(\phi)$ si $V(\phi) \geqslant V(\psi)$
	$= V(\psi)$ en caso contrario
$V(\phi \rightarrow \psi)$	$= V(\phi)$ si $V(\phi) \geqslant (1 - V(\psi))$
	$= 1 - V(\psi)$ en caso contrario

De esta forma, a una conjunción se le da el valor de verdad del conjuntivo que tenga el valor más bajo; a una disyunción se le da el valor de verdad del disyuntivo que tenga el valor más alto. El valor de verdad de la implicación $\phi \rightarrow \psi$ es igual al de la disyunción $\neg\phi \vee \psi$. En un sistema trivalente, las tablas de verdad son las mismas que las consignadas en (64), pero colocando $\frac{1}{2}$ en lugar de #. Para $n = 2$ esto se reduce a la lógica proposicional estándar. Un sistema Kleene tetravalente tiene las tablas de verdad consignadas en (100):

(100)

ϕ	$\neg\phi$
1	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1

$\phi \wedge \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	0	0	0	0

$\phi \vee \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

$\phi \rightarrow \psi$

$\phi \setminus \psi$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	1	1	1

En forma similar, un sistema Kleene puede tener una cantidad infinita de valores de verdad tomando como valores de verdad, por ejemplo, todas las fracciones entre 0 y 1.

Los sistemas con más de tres valores presentados más arriba se han obtenido generalizando un sistema de tres valores. Otros sistemas con más de tres valores pueden obtenerse, por ejemplo, 'multiplicando' sistemas entre sí. Estos se denominan *sistemas producto*. En un producto de dos sistemas S_1 y S_2, a las fórmulas se les dan valores de verdad $\langle v_1, v_2 \rangle$; v_1 deriva de S_1 y v_2 de S_2. Se puede aplicar un sistema producto si queremos evaluar fórmulas bajo dos aspectos diferentes e independientes y representar las evaluaciones en forma combinada. Por ejemplo, podemos multiplicar el sistema estándar bivalente por sí mismo. Así obtenemos un sistema tetravalente con los pares $\langle 1,1 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 0,1 \rangle$ y $\langle 0,0 \rangle$ como valores. Para calcular el valor de verdad de una fórmula en el sistema producto, primero debemos calcular su valor de verdad para cada uno de los dos sistemas de los cuales es un producto. El valor según el primer sistema se convierte en el primer miembro del par ordenado y el valor según el segundo sistema es el segundo miembro. En (101) consignamos las tablas de verdad para las conectivas según este sistema tetravalente (escribimos 11 en lugar de $\langle 1,1 \rangle$, etc.).

(101)

ϕ	$\neg\phi$
11	00
10	01
01	10
00	11

$\phi \wedge \psi$

ϕ \ ψ	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	10	10	00	00
01	01	00	01	00
00	00	00	00	00

$\phi \vee \psi$

ϕ \ ψ	11	10	01	00
11	11	11	11	11
10	11	10	11	10
01	11	11	01	01
00	11	10	01	00

$\phi \rightarrow \psi$

ϕ \ ψ	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	11	11	01	01
01	11	10	11	10
00	11	11	11	11

Con la misma sencillez pueden multiplicarse entre sí sistemas con diferentes clases y cantidades de valores de verdad. Si un sistema tiene m valores de verdad y el otro n, entonces el sistema producto tendrá $m \times n$ valores de verdad.

5.5.5 *Lógicas tetravalentes y la noción semántica de presuposición*

El sistema Kleene tetravalente también puede aplicarse al análisis de la noción semántica de presuposición. Usar cuatro valores tiene la ventaja de que la verdad de una fórmula puede distinguirse de la satisfacción de sus presuposiciones. Así, los cuatro valores se asocian con las cuatro situaciones siguientes:

verdadero y las presuposiciones se satisfacen

verdadero y las presuposiciones no se satisfacen

falso y las presuposiciones se satisfacen

falso y las presuposiciones no se satisfacen

Ahora en lugar de decir que *El rey de Francia es calvo* no es ni verdadera ni falsa, diremos que es falsa y que una de sus presuposiciones ha fallado. Y de la negación de esta oración diremos que es verdadera y que una de sus presuposiciones ha fallado. Luego, es conveniente representar los cuatro valores de verdad diferentes como 11, 10, 01, 00. A pesar de la notación, no se trata de un sistema producto, como queda de manifiesto en las tablas de verdad consignadas en (102). Al reescribir las tablas de verdad para el sistema Kleene tetravalente con los nuevos valores de verdad, escribiendo 11 en lugar de 1, 10 en lugar de $\frac{2}{3}$, 00 en lugar de $\frac{1}{3}$ y 01 en lugar de 0, obtenemos (102):

(102)

ϕ	$\neg\phi$
11	01
10	00
00	10
01	11

$\phi \wedge \psi$

$\phi \setminus \psi$	11	10	00	01
11	11	10	00	01
10	10	10	00	01
00	00	00	00	01
01	01	01	01	01

$\phi \vee \psi$

$\phi \setminus \psi$	11	10	00	01
11	11	11	11	11
10	11	10	10	10
00	11	10	00	00
01	11	10	00	01

$\phi \rightarrow \psi$

$\phi \setminus \psi$	11	10	00	01
11	11	10	00	01
10	11	10	00	00
00	11	10	10	10
01	11	11	11	11

La definición 3 de la noción de presuposición, dada en §5.5.3, puede quedar inalterada (escribiendo 11 en lugar de 1 y 01 en lugar de 0). De esta forma, el sistema Kleene tetravalente proporciona exactamente los mismos resultados que el sistema trivalente. A continuación diremos algo más acerca de las tablas de verdad consignadas en (102). Bajo la interpretación que hemos dado a los valores 11, 10, 00 y 01, el primer elemento de los valores se refiere al valor de verdad de la oración en cuestión. Observando las tablas notamos que esos valores de verdad concuerdan con la lógica bivalente estándar y que se asignan en forma independiente del segundo elemento de los valores; este último se denominará los *valores de la presuposición*. Hasta cierto punto el valor de la presuposición de una oración depende de su valor de verdad, como queda de manifiesto en el siguiente ejemplo: Si $V(\phi) = 11$ y $V(\psi) = 10$, entonces $V(\phi \vee \psi) = 11$ Pero si $V(\phi) = 01$ y $V(\psi) = 10$, entonces $V(\phi \vee \psi) = 10$. Los valores de la presuposición para ϕ y ψ son los mismos en ambos casos: ϕ tiene 1 y ψ tiene 0. Pero los valores de la presuposición para la disyunción tomada en su totalidad son diferentes. La razón de esto es que la satisfacción de las presuposiciones de uno de sus disyuntivos no es suficiente como para garantizar la satisfacción de las presuposiciones de la disyunción tomada en su totalidad. Si sólo un miembro de una disyunción es verdadero, entonces, si debemos satisfacer las presuposiciones de la disyunción, las presuposiciones del mencionado disyuntivo tienen que haber sido satisfechas. Ésta es la diferencia entre el sistema Kleene tetravalente y un sistema producto. En un sistema producto, los dos valores son independientes el uno del otro. En el ejemplo consignado más arriba, en ambos casos el valor resultante debería haber sido 11. El éxito del sistema Kleene en la resolución del problema de la proyección es precisamente responsabilidad de que los valores de la presuposición dependan de los valores de verdad.

En (103) definimos a los operadores A y P que ya aparecieron en §5.5.3:

(103)

ϕ	$A\phi$	$P\phi$
11	11	11
10	01	01
00	01	01
01	01	11

Las equivalencias (87)-(89) y (91)-(94) se siguen cumpliendo. Tal como en el sistema trivalente, $A\phi$ tiene el valor máximo sólo en el caso que ϕ lo tenga y en caso contrario tiene el valor mínimo. $P\phi$ tiene el valor máximo sólo en caso de que todas las presuposiciones de ϕ hayan sido satisfechas, es decir, sólo en el caso de que el valor de la presuposición sea 1, y en caso contrario tiene el valor mínimo.

En forma análoga a P, en (104) se define un operador T que sólo toma en cuenta valores de verdad.

(104)

ϕ	$T\phi$
11	11
10	11
00	01
01	01

$T\phi$ tiene el valor máximo sólo en el caso de que ϕ tenga el valor 1 y en caso contrario tiene el valor mínimo, así como P sólo tiene el valor máximo si el valor de la presuposición es 1. Ahora se pueden probar las siguientes equivalencias:

(105) $P(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $(T\phi \vee P\psi) \wedge (T\psi \vee P\phi) \wedge (P\phi \vee P\psi)$.

(106) $P(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $(T\neg\phi \vee P\psi) \wedge (T\neg\psi \vee P\psi) \wedge (P\phi \vee P\psi)$.

(107) $P(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $(T\neg\phi \vee P\psi) \wedge (T\psi \vee P\psi) \wedge (P\phi \vee P\psi)$.

Compararemos estas equivalencias con las consignadas en (108)-(111):

(108) $T(\phi \vee \psi)$ es equivalente a $T\phi \vee T\psi$.

(109) $T(\phi \wedge \psi)$ es equivalente a $T\phi \wedge T\psi$.

(110) $T(\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $T\phi \rightarrow T\psi$.

(111) $T\neg\phi$ es equivalente a $\neg T\phi$.

Advertimos que, a diferencia del valor de la presuposición, el valor de verdad de una oración queda completamente determinado por los valores de verdad de sus partes.

En su artículo "Conventional Implicature" (1979) Karttunen y Peters (trabajando dentro del marco de la gramática de Montague, que discutiremos en el volumen 2) proponen traducir oraciones ϕ del lenguaje natural como pares de fórmulas $\langle\phi^t,\phi^p\rangle$, en las que ϕ^t representa las condiciones de verdad de ϕ y ϕ^p representa sus presuposiciones (o lo que ellos denominan *implicaturas convencionales*) (véase cap. 6). Puede darse la siguiente definición inductiva de una disyunción A o B:

(112) Si A se traduce como $\langle A^t, A^p\rangle$ y B como $\langle B^t, B^p\rangle$, entonces A *o* B se traduce como $\langle(A \text{ } o \text{ } B)^t, (A \text{ } o \text{ } B)^p\rangle$, en el cual $(A \text{ } o \text{ } B)^t = A^t \vee B^t$ y $(A \text{ } o \text{ } B)^p = (A^t \vee B^p) \wedge (B^t \vee A^p) \wedge (A^p \vee B^p)$.

(Nuestra versión de (112) difiere ligeramente de la definición original de Karttunen y Peter, pero las diferencias se refieren a detalles que no son relevantes aquí.) El paralelismo entre (112) y las equivalencias (105) y (108) debería quedar claro. Al igual que en el caso de las definiciones inductivas que tratamos cuando discutimos las presuposiciones en un sistema trivalente, en §5.5.3, parecería que estas definiciones sintácticas inductivas llevan a los mismos resultados que la semántica tetravalente. Hay conexiones lógicas exactas entre los dos enfoques, pero aquí no podemos ahondar en las mismas.

5.5.6 *Los límites de las lógicas multivalentes en el análisis de la presuposición*

Un sistema Kleene trivalente o tetravalente puede proporcionar de cierta forma una buena explicación de la cancelación de las presuposiciones en la composición de oraciones. Pero también hay ciertos problemas. El primer problema se exhibe con mucha claridad en oraciones como (113) y (114).

(113) El rey de Francia no es calvo, dado que no hay rey de Francia.

(114) No hay rey de Francia; por ende el rey de Francia no es calvo.

Si (113) es verdadera, entonces tanto (115) como (116) deben ser verdaderas (y lo mismo se aplica a (114)):

(115) El rey de Francia no es calvo.

(116) No hay rey de Francia.

Pero el problema es que (115) y (116) no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo, porque (116) es la negación de una de las presuposiciones de (115).

Pareciera que lo que necesitamos aquí es que (115) sea verdadera incluso si no hay rey de Francia. Esto no plantea ningún problema para la teoría de las descripciones de Russell, puesto que, de acuerdo con Russell, la oración (115) es ambigua (véase §1.5.2). Un sistema multivalente puede brindar una solución similar. Distinguimos dos lecturas de (115), introduciendo para este propósito una nueva clase de negación, ~. Esta negación se define por medio de la tabla (117):

(117)

ϕ	$\sim\phi$
1	0
#	1
0	1

Si p es una presuposición de q, entonces, de acuerdo con la tabla para ~, ~q es verdadera si p no es verdadera. La negación ~ se denomina *negación interna* y ¬ *negación externa*. Interpretando la negación de (115) como negación externa, (115) y (116) pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo, de manera que (113) y (114) pueden ser ambas verdaderas.
Adviértase que los operadores A y ~ son interdefinibles vía ¬: ~ ϕ es equivalente a $\neg A\phi$ (y así, $A\phi$ es equivalente a $\neg \sim \phi$). Al introducir operadores como ~, A y P hemos extendido la lógica proposicional estándar mediante la adición de nuevas constantes lógicas. Pero la introducción de estos operadores sólo tiene sentido si elegimos una interpretación multivalente. Esto es lo que quisimos expresar en §5.5.1 cuando dijimos que las lógicas que divergen de las interpretaciones estándar a menudo dan origen a extensiones.

Ahora puede resolverse el problema planteado por oraciones como (113) y (114) distinguiendo dos clases de negación. Esto puede parecer *ad hoc*, dado que no hemos ofrecido ninguna forma sistemática de determinar si una negación debe leerse como interna o como externa. Sin embargo, hay un problema aun más serio que el que se plantea con (113) y (114). Lo podemos ilustrar por medio de una oración como:

(118) Si la calvicie es hereditaria, entonces el rey de Francia es calvo.

Ahora intuitivamente queda lo suficientemente claro que (119) (= (86)) es una presuposición de (118):

(119) Hay un rey de Francia.

Luego, de acuerdo con la definición 3, ninguna valuación que haga falsa a (119) puede hacer verdadera a (118). Pero considérese (120):

(120) La calvicie es hereditaria.

A pesar de que (120) es el antecedente de (118), puede ser falsa sin que haya un rey de Francia, dado que las oraciones (119) y (120) son lógicamente independientes entre sí. Sea V cualquier valuación que haga falsas a ambas oraciones. Entonces V hace verdadera a (118), dado que hace que su antecedente (120) sea falso. De esta forma, V hace falsa a (119) y verdadera a (118), en contradicción con la advertencia mencionada más arriba según la cual (119) es una presuposición de (118). En general el problema es el siguiente: las implicaciones con antecedentes contingentes que son lógicamente independientes de ciertas presuposiciones de sus consecuentes tienen demasiadas presuposiciones canceladas. Surgen complicaciones similares con las otras conectivas.

A esta altura se pueden tomar diversos cursos de acción. Una idea sería tratar de encontrar mejores definiciones multivalentes para las conectivas. El sistema de Bochvar funcionaría muy bien para oraciones como (118), pero tiene sus propios problemas con oraciones como (82)-(84). Hasta ahora no se ha encontrado un único sistema que resuelva tanto (82)-(84) como (118) en forma satisfactoria y es dudoso que exista un sistema tal. Una segunda posibilidad sería adaptar la definición 3. Se ha ensayado esto un par de veces y los resultados no han sido satisfactorios.

Una tercera idea, que hasta ahora ha sido la más exitosa, consiste en conservar tanto un sistema Kleene trivalente o tetravalente como conservar la definición 3, pero abandonar la idea según la cual la presuposición de (118) que expresa que hay un rey de Francia es una presuposición *semántica*. Procediendo de esta forma, luego se ofrece una explicación *pragmática* del hecho de que quienquiera que afirme (118) o su negación debe creer que Francia tiene un rey. Esto significa que debemos introducir la noción de *presuposiciones pragmáticas* como complemento de la noción semántica. Cualquier explicación pragmática de esta clase debe tener un fuerte apoyo en la teoría de Grice de las *máximas conversacionales*. Retomaremos estas máximas en extenso en el capítulo 6, donde también consideraremos brevemente la posibilidad de que la presuposición no sea en absoluto una noción semántica sino que debe ser explicada en términos pragmáticos exclusivamente.

5.6 Eliminación de variables

Los lectores que hayan trabajado sobre el capítulo dedicado a la lógica de predicados probablemente hayan recibido la impresión de que las variables desempeñan un papel esencial en la lógica de predicados. En esta sección veremos que éste no es el caso. La lógica de predicados puede ser formulada sin emplear variables. En esta sección se pueden aprender un buen número de lecciones. En primer lugar, la manera en que se formula un lenguaje lógico, cómo luce en el papel, no siempre es esencial. Esto puede reconfortar a quienes estén preocupados por el hecho de que los lenguajes formales se construyen en forma muy diferente que los naturales. Si los sistemas lógicos se aplican al lenguaje natural, entonces los lenguajes lógicos son instrumentos para la representación del significado. En relación con esto sólo cuenta la elección del sistema lógico; la variante sintáctica particular es irrelevante. La elección del lenguaje lógico es meramente la elección de una notación. No implica ningún compromiso con alguna interpretación en particular y, por ello, sólo está sujeta a consideraciones tales como la simplicidad y la conveniencia. Habiendo visto de qué manera pueden evitarse las variables, el lector podrá tener una mejor idea acerca de por qué las variables son tan útiles desde el punto de vista técnico. Ésta es la segunda lección que se debe aprender de esta sección. El advertir lo que debe hacerse para eliminarlas le dará una mejor idea de lo que ellas hacen. Una tercera cuestión que aquí se quiere hacer ver es algo que hemos tratado de plantear a lo largo de este capítulo: la lógica proporciona un conjunto de herramientas que pueden aplicarse a una amplia gama de cuestiones.

El método para eliminar variables que discutiremos aquí fue explicado originalmente por Quine en su artículo "Variables Explained Away" (1966). Quine se vale de un hecho que ya hemos mencionado anteriormente: las funciones proposicionales, las fórmulas con variables libres, pueden interpretarse como predicados. Las fórmulas compuestas con variables libres como, por ejemplo, $Px \wedge Qx$ y $Py \vee Rx$ pueden interpretarse como predicados compuestos cuya aridad depende de la cantidad de variables libres que tenga la función. Una forma de reducir la aridad de un predicado consiste en ligar una variable x de una función proposicional prefijándole un cuantificador $\exists x$ o $\forall x$.

En lo que sigue definiremos alternativas para los lenguajes estándar de la lógica de predicados. Las fórmulas de esos nuevos lenguajes no tienen ninguna variable. El conjunto de fórmulas se divide en expresiones predicativas n-arias, esto para cada $n \geqslant 0$. Las expresiones predicativas que tienen aridad 0 corresponden a las oraciones habituales de la lógica de predicados estándar, es decir, a fórmulas que carecen de variables libres. Y para las letras de predicado n-arias de la lógica de predicados estándar, los nuevos lenguajes tienen expresiones predicativas n-arias no compuestas.

Ofreceremos la interpretación semántica de las fórmulas juntamente con sus definiciones recursivas. Como es usual, un modelo consiste en un dominio D y una función de interpretación I. La función de interpretación interpreta las constantes de individuo y las expresiones predicativas n-arias no compuestas. Luego se extiende la función I a una función que interprete todas las fórmulas y de esta forma estaría realizando la misma tarea que la función valuación V usual de la lógica de predicados estándar. Si ϕ es una expresión predicativa n-aria, entonces $I(\phi)$ es un conjunto de hileras de elementos derivados de D, cada uno con longitud n. Es decir, $I(\phi) \subset D^n$. Luego describiremos la forma en que se realiza esto para expresiones predicativas con aridad 0, es decir, oraciones.

En la lógica de predicados estándar, las variables indican cuáles son los argumentos de las funciones proposicionales que están ligados por cuantificadores y cuáles son los cuantificadores que los ligan en cada caso. De manera que, mientras nos ocupemos solamente de funciones proposicionales unarias, podemos ahorrarnos las variables. Sencillamente, bien podemos escribir $\exists P$ y $\forall P$ en lugar de $\exists xPx$ y $\forall xPx$. La regla sintáctica y la interpretación correspondiente a tal expresión puede formularse de la siguiente manera:

(i) Si ϕ es una expresión predicativa unaria, entonces $\exists(\phi)$ y $\forall(\phi)$ son oraciones;

$I(\exists(\phi)) = 1$ sii existe un $d \in D$ tal que $d \in I(\phi)$;

$I(\forall(\phi)) = 1$ sii para todo $d \in D$ se cumple que $d \in I(\phi)$.

De esta forma, con los predicados unarios sencillamente descartamos las variables de la fórmula. Para interpretar las fórmulas obtenidas de esta manera, sólo debemos tener en cuenta la interpretación de las expresiones predicativas. La expresión existencial será verdadera sólo en caso de que en la interpretación de la expresión predicativa haya al menos un elemento del dominio y la expresión universalmente cuantificada será verdadera sólo en caso de que en la interpretación de la expresión predicativa estén todos los elementos del dominio.

Esto es menos sencillo cuando llegamos a las expresiones predicativas con más lugares de argumento. Si simplemente descartáramos las variables de tales funciones proposicionales, entonces tanto $\exists x \forall y Rxy$ como $\exists y \forall x Rxy$ se reducirían a $\exists\forall R$. Pero, cuando se colocan las variables, el significado de esas dos fórmulas es diferente. Claramente debemos encontrar una forma para indicar los lugares de argumento que son afectados por cada cuantificador. Por ejemplo, a cada cuantificador se le puede asociar un parámetro numérico para indicar el lugar al cual se aplica el cuantificador. Otra solución más elegante consistiría en asignar alguna posición fija a los cuantificadores, por ejemplo, la última posición en la fórmula en cuestión. Luego, deberíamos introducir una permutación que nos permitiera convertir cualquier posición en la última, por ejemplo, mediante rotación de posiciones. En (ii) se define e interpreta un operador ROT que realiza precisamente esto:

(ii) Si ϕ es una expresión predicativa n-aria ($n > 1$), entonces ROT(ϕ) es

$\langle d_1,\ldots,d_n \rangle \in I(ROT(\phi))$ sii $\langle d_n, d_1,\ldots,d_{n-1} \rangle \in I(\phi)$.

La idea es que una oración como $\exists x \forall y Rxy$ pueda escribirse como $\exists\forall R$, mientras que una oración como $\exists y \forall x Rxy$ pueda escribirse como $\exists\forall ROT(R)$. Pero estas fórmulas no pueden construirse con las reglas dadas hasta aquí. La regla (i) sólo dice qué hacer con las expresiones predicativas unarias; y para construir las fórmulas que figuran más arriba debemos decir de qué forma puede obtenerse una expresión predicativa unaria a partir de una binaria asociándole un cuantificador a la misma. La regla que hace esto, no sólo para el caso especial de las expresiones predicativas binarias, sino para el caso general de expresiones predicativas n-arias se consigna, a continuación, junto con su interpretación:

(iii) Si ϕ es una expresión predicativa n-aria ($n \geqslant 1$), entonces $\exists(\phi)$ y $\forall(\phi)$ son expresiones predicativas (n - 1)-arias;

$\langle d_1,\ldots, d_{n-1} \rangle \in I(\exists(\phi))$ sii existe un $d \in D$ tal que $\langle d_1,\ldots, d_{n-1}, d \rangle \in I(\phi)$;

$\langle d_1,\ldots, d_{n-1} \rangle \in I(\forall(\phi))$ sii para todo $d \in D$ se cumple que $\langle d_1,\ldots, d_{n-1}, d \rangle \in I(\phi)$.

Adviértase que la regla (i) de hecho es un caso especial de (iii). Pronto volveremos sobre esto.

Además de agregar cuantificadores, otra forma de reducir el número de argumentos consiste en aplicar una expresión predicativa a una constante de individuo:

(iv) Si ϕ es una expresión predicativa n-aria ($n \geqslant 1$) y c es una constante de individuo, entonces $\phi(c)$ es una expresión predicativa (n-1)-aria;

$\langle d_1,\ldots, d_{n-1} \rangle \in I(\phi(c))$ sii $\langle d_1,\ldots,d_{n-1}, I(c) \rangle \in I(\phi)$.

Ahora podemos simular el efecto de un cuantificador trabajando sobre cualquier variable singular de una fórmula. Ejemplo: ∃yGxyz se convierte en ROT(∃(ROT(G))) (aplicando ROT, llevamos la variable y a la última posición y aplicando ROT una vez más luego de la cuantificación existencial regresamos las variables x, z a sus posiciones originales); ∀z∃yGxyz se convierte en ∀(ROT(∃(ROT(G)))); ∀z∃yGayz se convierte en ∀(ROT(∃(ROT(G))))(a), o ∀(∃(ROT(G))(a)) (la segunda alternativa se obtiene sustituyendo x por a antes de aplicar el cuantificador universal; otra posibilidad sería que la sustitución de x por a preceda a la cuantificación existencial).

Todavía debemos mostrar cómo se pueden traducir fórmulas con cuantificadores que ligan apariciones diferentes de una misma variable a fórmulas que carezcan de variables. Para hacer esto introducimos ahora una operación ID que convierte a una expresión predicativa *n*-aria en una (*n*-1)-aria. Si R es, por ejemplo, una expresión predicativa binara, entonces ID(R) se interpreta como el conjunto de los elementos d del dominio que tienen la interpretación de R, una relación, consigo mismos. Puesto en símbolos: $d \in I(ID(R))$ sii $\langle d, d \rangle \in I(R)$.

Para expresiones predicativas con más de dos posiciones debemos indicar cuáles son las dos posiciones identificadas por ID. Por ejemplo, podemos asociar un parámetro numérico al operador ID, el cual indicaría que la posición dada por el parámetro debería identificarse con, digamos, la última posición. Pero, nuevamente, una solución más elegante consistiría en asignar posiciones fijas a ID, por ejemplo, las dos últimas. Luego, necesitamos un procedimiento para reagrupar las posiciones en una expresión predicativa de forma tal que dos posiciones dadas cualesquiera puedan convertirse en las dos últimas posiciones. El operador ROT no alcanza para lograr esto. Pero se puede hacer esto, si introducimos una operación PERM que intercambia las dos últimas posiciones. Esta operación puede introducirse de la siguiente manera:

(v) Si ϕ es una expresión predicativa *n*-aria ($n > 1$), entonces PERM(ϕ) también lo es; $\langle d_1,\ldots,d_n \rangle \in I(PERM(\phi))$ sii $\langle d_1,\ldots, d_{n-2},d_n ,d_{n-1} \rangle \in I(\phi)$.

Puede definirse la operación ID como sigue:

(vi) Si ϕ es una expresión predicativa *n*-aria ($n>1$), entonces ID(ϕ) es una expresión predicativa (*n*-1)-aria; $\langle d_1,\ldots,d_{n-1} \rangle \in I(ID(\phi))$ sii $\langle d_1,\ldots,d_{n-1},d_{n-1} \rangle \in I(\phi)$.

De esta forma, una fórmula como ∀xRxx puede escribirse como ∀(ID(R)) y la fórmula ∃y∀xRxyxy puede escribirse como: ∃(ID(∀(ID(ROT(PERM(ROT(R))))))).

El tratamiento de las conectivas requerirá de algunos cambios. Al no consignar las variables, ∃x¬Px y ¬∃xPx deberán escribirse como ∃¬P y ¬∃P. Esto indica que debe ser posible aplicar ¬ a cualquier expresión predicativa *n*-aria para un $n \geq 0$ arbitrario:

(vii) Si ϕ es una expresión predicativa *n*-aria, entonces $\neg(\phi)$ también lo es; $\langle d_1,\ldots,d_n \rangle \in I(\neg(\phi))$ sii $\langle d_1,\ldots,d_n\rangle \notin I(\phi)$.

Así, en el caso particular de una expresión P unaria, ¬(P) se interpreta como el conjunto de todas las entidades del dominio que caen fuera de la interpretación de

P. Y para una expresión predicativa binaria R, $\neg$(P) se interpreta como el conjunto de todos los pares ordenados que no caen dentro de la relación que es la interpretación de R.

Las otras conectivas también deben funcionar con expresiones predicativas n-arias. Para este fin, es más fácil disponer lo siguiente:

(viii) Si ϕ es una expresión predicativa m-aria y ψ es una expresión predicativa n-aria, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ y $(\phi \rightarrow \psi)$ son expresiones predicativas (m + n)-arias; $\langle d_1,\ldots, d_m, d_{m+1},\ldots, d_{m+n}\rangle \in I(\phi \wedge \psi)$ sii $\langle d_1,\ldots, d_m\rangle \in I(\phi)$ y $\langle d_{m+1},\ldots,d_{m+n}\rangle \in I(\psi)$ (y en forma análoga para las otras conectivas).

Una fórmula como $\exists x(Px \vee Qx)$ puede escribirse sin variables como $\exists(ID(P\vee Q)$; y $\exists x \forall y(Py \rightarrow Rxy)$ como $\exists(\forall(ID(ROT(PERM(P\rightarrow R)))))$. Nótese que las cláusulas (vii) y (viii) también se definen para expresiones predicativas 0-arias, las cuales son las oraciones en este sistema. En lo que sigue puede verse que lo que I hace para estas fórmulas es precisamente lo que la función valuación V usual hace para fórmulas de la lógica de predicados estándar. La interpretación de una expresión predicativa n-aria es un subconjunto de D^n, un conjunto de hileras de elementos de D cada una de las cuales tiene n elementos. D^0 es el conjunto de hileras que no tienen absolutamente ningún elemento. Obviamente hay una sola de ellas: la hilera vacía $\langle\ \rangle$. De manera que D^0 es el conjunto $\{\emptyset\}$. Este conjunto tiene exactamente dos subconjuntos: $\{\emptyset\}$ mismo y el conjunto vacío $\emptyset$. Ahora estos dos objetos pueden ser asociados con los valores de verdad 1 y 0: $\{\emptyset\}$ con 1 y $\emptyset$ con 0. De esta forma, las cláusulas (iii), (iv), (vii) y (viii) proporcionan resultados correctos para todo valor de $n \geqslant 0$.

Hemos creado algunos lenguajes para la lógica de predicados que, al menos superficialmente, difieren en forma considerable de los lenguajes estándar. Pero todos ellos significan lo mismo: las interpretaciones no cambiaron. Este sistema proporciona los mismos esquemas de argumento válidos que la lógica de predicados estándar, de manera que la elección entre lenguajes con y sin variables es exclusivamente una elección de notación. Está claro que de las dos notaciones debe preferirse la lógica de predicados con variables, dado que con esta notación es mucho más fácil comprender el significado de las fórmulas. Al mostrar de qué forma pueden eliminarse en principio las variables, al mismo tiempo hemos mostrado por qué es mejor no eliminarlas.

6 Pragmática: significado y uso

6.1 Aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad

Uno de los temas de este libro se ocupa de la aplicación de técnicas y métodos semánticos desarrollados en el campo de la lógica al estudio del lenguaje natural. Ciertamente, la semántica lógica ha realizado importantes contribuciones al estudio del significado en el lenguaje natural. Pero, como lo enfatizáramos anteriormente (en §1.2, entre otros), la semántica lógica no es la última palabra respecto del significado. Por ejemplo, en §2.2 mencionamos ciertos usos de las conjunciones del lenguaje natural *y*, *o* y *si* (... *entonces*) que no quedan explicados por las tablas de verdad de las conectivas lógicas $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ correspondientes.

Los aspectos del significado que explica la semántica lógica son caracterizados sencillamente como *aspectos del significado que dependen de las condiciones de verdad*. La semántica lógica se interesa primordialmente por los valores de verdad de las oraciones. El significado de las expresiones que no son oraciones es analizado exclusivamente en términos del aporte que realizan a las condiciones de verdad de las oraciones en las que aparecen.

El hecho de que la semántica lógica no explique todos los aspectos del significado puede querer decir dos cosas. Puede querer decir que los análisis lógicos y semánticos de los que disponemos al momento necesitan ser *perfeccionados*. Pero también puede querer decir que algunos aspectos del significado están más allá del alcance de la semántica lógica; estos aspectos serían en última instancia no dependientes de las condiciones de verdad. Dado que no todos los análisis actuales son perfectos, sin lugar a dudas la semántica lógica está limitada en el primer sentido, pero ésta no es una deficiencia esencial. No obstante, el segundo tipo de deficiencia sí es esencial, dado que si algunos aspectos del significado están más allá del alcance de la semántica lógica entonces ésta no sería más que una parte de la teoría del significado.

En esta sección sostendremos que en relación con las conjunciones *y*, *o* y *si* (... *entonces*) la semántica lógica está verdaderamente limitada en esta segunda, y más bien esencial, forma. Veremos que ciertos aspectos del significado de las conjunciones del lenguaje natural no quedan expresados en absoluto por las tablas de verdad de las correspondientes conectivas lógicas. Y proporcionaremos razones que expliquen el hecho de que esos aspectos no quedan atrapados por las tablas de verdad sino que quedan mejor explicados en términos de las condiciones de uso apropiado de las expresiones. Éste es un tipo de explicación que emplea principios generales del uso del lenguaje, pero que depende en gran medida de la semántica proporcionada por la lógica proposicional.

Con la introducción del concepto de uso del lenguaje entramos en el campo de la pragmática, el tercer vértice del triángulo semiótico tradicional consistente en *la sintaxis*, *la semántica* y *la pragmática*. Si la sintaxis se ocupa de las relaciones entre las expresiones de un lenguaje, y la semántica de las relaciones de las expresiones con entidades externas al lenguaje, entonces la pragmática se ocupa principalmente de las relaciones entre las expresiones y su uso. Pero los límites entre estas regiones están lejos de ser nítidos. Esto se cumple especialmente para la pragmática, de la cual Bar-Hillel dijo en cierta ocasión que funciona como el cesto de papeles de la lingüística, un lugar en el que se pueden depositar los fenómenos recalcitrantes una vez que se los ha declarado irrelevantes. Los límites entre regiones se toman más nítidos una vez que se perfilan los bordes de las regiones circundantes. Esta es una de las razones de que el advenimiento de la gramática de Montague, la cual proporciona un cuadro definido de la semántica y sus relaciones con la sintaxis (véase vol. 2), permitiera formar consenso respecto de lo que pertenece y lo que no pertenece a la pragmática.

Como sostuvimos anteriormente, la semántica no es la última palabra en la teoría del significado. La semántica es una parte de la teoría del significado, y no más que eso. Consideramos que la parte restante pertenece a la pragmática, de manera que para nosotros la pragmática se ocupa de todos aquellos aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad. Defenderemos la idea según la cual el estudio de las condiciones de uso apropiado es, en este sentido, un enfoque prometedor para la pragmática (no exploraremos la posibilidad de que haya otros campos que pertenecen a la pragmática propiamente). Luego, para nosotros, la teoría del significado tiene justamente dos subdivisiones: la semántica y la pragmática.

El trasfondo lógico y semántico de la perspectiva que acabamos de mencionar para la pragmática también desemboca en un enfoque metodológico particular. Chomsky abrió la posibilidad de una *sintaxis formal* y Montague la posibilidad de una *semántica formal* (véase vol. 2). Con estos precedentes, los proponentes de este estilo de pragmática no deberán conformarse con algo menos riguroso. Sin embargo, éste es un punto delicado, dado que los dos representantes más influyentes en el área de la pragmática, Searle y Grice, se oponen al formalismo. De todas formas, el otorgar precisión al tipo de trabajo informal que ellos y otros han realizado, sigue siendo una tarea importante para una pragmática que surge de una gramática lógica.

En las secciones siguientes discutiremos varios fenómenos relativos al hecho de que el significado de las conjunciones *y*, *o* y *si* (... *entonces*) no depende totalmente de las condiciones de verdad. La discusión alterna con una presentación de la teoría de Grice centrada en su Principio de Cooperación en la Conversación. Luego analizaremos la forma en que puede aplicarse su teoría para explicar los aspectos pragmáticos del significado. Finalizaremos este capítulo con algunos comentarios acerca de la relación entre el fenómeno que discutimos aquí y las presuposiciones, discutidas en §5.5.

6.2 La conjunción lógica y el orden de las expresiones

Una conjunción lógica $\phi \wedge \psi$ es verdadera solamente en el caso de que ambos conjuntivos ϕ y ψ sean verdaderos, como puede constatarse a partir de su tabla de verdad. Esto significa que si analizamos las oraciones (1) y (2) en términos de la conjunción lógica de la lógica proposicional, no podemos expresar ninguna diferencia en lo que respecta al significado de ambas.

(1) Ana se quitó las medias y se metió en la cama.

(2) Ana se metió en la cama y se quitó las medias.

Las fórmulas $p \wedge q$ y $q \wedge p$ que corresponden a (1) y (2) son lógicamente equivalentes. Esta equivalencia se conoce como la conmutatividad de $\wedge$ (véase ejercicio 2 en cap. 2).

Este problema puede abordarse de diferentes maneras. Un enfoque, que en principio podría parecer plausible, consistiría en cambiar la interpretación de la conectiva $\wedge$ de forma tal que la conjunción $\phi \wedge \psi$ sea verdadera sólo si la acción descripta por ϕ sucede *antes* de lo descripto en ψ. Una reinterpretación tal de la conjunción lógica nos colocaría, por supuesto, fuera del marco de la lógica proposicional estándar. Necesitaríamos un sistema intensional más rico para la lógica del tiempo (véase vol. 2). Bajo una reinterpretación tal, la oración (2) sería falsa si Ana se quitara las medias antes de meterse en la cama. La oración (3) plantea un problema para este enfoque:

(3) Ana se quitó las medias y se metió en la cama, pero no sé cuál de las dos cosas hizo primero.

La oración (3) se traduciría a la lógica proposicional como la fórmula $(p \wedge q) \wedge \neg r$. La reinterpretación de $\wedge$ que dimos anteriormente arrojaría la predicción incorrecta que (3) es falsa si Ana se quitó las medias cuando ya estaba en la cama. La predicción es incorrecta porque, según este enfoque, si el evento descripto por p sucedió luego del evento descripto por q, entonces la conjunción $p \wedge q$ y, por consiguiente, la conjunción $(p \wedge q) \wedge \neg r$ son ambas falsas.

Tal vez podría salvarse este enfoque si atribuimos dos significados a *y*. Un significado sería el que corresponde a la conectiva lógica $\wedge$, y otro el que le dimos anteriormente cuando reinterpretamos *y* como *y luego*. El precio a pagar es que las oraciones con *y* serían ambiguas. En la situación en que Ana se quitó las medias mientras estaba en la cama, según una de las lecturas las oraciones (1) y (3) son verdaderas y según la otra son falsas (en ambas lecturas la oración (2) sería verdadera).

A continuación discutiremos un enfoque completamente diferente. Suponemos que ni la palabra *y* ni las oraciones (1)-(3) son ambiguas. La palabra *y* tiene el significado que se le dio en lógica proposicional. Esto significa que (2) no es falsa en la situación en que Ana se quitó las medias, como es usual, antes de meterse en la cama. Según esta lectura, (2) no sería falsa, pero, si el hablante conociera el orden en el cual sucedieron los eventos, ciertamente tampoco sería cooperativa. Porque bajo esas circunstancias, (2) sería engañosa. Normalmente suponemos que los hablantes tienden a ser ordenados. Si se mencionan dos eventos uno después del otro, entonces tendemos a suponer –mientras no hayamos escuchado lo contrario– que el orden temporal de la descripción refleja el orden de los sucesos. La calificación de "mientras no hayamos escuchado lo contrario" permite explicar oraciones como (3). A fin de evitar confundir al oyente, un hablante afirma (3) para enfatizar explícitamente el hecho de que desconoce el orden en que sucedieron los eventos .

Este enfoque tiene la ventaja de poder dar una explicación completamente análoga respecto de la diferencia entre (4) y (5):

(4) Ana se quitó las medias. Ella se metió en la cama.

(5) Ana se metió en la cama. Ella se quitó las medias.

La diferencia respecto del significado entre (4) y (5) es exactamente la misma que entre (1) y (2). Pero, es dificil ver cómo podría explicarla el primer enfoque, dado que éste localiza la diferencia en la conjunción *y*, pero esta palabra no figura ni en (4) ni en (5) (especialmente dado que al dejar fuera la conjunción, un recurso estilístico conocido como *asíndeton*, generalmente se refuerza la sugerencia de que hay una sucesión temporal). Es preferible una explicación uniforme como la del segundo enfoque.

Hemos distinguido dos enfoques. Según el primero, se puede asumir que las conjunciones tienen diversos significados y que en lógica proposicional encontramos sólo uno de ellos. A este enfoque se le puede denominar *enfoque semántico*, dado que trata de resolver el problema ajustando las condiciones de verdad. El *enfoque pragmático* es otro enfoque diferente, en el que se supone que las conjunciones del lenguaje natural tienen sólo el significado que depende de las condiciones de verdad que se les atribuye en lógica proposicional y que todo otro aspecto de su significado puede explicarse en términos de usos del lenguaje. En lo que resta de este capítulo se discutirá el segundo enfoque.

6.3 Uso y principio de cooperación

El enfoque pragmático proviene del filósofo norteamericano H. P. Grice. A continuación examinaremos con más detalle la estructura de este enfoque. En la teoría de Grice, la noción de *implicatura conversacional* desempeña un papel central. Una implicatura conversacional de una oración es algo que se sigue de ella, pero no en un sentido estrictamente lógico. Una implicatura no es algo que una oración afirma explícitamente sino que solamente sugiere. No es una consecuencia lógica; es una consecuencia en un sentido no lógico. Sin embargo, esto no significa que sea arbitraria. Las implicaturas conversacionales se obtienen en forma sistemática y en esto desempeña un papel importante el principio de cooperación en la conversación.

La idea que subyace a este principio es que quienes participan en una conversación suponen que aquel con quien conversan está cooperando. Ellos suponen que todos se están comportando en una forma que es conducente al objetivo común, a saber, la comunicación. Dentro del código general de conducta cooperativa se pueden distinguir varias reglas más específicas. Grice se refiere a estas reglas como *máximas conversacionales.*

Una de las máximas, tal vez no la más interesante, requiere que los participantes presenten la información que quieren comunicar bajo la forma más clara posible. Esto implica, entre otras cosas, ordenar los diferentes items lo mejor posible. En el ejemplo que describimos anteriormente se emplea esta máxima. Supóngase que un usuario del lenguaje quiere transmitir la información de que ocurrieron dos cosas, A y B. Si A ocurrió antes que B, entonces un hablante que ordena esta información lo mejor posible dirá *A y B.* Y, si no hay indicación en contrario, el oyente asumirá que el hablante obedece al principio de cooperación y ordena la información lo mejor posible: concluirá que A ocurrió antes que B.

De lo anterior podemos desprender la siguiente caracterización general de las implicaturas conversacionales. Una implicatura conversacional no es una consecuencia (lógica) de una oración, pero es una consecuencia lógica del supuesto según el cual cuando el hablante profiere una oración está respetando las máximas conversacionales.

Ocasionalmente la información contextual adicional gravita en la derivación de implicaturas. En la medida en que éste no sea el caso, hablamos de *implicaturas conversacionales generalizadas.* A diferencia de las consecuencias lógicas, estas implicaturas no se fundan en los aspectos del significado que dependen de las condiciones de verdad. Sin embargo, están tan estrechamente relacionadas con las correspondientes expresiones y construcciones que no pueden dejarse fuera en una explicación del significado de las últimas. En lo que sigue cuando discutamos implicaturas conversacionales se tratará de implicaturas conversacionales generalizadas a menos que se haga una excepción explícita.

6.4 Disyunción inclusiva y exclusiva

Generalmente la discusión acerca de los alcances de la correspondencia entre las conectivas de la lógica proposicional y las conjunciones del lenguaje natural no se centra en torno de *y* sino en torno de *o* y de *si* (... *entonces*). En esta sección y en §6.6 discutiremos la relación entre *o* y la conectiva $\vee$. En §6.8 nos ocuparemos de la relación entre *si* (... *entonces*) y la conectiva $\rightarrow$

En el capítulo 2 se distinguió la disyunción inclusiva de la exclusiva. Ambas disyunciones son falsas si ambos disyuntivos son falsos y verdaderas si uno de los disyuntivos es verdadero. La diferencia reside en que si ambos disyuntivos son verdaderos, la disyunción inclusiva es verdadera, mientras que la disyunción exclusiva es falsa. Ambas disyunciones pueden representarse mediante conectivas veritativo-funcionales (véase §2.2). En lógica optamos por la disyunción inclusiva.

Sin embargo, a menudo se sugiere que la disyunción en el lenguaje natural, por ejemplo la expresada por la palabra *o* en español, no es inclusiva sino exclusiva, o al menos es ambigua respecto de las dos. La cuestión no es si el español tiene recursos para expresar la disyunción exclusiva. Ciertamente los tiene, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

(6) O bien daremos una caminata o bien iremos al teatro.

(7) Daremos una caminata a menos que vayamos al teatro.

(8) Daremos una caminata o iremos al teatro (pero no ambas cosas).

(9) Si no damos una caminata, iremos al teatro.

El problema es la cantidad de significados que tiene una *o* sola, sin la ayuda de otras expresiones. ¿Hay ejemplos de oraciones que nos fuercen a asumir una *o* exclusiva? ¿La oración (10) tiene una lectura bajo la cual es falsa si tanto damos una caminata como vamos al teatro?

(10) Daremos una caminata o iremos al teatro.

Tarski en su *Introduction to Logic* (1939 p .21) aboga por la ambigüedad de *o* sobre la base de los siguientes ejemplos:

Supóngase que leemos el siguiente cartel en una librería: *Los clientes que sean maestros o estudiantes tienen derecho a un descuento especial.* Aquí la palabra 'o' está usada en el primer sentido (inclusivo) sin lugar a dudas, dado que no se pretende denegar la reducción a un maestro que al mismo tiempo sea estudiante. Por otro lado, si un niño solicita que se le lleve a dar una caminata por la mañana y al teatro por la noche y le respondemos: *No, daremos una caminata o iremos al teatro*, entonces obviamente estamos usando la palabra 'o' el segundo sentido (exclusivo) dado que pretendemos cumplir sólo una de sus dos solicitudes.

El segundo ejemplo, que asume que *o* es exclusiva, no es muy convincente. Un niño solicita que se le lleve a dar una caminata y luego al teatro y la respuesta es: *No* [esto es, no haremos ambas cosas, dar una caminata e ir al teatro], *daremos una caminata o iremos al teatro*. La disyunción de esta respuesta puede fácilmente ser interpretada como inclusiva. La palabra *no* que precede a la disyunción sirve como una negación explícita de la posibilidad, sugerida por el niño, de que ambos disyuntivos se cumplan. La forma lógica de la oración *No, daremos una caminata o iremos al teatro* no es la fórmula $p \vee q$ sino más bien una como $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$. El que la respuesta que se da es falsa si se lleva al niño tanto a dar la caminata como al teatro no requiere ser explicada mediante la suposición de una *o* exclusiva. La falsedad de la respuesta se sigue de la representación lógica de la misma con la conectiva $\vee$ inclusiva, porque la conjunción $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ es falsa si tanto p como q son verdaderas.

Imaginemos una situación análoga en la cual alguien pregunta si hoy saldremos y la respuesta que se le da es ésta: *Sí, daremos una caminata o iremos al teatro.* Supongamos que decidimos ir al teatro. Pero el día recién comienza. La primera función del teatro es temprano por la tarde y, dado que el clima es perfecto, decidimos dar una caminata. Bajo estas circunstancias, ¿podemos decir que la promesa de dar una caminata o ir al teatro no se ha cumplido? ¿La respuesta original es falsa, si, tal vez contrariamente a nuestra primera intención, damos una caminata primero y luego vamos al teatro? Obviamente no: la respuesta sigue siendo tan verdadera como lo hubiera sido si no hubiéramos hecho una de las dos cosas. Evidentemente no importa si se pretendió dar una disyunción inclusiva o exclusiva. La intención de que sólo se cumpla uno de los dos disyuntivos no afecta el valor de verdad cuando se cumplen los dos disyuntivos.

Además de este tipo de ejemplos, en los cuales se realizan promesas empleando una disyunción inclusiva con intenciones exclusivasy siendo que las dos alternativas prometidas no se excluyen lógicamente o en la práctica; también hay ejemplos en los cuales las alternativas son mutuamente excluyentes:

(11) Llueve o no llueve.

(12) Juan está en Londres o Juan está en París.

En (11) y en (12) nunca pueden ser verdaderos ambos disyuntivos a la vez. No puede llover y no llover en el mismo momento y en el mismo lugar y nadie puede estar en dos lugares al mismo tiempo. Estos ejemplos sugieren aun menos una disyunción exclusiva. Si por cualquier razón los dos disyuntivos no pueden ser ambos verdaderos, entonces la disyunción inclusiva proporciona exactamente los mismos resultados que la exclusiva, de manera que no es necesario asumir una *o* exclusiva (planteamos el mismo argumento en §2.2).

Podemos inferir las siguientes conclusiones. En primer lugar, los lenguajes naturales como el español tienen disyunciones exclusivas, pero las expresan por medios distintos que el *o* solo, sin la ayuda de otras expresiones. Además, para el análisis de disyunciones en las que los disyuntivos se excluyen mutuamente, lógicamente o en la práctica, es totalmente innecesaria la *o* exclusiva. Finalmente, es incorrecto dar por sentada una *o* exclusiva sólo porque se pretendió que fuera exclusiva. Si, contrariamente a las expectativas o intenciones del hablante, ambos disyuntivos son verdaderos, entonces esto no vuelve falsa a la disyunción.

6.5 Disyunciones e informatividad

La distinción entre disyunciones inclusivas y exclusivas no tiene mucho que ver con los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad. Como hemos dicho, ambas disyunciones pueden representarse como conectivas veritativo-funcionales. Pero a continuación abordaremos dos puntos que a menudo se mencionan en relación con el papel de la disyunción en el lenguaje natural y que involucran aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad.

La primera cuestión es que en la comunicación generalmente empleamos una disyunción sólo si creemos que uno de los disyuntivos es verdadero pero no estamos seguros de cuál de los dos lo es. La segunda cuestión, que no es totalmente independiente de la primera, es que en el lenguaje natural siempre hay una relación entre las dos partes de una disyunción. Este último punto también se aplica a las conjunciones, pero en este caso la cuestión es menos clara.

El primer punto parecería no estar de acuerdo con las condiciones de verdad de las disyunciones. A pesar de que una disyunción es verdadera si (al menos) uno de sus disyuntivos lo es, la disyunción (12) no sería expresada bajo circunstancias normales si el hablante supiera que Juan está de hecho en Londres, es decir, si supiera cuál de los disyuntivos es verdadero. Dicho de otra forma, las condiciones de verdad de las disyunciones no son análogas a las condiciones bajo las cuales es aceptable expresarlas. Mientras que una disyunción es verdadera si uno de sus disyuntivos lo es o ambos lo son, no es el caso que pueda expresarse una disyunción bajo todas las circunstancias en las que puede expresarse uno de sus disyuntivos. Por ejemplo, es aceptable decir *Juan está en Londres* si uno sabe que de hecho él está en Londres. Pero, bajo esas circunstancias, no es aceptable expresar la disyunción *Juan está en Londres o Juan está en París*, dado que esta oración sugiere que uno sabe que Juan está en una de esas ciudades pero no sabe en cuál de las dos. Si alguien preguntara dónde está Juan y usted supiera que está en Londres, entonces normalmente no respondería que está o bien en Londres o bien en París. Ésta sería una respuesta engañosa y el dar respuestas engañosas no es una forma de comportamiento cooperativo. En dicha circunstancia sería mucho más informativo responder sencillamente que Juan está en Londres. Para cooperar, en general y dentro de los límites impuestos por el tema y la naturaleza de la conversación, uno tratará de ser lo más informativo posible. Cada uno de los participantes de una conversación supondrá que el otro está actuando de esta forma. Si alguien respondiera a nuestra pregunta acerca de cuándo abandona la ciudad con *hoy*, *mañana*, *o tal vez pasado mañana*, nos sentiríamos engañados si luego descubriéramos que cuando habló tenía en su bolsillo un boleto de avión para un vuelo que partía en dos horas. Evidentemente uno se siente tratado injustamente si alguien afirma una disyunción cuando podría haber afirmado solamente uno de sus disyuntivos. El hablante hubiera podido proporcionar más información (relevante) pero eligió no hacerlo. Esto no es lo que uno espera de los participantes de una conversación; uno espera que se conduzcan en forma correcta y cooperativa.

Hay, por supuesto, excepciones a estas reglas. En primer lugar, ser cooperativo no siempre significa ser lo más informativo que se pueda. Por ejemplo, en un juego de adivinanzas comunicar toda la información que se posee es comportarse en forma no cooperativa. Esta caracterización (parcial) de la cooperación en tanto que ser informativo se aplica sólo al uso del lenguaje cuyo fin es proporcionar información. En segundo lugar, a veces tienen más peso otras obligaciones diferentes de la cooperación. La cooperación no es una norma absoluta; algunas veces debe ser anulada.

El hecho de que el hablante que afirma una disyunción puede no estar en posición de afirmar ninguno de sus disyuntivos está tan directa y sistemáticamente relacionado con las disyunciones que parecería correcto considerarlo como un aspecto de su significado. Pero se trata claramente de un aspecto que no puede incorporarse a sus condiciones de verdad. Las condiciones de verdad no mencionan a los hablantes ni lo que ellos están en posición de afirmar. ¿Por qué sencillamente no cambiamos las condiciones de verdad? Esto sería equivocado. La verdad o falsedad de una disyunción no debe depender de lo que los hablantes crean. Separar las condiciones de verdad de las disyunciones de sus condiciones de uso correcto no sólo es razonable sino también factible. Las condiciones de verdad pertenecen a la semántica y las condiciones de corrección pertenecen a la pragmática. Esta última se ocupa de la relación entre lenguaje y uso. Como queda de manifiesto en el ejemplo de la disyunción, las condiciones de corrección pueden requerir que los usuarios del lenguaje crean o no crean ciertas cosas. Respecto de la disyunción, las condiciones de corrección establecen que quien expresa una disyunción estando convencido de que uno de los disyuntivos es verdadero está hablando incorrectamente, independientemente de si lo que dice es verdadero o no. En principio, la verdad de una proposición puede evaluarse independientemente de las máximas conversacionales y para la disyunción podemos conservar la semántica de la lógica proposicional. No obstante, complementamos la semántica con las condiciones de corrección para las disyunciones; estas condiciones pueden defenderse en términos de las máximas conversacionales de Grice.

A pesar de que en principio verdad y corrección son independientes entre sí, hay casos en los que las dos parecen vinculadas. Un ejemplo bien conocido de esto es la oración (13), conocida como la *paradoja de Moore*.

(13) El gato está sobre la alfombra, pero yo no lo creo.

El problema con (13) no es que no pueda ser verdadera: puede serlo. La oración (13) no es una contradicción, dado que es verdadera si el gato está de hecho sobre la alfombra y si por cualquier razón yo no creo que éste sea el caso (por ejemplo, porque yo creo que el gato está afuera). El problema con (13) es que no hay forma de usar esta oración correctamente. Nuevamente, esto puede explicarse en términos del principio de cooperación. Si se usa el lenguaje para brindar información, entonces la cooperación requiere que los hablantes afirmen sólo cosas que creen verdaderas. Pero ningún hablante puede nunca estar convencido de que (13) es verdadera. Esto implicaría que crea que el gato está sobre la alfombra, que es exactamente lo que niega la segunda parte de (13).

Este aspecto de la cooperación también involucra al segundo aspecto de las disyunciones que no depende de las condiciones de verdad: el hecho de que siempre debe haber alguna conexión entre los dos disyuntivos de una disyunción. Como hemos observado, usar una disyunción correctamente no implica tener creencias positivas acerca de la verdad de ninguno de los disyuntivos tomados en forma independiente. Por otro lado, el hablante debe creer que la disyunción como totalidad es verdadera. ¿Pero cómo puede un hablante creer en la verdad de una disyunción sin creer en ninguno de los disyuntivos? Esto sólo es posible si el hablante considera que hay alguna relación entre los dos. En ausencia de creencias específicas acerca de los dos disyuntivos por separado, debe sin embargo creer que ambos están relacionados en la medida en que, sean cuales fueren los hechos, uno u otro siempre será el caso. Por tanto, el uso correcto de una disyunción implica la creencia de que hay alguna conexión entre los disyuntivos. De esta forma constatamos que estos dos aspectos del significado de la disyunción que no dependen de las condiciones de verdad pueden explicarse en términos de sus condiciones de uso apropiado.

Ahora también podemos explicar por qué la conexión es mucho menos importante en las conjunciones. Los aspectos de la cooperación ya considerados en relación con las disyunciones nos permiten decir que para expresar una conjunción correctamente un hablante sólo debe estar convencido de que ambos conjuntivos son verdaderos. Nada le impide sostener creencias acerca de la verdad de dos asuntos completamente independientes. Por ende, no se sigue que deba tener ninguna opinión particular acerca de la relación entre los dos. Se requiere algo más. Por ejemplo, deberá comprometerse con que todo lo que se dice debe ser relevante respecto del tema de la conversación en la que está participando. Para una conjunción, esto significa que ambos conjuntivos deben ser relevantes respecto del tema de la conversación. De manera que la única conexión requerida entre los dos conjuntivos es que ambos traten el mismo tema. Ésta es una conexión mucho más débil que la que deben tener los disyuntivos.

Concluimos esta sección observando que la semántica de la disyunción proporcionada por la lógica proposicional clásica no está ausente. Proporciona una explicación adecuada de todos los aspectos veritativo-funcionales de la disyunción. Los otros aspectos de su significado pueden explicarse en términos de sus condiciones de uso apropiado.

6.6 Máximas conversacionales e implicaturas conversacionales

En la teoría de Grice, los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad son analizados con la ayuda de las implicaturas conversacionales. En esta sección, examinaremos la teoría de Grice más detalladamente. Si se precisan más las máximas conversacionales, obtendremos una noción de implicatura conversacional que podremos aplicar en §6.7 cuando volvamos sobre el fenómeno que acabamos de discutir en relación con la disyunción.

En §6.3 dijimos que el principio de cooperación en la conversación está en el núcleo de la teoría de Grice y que en este principio general pueden distinguirse algunas reglas más específicas. Estas son las máximas conversacionales. En las secciones precedentes hemos discutido implícitamente algunas de las máximas. La máxima que desempeña un papel importante en la disyunción es denominada máxima de *Cantidad*, así llamada para recordarnos que se refiere a la cantidad de información proporcionada. La máxima puede subdividirse en dos submáximas:

Máxima de Cantidad:

(i) Haga que su contribución a la conversación sea tan informativa como se requiera.

(ii) No haga que su contribución sea más informativa que lo necesario.

La segunda y fundamental máxima es la máxima de *Calidad*:

Máxima de Calidad:

(i) No diga lo que crea falso.

(ii) No diga aquello respecto de lo cual carezca de evidencia adecuada.

La tercera es la máxima de *Relación*:

Máxima de Relación:

Sea relevante.

La cuarta y última máxima dada por Grice es la máxima de *Forma*:

Máxima de Forma:

(i) Evite ser oscuro en la expresión.

(ii) Evite ser ambiguo.

(iii) Sea breve.

(iv) Sea ordenado.

No todas las máximas son igualmente importantes; además Grice no intenta que las cuatro que proporciona sean exhaustivas. Sin duda, podrían formularse otras (sub)máximas. Y, tal vez, las (sub)máximas dadas se solapen en alguna medida. Además, han sido formuladas informalmente, de manera que muchos de los conceptos que aparecen en las mismas deberían ampliarse. Esperamos aclarar dichos conceptos en alguna medida en la siguiente reformulación parcial de las máximas. Deberá recordarse que ésta no es la única reformulación posible y que omite ciertos aspectos del uso. Tampoco la proponemos a manera de una elección razonada entre diferentes interpretaciones de las máximas de Grice; sólo queremos mostrar cómo toda clase de fenómeno pragmático puede ser explicado una vez que se explicitan más las máximas.

Reformularemos las máximas de Grice como condiciones de corrección para la formulación de afirmaciones. Por ello, se han restringido explícitamente las máximas a un tipo particular de acto del habla: formular una afirmación. Podrían darse condiciones para otros actos del habla: preguntar, dar una orden, realizar una promesa, etc. Por razones de espacio omitiremos la Máxima de Forma. De esta forma llegamos a las siguientes condiciones de corrección para la formulación de afirmaciones:

(14) Un hablante H hace uso correcto de una oración *A* para realizar una afirmación ante el oyente O en caso que:

(i) H cree que *A* es verdadera;

(ii) H cree que O no cree que *A* es verdadera;

(iii) H cree que *A* es relevante respecto del tema de conversación;

(iv) Para toda oración *B* de la cual *A* es una consecuencia lógica (y que no es equivalente a A) no se cumplen todas las condiciones (i)-(iii).

La cláusula *X no cree que A* aquí se emplea consistentemente en el sentido de *No es el caso que X cree A*, que es más débil que *X cree que no-A*. La condición (i) corresponde a la Máxima de Calidad. El concepto de creencia que aparece aquí es el de *creencia estricta*. El hablante no sólo debe pensar que es más probable que A se cumpla a que A no se cumpla, sino que también debe estar totalmente convencido de que A es ciertamente verdadera. Al igual que las otras condiciones, (i) es subjetiva en el sentido que sólo el hablante está sujeto a condiciones. No es necesario que la oración A sea verdadera para que H la afirme correctamente; sólo es necesario que H así lo crea. Esto se corresponde con el hecho de que corrección y verdad son independientes.

La condición (ii) corresponde a la segunda submáxima de la Máxima de Cantidad. Un hablante que proporciona al oyente información que cree que el oyente ya posee está proporcionando más información de la que se necesita. Nótese que la condición (ii) admite que A proporcione no solamente información nueva sino también acerca de cosas que el oyente ya cree. Si O cree que *B* pero no cree que *A*, entonces O tampoco creerá que *A y B*. La conjunción *A y B* contiene cierta información que es nueva para O y cierta información que no lo es. Si el hablante H tiene conocimiento de estos hechos, entonces puede afirmar *A y B* en concordancia con la condición (ii).

La condición (iii) corresponde a la Máxima de Relación. Si bien no analizaremos aquí la noción de relevancia, hacemos explícito que lo que cuenta como relevante depende del tema de conversación. Una forma sencilla de explicar la relevancia consiste en considerar al tema de conversación bajo la forma de una pregunta. Las oraciones relevantes serán entonces aquellas que intuitivamente pueden considerarse como respuestas (parciales) a la pregunta.

Finalmente, la condición (iv) corresponde a la primera submáxima de la Máxima de Cantidad. Esta es la máxima que es tan importante en las disyunciones. La condición establece que un hablante está siendo tan informativo como debería serlo si realiza la afirmación correcta más fuerte que puede realizar. Aquí entendemos a la noción de 'fuerza' de una afirmación en un sentido lógico: una oración *B* es más fuerte que una oración *A* si *A* es consecuencia lógica de *B*, mientras que *B* no es consecuencia lógica de *A*. Si un hablante puede, de acuerdo con las condiciones (i)-(iii), afirmar una oración *B* que es más fuerte que *A*, entonces la condición (iv) le prohíbe afirmar *A*. Esto no significa que haya una única oración que sea la más fuerte que él pueda afirmar. Habrá oraciones lógicamente equivalentes diferentes para que él elija entre ellas. Tal vez encuentre que la Máxima de Forma le resulta útil para realizar su elección.

Sin lugar a dudas, esta condición, al igual que las otras, es demasiado estricta y demasiado permisiva. La condición (iv), por ejemplo, nos prohíbe emplear ciertas formas para difundir la información que queremos brindar; lo cual, por otra parte, podría ser conducente respecto de la claridad. Más aún, como lo señaláramos, la condición (ii) permite que el hablante diga al oyente cosas que ya ha oído y creído. Combinada con la condición (iv) obliga al hablante a presentar toda su información anterior nuevamente. Seguramente esto está yendo demasiado lejos. Nótese que, en vista de la condición (iii), toda la información anterior debe ser relevante respecto del tema de la discusión. Si, como lo sugerimos anteriormente, el tema es considerado como una pregunta, realizar una afirmación relevante equivale a dar una respuesta tan completa como sea posible a la pregunta, incluso si ya se ha dado por sentada parte de la respuesta. Ciertamente, es posible perfeccionar las condiciones aquí dadas y adaptarlas mejor a lo que sucede en las conversaciones, pero esto nos llevaría más allá de los propósitos de este libro. Nuestro propósito aquí es meramente el de mostrar de qué forma pueden usarse condiciones como éstas para explicar en términos de implicaturas conversacionales aspectos del significado que no dependen de las condiciones de la verdad.

Las implicaturas conversacionales pueden definirse de la siguiente manera:

(15) Una oración *B* es una implicatura conversacional de una oración *A* sii *B* es una consecuencia lógica de las condiciones de uso correcto de *A*.

Adviértase que, a pesar de que es característico de las implicaturas conversacionales de una oración el que no sean consecuencias lógicas de dicha oración, (15) puede continuar definiéndolas en términos de consecuencias lógicas. Las implicaturas conversacionales no se siguen de la oración misma, sino del supuesto de que la oración está siendo usada correctamente. De esta forma observamos que esta noción central de la pragmática, con la cual se pretenden explicar aspectos del significado que no pueden ser tratados satisfactoriamente en una teoría lógico-semántica, emplea, sin embargo, en forma esencial la noción de consecuencia lógica.

6.7 Las implicaturas conversacionales de las disyunciones

En esta sección demostraremos de qué forma los aspectos del significado de la disyunción que no dependen de las condiciones de verdad y que fueron discutidos en §6.5, pueden ser explicados en tanto implicaturas conversacionales de las disyunciones. Demostraremos que las oraciones (17)-(29) son, todas ellas, implicaturas conversacionales de (16):

(16) *A o B*.

(17) H no cree que *A*.

(18) H no cree que *B*.

(19) H no cree que *no-A*.

(20) H no cree que *no-B*.

De acuerdo con (15), esto se logra mostrando que (17)-(20) son consecuencias lógicas de (21):

(21) H usa correctamente *A o B* al hacer una afirmación a O.

Y puede hacerse como sigue. Las oraciones (22)-(24) se siguen de (21) dadas las condiciones (i)-(iii) de la definición (14), la definición de corrección:

(22) H cree que *A o B* es verdadera.

(23) H cree que O no cree que *A o B* es verdadera.

(24) H cree que *A o B* es relevante respecto del tema de conversación.

Además, *A o B* es consecuencia lógica de *A* sin ser equivalente a *A*. Aquí suponemos que ni *A* ni *B* son consecuencia lógica la una de la otra (una disyunción en la que no se cumpliera esto quedaría excluida por la Máxima de Forma, en particular su submáxima: Sea breve). Por ende, de acuerdo con la condición (iv) de (14), podemos concluir que (25) se sigue de (21):

(25) O bien H no cree que *A* es verdadera, o H no cree que O no cree que *A*

es verdadera, o H no cree que *A* es relevante respecto del tema de conversación.

Sólo en circunstancias muy especiales sucede que una disyunción es relevante mientras que uno de sus disyuntivos no lo es. Agreguemos ahora la premisa extra que H cree que tanto *A* como *B* son relevantes respecto del tema de conversación si él cree que la oración *A o B* es relevante. Luego, (26) se sigue de (24):

(26) H cree que *A* es relevante respecto del tema de conversación.

Además, (27) se sigue de (23):

(27) H cree que O no cree que *A* es verdadera.

Caso contrario, si O creyera que *A* es verdadera, entonces O también creería que *A o B* es verdadera, dado que es una consecuencia lógica de *A*. Ahora bien, (26) y (27) niegan dos de los tres disyuntivos de (25), así que podemos inferir el tercer disyuntivo ((17) H no cree que *A* es verdadera.), como conclusión. De manera que ahora hemos derivado la primera de las cuatro implicaturas de (16) a partir del supuesto (21), el supuesto según el cual (16) está siendo usada correctamente.
La oración (18) puede ser derivada como una implicatura conversacional de (16) exactamente de la misma manera. Pero necesitaremos algo más para poder derivar (19) y (20). Por ejemplo, considérese (20). Hemos demostrado que (17) se sigue de (21)y que (22) también. La oración (20) se sigue de (17) junto con (22): Un H racional que cree que *A o B* es verdadera y que no cree que *A* es verdadera no creerá que *no-B* es verdadera, dado que si lo hiciera tendría que creer *A* para poder creer que *A o B*. Y la oración (19) puede ser derivada de (18) y (20) exactamente de la misma manera. De manera que ahora hemos demostrado que (17)-(20) son implicaturas conversacionales de la disyunción (16).

Aquí deberíamos hacer un comentario sobre la relevancia. Al defender el supuesto en el que se basa la derivación de (26) afirmamos que sólo en circunstancias muy especiales una disyunción será relevante cuando ninguno de sus disyuntivos sea relevante. La siguiente pregunta que figura en un formulario para el pago de impuestos es un ejemplo de tales circunstancias especiales:

(28) ¿Es usted viuda o divorciada? Sí/No; sírvase tachar lo que no corresponda.

Ahora bien, si quien está completando el formulario es viuda, tachará la palabra *no* (si está siendo veraz). Esto equivale a que afirma (29); pero (30) también hubiera sido una buena respuesta:

(29) Soy viuda o divorciada.

(30) Soy viuda.

Pero como la pregunta está en un formulario para el pago de impuestos, la respuesta (más informativa) (30) no es relevante. Lo único que el inspector de impuestos quiere saber es si ella pertenece a alguna de las dos categorías porque, por ejemplo, esto es lo que determina cuán pesadamente será gravada. No importa a cuál de las dos categorías pertenezca. En esas circunstancias, del hecho de que (29) es correcta no podemos concluir que la mujer que completa el formulario no cree que ella es viuda. Podemos inferir sólo la conclusión más débil de que o bien ella no cree que es viuda, o ella no cree que la información sea relevante. De manera que el supuesto en el que se basa (26) desempeña un papel esencial. Por ende, hablando en sentido estricto, (17)-(20) son implicaturas conversacionales sólo bajo este supuesto.

Las mismas clases de fenómenos que hemos visto en relación con las disyunciones se presentan con otras construcciones. Por ejemplo, considérense las siguientes oraciones:

(31) a Todas las galletitas del jarro son sabrosas.

b Quedan algunas galletitas.

(32) a Algunos estudiantes aprobaron.

b Algunos estudiantes desaprobaron.

Ninguna de las oraciones (b) es consecuencia lógica de la correspondiente oración (a). Pero las oraciones (a) llevan implícita la sugestión fuerte de que las oraciones (b) son verdaderas. Esto puede explicarse mostrando que (33) y (34) son implicaturas conversacionales de (31a) y (32a):

(33) H no cree que se acabaron las galletitas.

(34) H no cree que todos los alumnos aprobaron.

Las derivaciones de estas implicaturas son similares a las de las implicaturas que acabamos de discutir en relación con las disyunciones.

6.8 Implicación e informatividad

La cuestión acerca de la relación entre las conectivas de la lógica proposicional y las conjunciones del lenguaje natural se vuelve más apremiante en el caso de la implicación material. Toda introducción a la lógica señala la falta de analogías entre la implicación material → y la construcción usual del lenguaje natural *si* (... *entonces*). En §2.2 también mencionamos algunas de las dificultades que conlleva el tratar *si* (... *entonces*) como función veritativa. Defendimos la tabla de verdad dada para → diciendo que, si debemos tratar a *si* (... *entonces*) como una conjunción veritativo-funcional entonces ésa es la única tabla de verdad aceptable.

En §6.5 vimos que se pueden eliminar dudas similares respecto de la analogía entre la palabra *o* en lenguaje natural y la conectiva ∨ tratándola no sólo en términos de valores de verdad sino también en términos de condiciones de uso apropiado. En esta sección veremos que el mismo enfoque es bastante exitoso en el caso de la implicación. Es bastante exitoso, pero no completamente exitoso. Como veremos, este enfoque nos sigue dejando la impresión de que no da cuenta de algunos aspectos esenciales del significado de la implicación. La combinación de una explicación pragmática y un análisis semántico tomado de la lógica proposicional no es completamente satisfactoria. Evidentemente hay muchos más aspectos semánticos de la implicación que los explicados por la lógica proposicional.

Debe hacerse notar que la lógica modal se ha desarrollado en gran medida como respuesta a las deficiencias de la implicación material (véase vol. 2). La lógica modal puede ser considerada como un intento por definir una forma más fuerte de implicación no veritativo-funcional. Pero la implicación estricta de la lógica modal tiene sus propias deficiencias. Continuamente se está tratando de desarrollar una semántica de la implicación más rica que haga justicia a nuestras intuiciones semánticas. Estos análisis siempre arrojan alguna luz sobre uno u otro aspecto en particular de la implicación, pero hasta ahora ninguno ha sido aceptado como última palabra. Quizá esto sea pedir mucho y deberíamos arreglárnoslas con una amplia gama de análisis diferentes, cada uno especializado en su propio aspecto de la implicación.

Somos conscientes de que la combinación de un análisis semántico de la implicación en términos de implicación material y un análisis pragmático en términos de condiciones de uso correcto no alcanza a dar cuenta en forma completa del significado de la implicación. No obstante, discutiremos ese enfoque, no sólo porque creemos que las condiciones de uso correcto desempeñan un papel importante en la implicación, sino también para ilustrar algunas de las deficiencias del enfoque semántico de la implicación en lógica proposicional. Dos deficiencias obvias del tratamiento de *si* (... *entonces*) como una implicación material coinciden con las que discutimos en §6.5 en relación con las disyunciones. Las condiciones de verdad de una implicación material no requieren de ninguna vinculación entre el antecedente y el consecuente de una implicación, ni reconocen en forma alguna que afirmamos una implicación sólo si no sabemos si su antecedente y su consecuente son verdaderos o falsos.

Esto último no se aplica a todas las oraciones condicionales, pero sí se aplica al arquetipo de oración condicional, la *oración condicional indicativa*. En (35) consignamos un ejemplo:

(35) Si el bacalao es un pez, entonces tiene branquias.

Viniendo de un pescador, de quien podemos suponer que sabe que el bacalao es ciertamente un pez, la oración (35) sería un poco extraña. Sería más plausible que un pescador dijera algo como (36) o una sucesión de oraciones tales como las consignadas en (37):

(36) Dado que el bacalao es un pez, luego, tiene branquias.

(37) Todos los peces tienen branquias. El bacalao es un pez. Por consiguiente el bacalao tiene branquias.

Y alguien que sepa mucho acerca de las ranas no dirá (38) (aun si, además, es un lógico-pescador que sabe que (38) es verdadera). Es más verosímil que diga algo como (39), o quizás (40):

(38) Si las ranas son peces, entonces tienen branquias.

(39) Las ranas no tienen branquias, por ende no son peces (dado que todos los peces tienen branquias).

(40) Si las ranas fueran peces, tendrían branquias.

La oración (40) no es una oración condicional indicativa normal, es una *oración condicional contrafáctica*.

Un último ejemplo: en circunstancias normales un hablante versado en biología no expresaría una oración verdadera como (41). Preferiría una oración como (42):

(41) Si los axolotes son peces, entonces tienen branquias.

(42) A pesar de que los axolotes no son peces, tienen branquias.

Estos ejemplos muestran que el uso correcto de los condicionales indicativos implica que el hablante no sepa si el antecedente y el consecuente son verdaderos o no. Porque, si lo supiera, entonces el lenguaje natural le proporciona otros recursos para comunicar su conocimiento acerca de ellos con mayor efectividad.
Estas condiciones de uso correcto son bastante análogas a aquellas que dimos para las disyunciones. Nuestra defensa de ellas también será análoga. (Las analogías no deben sorprendernos, si recordamos que $\phi \rightarrow \psi$ y $\neg\phi \vee \psi$ son lógicamente equivalentes en lógica proposicional.) Por ello, será suficiente con dar la forma general de la defensa, sin entrar en los detalles.

La oración (35) tiene la forma $p \rightarrow q$. El consecuente q (*El bacalao tiene branquias*) es una proposición más fuerte que la implicación $p \rightarrow q$ completa, la cual es una consecuencia lógica de q. De manera que, siendo todo lo demás igual, la Máxima de Cantidad requiere que el hablante afirme la más fuerte q si puede hacerlo correctamente. Así, del hecho de que $p \rightarrow q$ está siendo usada correctamente, podemos concluir que el hablante no cree que el consecuente q es verdadero.

La oración (41) tiene la misma forma. Una vez más, la negación del antecedente, $\neg p$ (*Los axolotes no son peces*), es una proposición más fuerte que la implicación $p \rightarrow q$ en su totalidad y nuevamente la Máxima de Cantidad requiere que el hablante afirme $\neg p$ si puede hacerlo correctamente, siendo todo lo demás igual. Así, del hecho de que $p \rightarrow q$ está siendo usada correctamente podemos concluir que el hablante no cree que la negación de su antecedente sea verdadera.

Que el hablante puede no creer que el antecedente sea verdadero también se sigue de la combinación de las máximas de calidad y cantidad. Porque si cree en el antecedente, entonces, dado que de acuerdo con la máxima de calidad verdaderamente creería en la implicación en su totalidad, también deberá creer en el consecuente. Pero, como hemos visto, esto queda excluido por la máxima de cantidad. Un argumento similar se aplica a la negación del consecuente. Un hablante que cree que la negación del consecuente es verdadera, también deberá creer que la negación del antecedente es verdadera, dado que de acuerdo con la máxima de calidad ciertamente debería creer que la implicación en su totalidad es verdadera. Pero acabamos de ver que esto queda excluido por la máxima de cantidad.

El que deba haber alguna vinculación entre el antecedente y el consecuente de una implicación puede explicarse de la misma forma que el hecho de que los disyuntivos de una disyunción deben estar vinculados. Si no tenemos bases para creer en la verdad o falsedad ni de un antecedente ni de su consecuente, entonces toda creencia en la verdad de una implicación debe proceder de las creencias acerca de una vinculación entre los hechos descriptos por los dos. Nuestra creencia que $p \rightarrow q$ es verdadera debe proceder de la convicción de que una situación en la cual p es verdadera y q es falsa no puede producirse.

De esta misma forma pueden explicarse una cantidad importante de aspectos del significado de la implicación. Pero, como lo mencionáramos al principio, no pueden explicarse otros fenómenos. Un ejemplo se refiere a la negación de una oración condicional:

(43) No es cierto que si los axolotes tienen branquias, entonces son peces.

Supóngase que estamos en medio de una discusión acerca de si los axolotes son peces. Y supóngase que alguien afirma que si las investigaciones mostraran que los axolotes tienen branquias, entonces esto significaría que son peces, dado que sólo los peces tienen branquias. Luego, (43) puede emplearse apropiadamente para negar esto: con (43) queremos significar que tener branquias no implica necesariamente ser un pez. Luego, queremos negar que hay una vinculación entre tener branquias y ser un pez, pero no queremos responder la cuestión acerca de si los axolotes tienen o no branquias, o la cuestión original acerca de si los axolotes son peces. Evidentemente el uso correcto de las negaciones de los condicionales al igual que el de los condicionales mismos implica no saber si el antecedente y el consecuente son o no verdaderos. Pero la semántica proposicional de la negación y de la implicación material nos obliga a tratar la afirmación de la negación de un condicional como la afirmación de su antecedente junto con la afirmación de la negación de su consecuente. Todavía no se ha demostrado que es posible acomodar este hecho con los aspectos no veritativo-funcionales del significado de las implicaciones discutidas hasta ahora.

6.9 Presuposiciones e implicaturas conversacionales

Ahora podemos retomar el problema que dejamos sin resolver en el capítulo 5. En §5.5.6 mencionamos los límites de los sistemas lógicos multivalentes para dar cuenta de las presuposiciones. Podemos ilustrar el problema mediante las siguientes oraciones:

(44) Si hay un rey de Francia, entonces es calvo.

(45) Si la calvicie es hereditaria, entonces el rey de Francia es calvo.

(46) Hay un rey de Francia.

(47) El rey de Francia es calvo.

(48) La calvicie es hereditaria.

Intuitivamente la oración (46) no es una presuposición de (44), pero es una presuposición de (47), el consecuente de la implicación (44). En el enfoque semántico multivalente de la presuposición, este hecho se explicaba como sigue. Si no hay rey de Francia, las condiciones de verdad de la oración (47) son tales que no es ni verdadera ni falsa, sino que tiene un tercer valor. Si una presuposición de una oración no es verdadera, entonces esa oración no es ni verdadera ni falsa. Que (46) no es una presuposición de (44) se justifica eligiendo una tabla de verdad para la implicación que otorgue el valor 1 a una implicación si le otorga 0 a su antecedente. Bajo esta interpretación multivalente de la implicación, la oración (44) es verdadera si Francia no tiene un rey. De manera que la falsedad de (46) no da como resultado ni que (44) es verdadera ni que es falsa: (46) no es una presuposición semántica de (44).

Hasta ahora todo va bien. Un enfoque semántico multivalente parecería dar como resultado una noción factible de presuposición. El problema surge con oraciones como (45). Intuitivamente (46) parece ser una presuposición de (45). Y esto no queda explicado por la noción semántica multivalente de presuposición. Si (48) es falsa, entonces (45) debe ser verdadera, inclusive si (46) es falsa. De manera que si (46) no es verdadera no significa necesariamente que (45) no es verdadera ni falsa: según parece (46) no es una presuposición semántica de (45).

Sin embargo, hay ciertas diferencias significativas entre (44) y (45). El antecedente de (44) es una presuposición de su consecuente. Pero el antecedente de (45) es lógicamente independiente de la presuposición (46) de su consecuente. Tanto la verdad como la falsedad de (46) pueden conciliarse con la verdad y falsedad de (48). Este punto puede ayudarnos a encontrar un fundamento pragmático para la vinculación entre (46) y (45), sin que haya la misma vinculación entre (46) y (44). De manera que aunque (46) no es una presuposición semántica de (45), podemos mostrar que el hablante que respete las máximas conversacionales debe creer (46) para expresar (45). Sin embargo, esto no se aplica a (44). El hablante puede decir (44) ajustándose a las condiciones de uso correcto sin tener que creer (46).

Al igual que en §6.8, sólo daremos un bosquejo de la prueba. Debemos mostrar que del supuesto según el cual un hablante H afirma (45) correctamente se sigue como consecuencia lógica que H cree que (46) es verdadera y que no se sigue como consecuencia lógica del supuesto que H afirma (44) correctamente. Supóngase ahora que no es el caso de que H cree que (46) es verdadera. Luego, o bien H cree que (46) no es verdadera, o bien H sencillamente no tiene ninguna creencia acerca del valor de verdad de (46). En lo que concierne a la primera de estas dos alternativas: si H cree que (46) no es verdadera, entonces H cree que (47) tiene el tercer valor. Por ende, de acuerdo con la tabla de verdad multivalente de la implicación, H sólo puede creer que (45) es verdadera si H cree al mismo tiempo que (48) es falsa. Pero como vimos en §6.8, la creencia en la falsedad del antecedente de una implicación es incompatible con el uso correcto. De manera que la primera alternativa es incompatible con el supuesto de que H expresa (45) correctamente. En lo que respecta a la segunda alternativa: si H no tiene ninguna creencia acerca del valor de verdad de (46), entonces H está dispuesto a considerar la posibilidad de que (47) tenga el tercer valor. Pero esto es compatible con la creencia de H en (45) sólo si H cree que la falsedad de (48) es una consecuencia lógica de la falsedad de (46) (como resultado de lo cual (47) obtiene el tercer valor). Pero esto contradice la independencia lógica de (48) y (46). De manera que la segunda alternativa también es incompatible con el supuesto de que H afirma (45) correctamente. Por ende, el supuesto original, que no es el caso de que H cree que (46) es verdadera, debe ser incorrecto. Ahora hemos mostrado que del supuesto según el cual el hablante H usa (45) correctamente se sigue como consecuencia lógica que H cree que (46) es verdadera.

Esta cadena de razonamiento no puede repetirse para (44). No se puede porque en este caso hay ciertamente una vinculación entre el antecedente y la presuposición del consecuente: son idénticos.

Concluimos que trabajando en una lógica multivalente se puede establecer una vinculación pragmática entre (45) y (46), mostrando que (49) es una implicatura pragmática de (45):

(49) H cree que hay un rey de Francia.

La diferencia entre (44) y (45) se debe al hecho de que (49) no es una implicatura pragmática de (44). Tales resultados pueden considerarse como un primer paso hacia una teoría integrada de la presuposición semántica y pragmática.

6.10 Implicaturas convencionales, presuposiciones e implicaciones

Hemos visto que una cantidad importante de aspectos del significado que no son veritativo-funcionales pueden explicarse en términos de implicaturas conversacionales. A pesar de que las implicaturas conversacionales siempre dependen, entre otras cosas, del significado convencional, no forman parte ellas mismas del significado convencional. Por ejemplo, las implicaturas conversacionales de las secciones precedentes no se siguen exclusivamente en base al significado convencional. El principio de cooperación en la conversación desempeña un papel esencial en la derivación de las mismas.

Esta naturaleza no convencional de las implicaturas conversacionales tiene que ver con una de sus propiedades características, a saber, que no son inseparables de las oraciones a las que pertenecen sino que pueden ser *canceladas* explícita o implícitamente por el contexto. La oración (50) ((3) de §6.2) es un ejemplo claro de una oración en la cual se cancela explícitamente una implicatura conversacional:

(50) Ana se quitó las medias y se metió en la cama, pero no sé cuál de las cosas hizo primero.

No todos los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad se derivan de esta forma indirecta del principio de cooperación. Hay otros aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad y que son inseparables de ciertas clases de expresiones y construcciones. Por consiguientey a diferencia de las implicaturas conversacionales, éstos pertenecen al ámbito del significado convencional. Pero, al igual que las implicaturas conversacionales, originan implicaciones no-lógicas. Estas implicaturas se basan exclusivamente en el significado convencional de las expresiones y, por ende, se les denomina *implicaturas convencionales*. A diferencia de las implicaturas conversacionales, las implicaturas convencionales no pueden cancelarse.

Un ejemplo estándar de una implicatura convencional surge de la diferencia entre *y* y *pero*. Las dos palabras tienen significado diferente, pero la diferencia no se refleja en las tablas de verdad (idénticas) de las oraciones *A y B* y *A pero B*. De manera que la diferencia en el significado de las mismas no es un aspecto veritativo-funcional del significado. Es objetiva en el sentido de que cada persona competente en el uso del español emplea esas palabras de la misma forma. El aspecto del significado en el que *y* y *pero* difieren puede formularse de manera general como sigue: debe haber alguna clase de oposición entre las proposiciones conjugadas por medio de *pero*. O más precisamente: un hablante debe en todo caso *creer* que hay una oposición tal para poder afirmar correctamente una oración de la forma *A pero B*. En lo que respecta al valor de verdad de *A pero B* no interesa si existe de hecho una vinculación tal. De manera que aquí tenemos un aspecto del significado convencional que no depende de las condiciones de verdad. La implicatura correspondiente, que el hablante cree que hay una oposición entre los dos conjuntivos conjugados por *pero*, es una implicatura convencional.

Las expresiones como *sin embargo*, *también* y *aun* que figuran en las oraciones (51)-(53) son otros ejemplos que parecen no afectar las condiciones de verdad en forma alguna, pero que producen implicaturas convencionales:

(51) Sin embargo Juan aprobó.

(52) Juan aprobó también.

(53) Aun Juan aprobó.

Las condiciones de verdad de cada una de estas oraciones parecerían ser las mismas que las de (54):

(54) Juan aprobó.

La expresión *sin embargo* en (51) lleva implícita la sugerencia de que no se esperaba que Juan aprobara, pero esto no entra en las condiciones de verdad de (51); se trata más bien de algo que uno debe creer para afirmar correctamente (51). Pero es un aspecto que pertenece al significado convencional, de manera que se trata de una implicatura convencional. Lo que hace tan peculiar a (55) es que dicha implicatura convencional no puede cancelarse:

(55) Sin embargo Juan aprobó, pero eso era lo que se esperaba.

Las implicaturas convencionales, a diferencia de las implicaturas conversacionales, no pueden cancelarse mediante una negación explícita de las mismas. (52) lleva implícita la implicatura de que además de Juan hay alguien más que aprobó. Y la implicatura implícita en *aun* es semejante a la conjunción de las implicaturas de *sin embargo* y *también*.

Si consideramos las negaciones de las oraciones (51)-(53) quedará más claro que aquí estamos tratando con aspectos del significado convencionales no veritativo-funcionales:

(56) No es el caso que sin embargo Juan aprobó.

(57) No es el caso que Juan aprobó también.

(58) No es el caso que aun Juan aprobó.

Suponiendo que estas oraciones fueran pronunciadas con entonación normal, sin ningún énfasis en especial en *sin embargo*, *todavía* o *aun*, entonces estas oraciones sólo niegan que Juan haya aprobado. Tienen las mismas implicaturas que (51)-(53). Esto resalta el hecho de que nuevamente no estamos tratando con consecuencias lógicas sino con implicaturas, porque lo que se sigue de (51) y su negación en (56) es una oración contingente: No se esperaba que Juan aprobara. Pero de una oración y su negación sólo se siguen tautologías en tanto que consecuencias lógicas, de manera que evidentemente esta oración no se sigue en tanto que consecuencia lógica sino como algo diferente: una implicatura. La implicatura convencional según la cual no se esperaba que Juan aprobara no puede cancelarse en (51); esto era bastante evidente a partir de la oración (55). Pero (56), la negación de (51), es un poco más complicada. Cuando se la pronuncia con énfasis en el *sin embargo*, (59) es una afirmación perfectamente aceptable:

(59) No es el caso de que Juan *sin embargo* aprobó; lo único que se debia esperar era que aprobara.

Si (59) se pronuncia de esta forma, entonces a diferencia de (56) no niega que Juan aprobara. Lo que se niega es la implicatura generada implícitamente por el *sin embargo*. Una cosa que ciertamente desempeña un papel en esto y en la que valdrá la pena que ahondemos, es la forma en que funciona la negación. Por ejemplo, la negación parece funcionar en forma diferente en (59) y (56) (compárese ésto con la discusión de (43), al final de §6.8, y con los comentarios sobre la negación, en §5.5.6).

Algo que tienen en común las implicaturas convencionales y las consecuencias lógicas es que son difíciles de cancelar. Si tratamos de cancelar una consecuencia lógica, entonces obtendremos como resultado una contradicción:

(60) Juan viene y María viene, pero Juan no viene.

Obviamente, las consecuencias lógicas no se preservan bajo la negación. No hay nada incorrecto en (61):

(61) No es cierto que Juan viene y María viene, dado que Juan no viene.

Las implicaturas convencionales y las consecuencias lógicas dependen ambas de aspectos convencionales del significado; en el caso de las implicaturas, estos aspectos no dependen de las condiciones de verdad y en el caso de las consecuencias lógicas sí lo hacen.

Las implicaturas convencionales y las presuposiciones también tienen ciertas características en común, por ejemplo, el hecho de que ambas son convencionales. En su artículo "Conventional Implicatures" (1979), Karttunen y Peters argumentan que muchas de las habitualmente consideradas como presuposiciones pueden ser consideradas en forma más provechosa como implicaturas convencionales. También muestran la forma en que el análisis de las implicaturas convencionales puede incorporarse en el marco de la gramática de Montague (véase vol. 2). Para una oración derivada del lenguaje natural, una gramática de Montague proporciona una contrapartida formal bajo la forma de una fórmula lógica que representa sus condiciones de verdad. Karttunen y Peters sugieren que se asocie no una sino dos fórmulas con cada oración: la primera para representar sus condiciones de verdad y la segunda para representar sus implicaturas convencionales. Esta forma representacional compuesta haría justicia no sólo a los aspectos del significado que dependen de las condiciones de verdad sino también a los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad. Proporcionaremos un ejemplo. La oración (62) tiene las mismas condiciones de verdad que la oración (63), pero también tiene a (64) como una implicatura convencional:

(62) Juan también viene.

(63) Juan viene.

(64) Viene alguien además de Juan.

Siguiendo a Karttunen y Peters, el siguiente par ordenado de fórmulas podría asociarse con (62):

(65) $\langle Vj, \exists x(x \neq j \wedge Vx)\rangle$

Cada una de las fórmulas de este par puede ser o bien verdadera o bien falsa. De manera que hay cuatro combinaciones posibles de valores de verdad, las cuales pueden representarse como sigue:

(66) $\langle 1,1\rangle$ Juan viene y también viene alguna otra persona.

$\langle 1,0\rangle$ Juan es el único que viene.

$\langle 0,0\rangle$ Nadie viene.

$\langle 0,1\rangle$ Juan no viene, pero viene alguna otra persona.

Cada una de estas cuatro posibilidades puede considerarse como un valor (compuesto) que puede tomar la oración en cuestión. Así, esta forma de representación equivale a un sistema local tetravalente. El sistema es el que abordamos en §§5.5.4 y 5.5.5, en donde también mostramos que dicho sistema tetravalente arroja las mismas predicciones acerca de las implicaturas y acerca de las presuposiciones de oraciones compuestas que las que arroja el sistema Kleene trivalente. De manera que a este respecto no se plantea ninguna distinción entre las implicaturas convencionales y las presuposiciones. La diferencia entre emplear un sistema tetravalente o un sistema trivalente reside en lo que sucede cuando la implicatura o la presuposición es falsa. En el primer caso, puede seguir diciéndose que la oración en cuestión es verdadera o falsa, mientras que en el segundo debe decirse que no es ni verdadera ni falsa. Así, el que algún aspecto particular del significado de una oración deba ser tratado como una implicatura convencional o como una presuposición depende de si pensamos que la oración tiene un valor de verdad cuando la implicatura o la presuposición es falsa. Parece poco verosímil que tales cosas puedan decidirse exclusivamente sobre la base de nuestras intuiciones acerca del lenguaje. De manera que será difícil encontrar argumentos empíricos para clasificar algo como implicatura convencional o como presuposición. Pero, como acabamos de ver, desde un punto de vista teórico no interesa si las implicaturas convencionales son tratadas con un sistema Kleene tetravalente y las presuposiciones son tratadas con un sistema Kleene trivalente. De manera que el valor del artículo de Karttunen y Peters no reside en que distingue las implicaturas convencionales de las presuposiciones, sino en que presenta un método que muestra cómo tratar los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad de la misma manera formal recursiva que los aspectos que dependen de las condiciones de verdad.

De manera que no es fácil trazar una linea divisoria entre implicaturas convencionales y presuposiciones. Y dado que anteriormente dijimos que las últimas dependen de las condiciones de verdad y las primeras no, se sigue que el límite entre la semántica y la pragmática no es tan claro como lo hubiéramos esperado.

Las implicaturas convencionales, las presuposiciones y las consecuencias lógicas son todas esencialmente convencionales. Y no sólo las dos primeras son difíciles de distinguir entre sí. El límite con las consecuencias lógicas tampoco está exento de conflictos. Esto puede ilustrarse por medio del ejemplo (62). Puede argumentarse que (64) es una consecuencia lógica de (62). Esto equivale a decir que si (64) es falsa, entonces (62) también es falsa. Aquí tampoco son suficientes las intuiciones solas para decidir la cuestión. Se requieren argumentos teóricos. Un factor importante en la discusión teórica es la negación de oraciones como (62):

(67) No se da el caso que también Juan viene.

Si (64) se toma por una implicatura o presuposición de (62), entonces también se le debe aceptar como una implicatura o presuposición de (67). Pero es distinto si se le trata como una consecuencia lógica. En una semántica bivalente, una oración contingente y su negación no pueden tener ambas las mismas consecuencias lógicas (contingentes) (véase §5.5.3). Si uno quiere conservar la idea de que (64) es una consecuencia lógica de (62), entonces una forma de lograrlo es negar que (67) sea una simple negación de (62). En este enfoque, (62) es considerada como la siguiente conjunción.

(68) $Vj \wedge \exists x(x \neq j \wedge Vx)$

Luego, puede decirse que (67) es ambigua entre (69) y (70)

(69) $\neg(Vj \wedge \exists x(x \neq j \wedge Vx))$

(70) $\neg Vj \wedge \exists x(x \neq j \wedge Vx)$

La fórmula (69) ofrece una lectura poco plausible de (67), en la cual (69) es la negación simple de (62). La lectura más plausible de (67) es (70), de la cual todavía se sigue (64). Se puede distinguir una tercera lectura de (67) que representamos en (71):

(71) $Vj \wedge \neg\exists x(x \neq j \wedge Vx)$

Esta lectura se presenta si se coloca un énfasis extra en el *también* de (67).

Es evidente que nuestro enfoque de *también* tiene un estrecho parecido con el análisis de Russell de las descripciones definidas (véase §5.2). En esta teoría, las implicaciones existenciales de las negaciones de las oraciones con descripciones definidas, como por ejemplo (72), se explican suponiendo que tales oraciones tienen tanto una negación interna como una negación externa:

(72) No es el caso de que el rey de Francia es calvo.

Las fórmulas (69) y (70) funcionan análogamente como la negación externa e interna de (62) respectivamente.

Este enfoque según el cual (64) es considerada como una implicatura (o presuposición) de (62) está más en armonía con las ideas de Strawson acerca de las descripciones definidas. Ambos enfoques tienen sus propias dificultades. Como vimos en §5.5.6, en el enfoque de Strawson (67) puede ser considerada ambigua sólo bajo el supuesto de que la negación es léxicamente ambigua. En el enfoque de Russell, la ambigüedad se explica como ambigüedad en el alcance. A propósito, ambas teorías deben explicar por qué la lectura con la negación interna es mucho más natural que la lectura con la negación externa. (Quizás aquí nuevamente se pueda requerir del principio de cooperación. La lectura con la negación interna es lógicamente más fuerte que la lectura con la negación externa. Un hablante que confronta esta ambigüedad elegiría, de acuerdo con el principio de cooperación, la lectura más fuerte, siendo iguales todas las otras cosas.)

A partir de lo antedicho queda claro que nadie conoce la frontera exacta entre los aspectos del significado que dependen de las condiciones de verdad y los que no lo hacen. Esto hace surgir algunos animados conflictos en la literatura. Pero, cualquiera sea el resultado de los conflictos, a esta altura debe estar claro que al menos los aspectos del significado que no dependen de las condiciones de verdad pueden ser enfocados en forma provechosa desde dentro del marco de la lógica. Y éste es el punto principal que hemos tratado de defender en este capítulo.

7 Sintaxis formal

En este libro se ha enfatizado el estudio lógico de cuestiones semánticas. No obstante, la sintaxis pura de los lenguajes naturales y formales también tiene una estructura interesante y analizable mediante métodos matemáticos. En este capítulo intentaremos esbozar algunas nociones y temas centrales de este área, señalando algunas vinculaciones con el resto de nuestro texto. No aspiramos a un tratamiento completo; para un tratamiento más exhaustivo, remitimos al lector a, e.g., Hopcroft y Ullman, 1979.

7.1 La jerarquía de las reglas de reescritura

Consideraremos un alfabeto finito A de símbolos $a_1, \ldots, a_n$. En correspondencia con el mismo está el conjunto A* de todas las secuencias finitas de símbolos tomados de A (incluyendo la 'secuencia vacía' $\langle\ \rangle$). Un *lenguaje* L puede ser considerado como un subconjunto de A* (las 'expresiones gramaticales de L'). Si se aplica esta idea abstracta al lenguaje natural, entonces a los símbolos del alfabeto A les corresponderían palabras, o incluso expresiones compuestas tomadas en su totalidad.

La descripción de un lenguaje L ahora equivale a encontrar una *gramática* G para L.

Habitualmente las gramáticas son concebidas como conjuntos de *reglas de reescritura* de la forma:

$X \Rightarrow E$ (Reescriba el símbolo X como la expresión E)

Ejemplo: Considérese que G consiste en las dos reglas siguientes (en el alfabeto {a, b}):

$S \Rightarrow \langle\ \rangle$

$S \Rightarrow aSb$

El símbolo S se denomina 'símbolo inicial' (el cual a menudo se refiere a la categoría de 'oración'). La clase de expresiones generadas por G consiste en todas las secuencias de la forma:

$a^i b^i$ (i letras a, seguidas por la misma cantidad de letras b)

Por ejemplo, la secuencia aabb puede obtenerse por medio de los siguientes pasos de reescritura:

S, aSb, aaSbb, aa$\langle\ \rangle$bb(= aabb)

Luego, en forma más general, además de los *símbolos terminales* de A, las reglas de reescritura también incluyen *símbolos auxiliares* que pueden ser reescritos como expresiones formadas a partir de símbolos terminales y auxiliares. Decimos que la gramática G genera el lenguaje L(G) de todas las cadenas E compuestas a partir de los símbolos terminales que sólo son *derivables* a partir de G, es decir, que es una secuencia finita de expresiones que comienzan con S y terminan con E, en la cual cada expresión puede obtenerse a partir de su predecesora reescribiendo un único símbolo auxiliar con la ayuda de una de las reglas de G. A continuación consignamos otra ilustración.

Ejemplo: La siguiente gramática describe las fórmulas de la lógica proposicional, con el alfabeto {p, ', ¬, ∧,), (} (donde las letras proposicionales tienen la forma p, p', p'', ...):

A ⇒ p

A ⇒ A'

S ⇒ A

S ⇒ ¬S

S ⇒ (S ∧ S)

Aquí el símbolo auxiliar A representa letras proposicionales o 'fórmulas atómicas'. De hecho, a menudo los símbolos auxiliares corresponden a categorías gramaticales que también son útiles en sí mismas.

Las gramáticas de reescritura pueden clasificarse según las clases de reglas que empleen. Hacemos notar que se dice que las gramáticas que hemos introducido hasta ahora son *independientes del contexto*, lo cual significa que sus reglas admiten la reescritura de símbolos auxiliares solos independientemente del contexto en que aparezcan. Las gramáticas independientes del contexto son muy comunes e importantes.

Una subespecie más sencilla pero útil de esta clase es la de las gramáticas *regulares*, en las cuales se introduce un requisito adicional sobre la expresión E que figura a la derecha de la flecha: la misma debe consistir en, o bien (i) un único símbolo terminal (o la secuencia vacía ⟨ ⟩), o bien (ii) un único símbolo terminal y un único símbolo auxiliar. En el último caso, todas las reglas de G deben tener el mismo orden: el símbolo terminal debe estar delante (la gramática es 'regular hacia la izquierda') o al final ('regular hacia la derecha').

Ejemplo: considere el alfabeto {a, b} y la gramática G con las reglas:

S ⇒ aX

X ⇒ b

X ⇒ bS

L(G) consiste en todas las secuencias de la forma ab ... ab.

Un ejemplo más realista de un 'lenguaje' con una descripción regular sería la notación decimal de los numerales, como 123.654.

Por otro lado, hay clases de gramáticas más complejas, con reglas de reescritura 'condicionales' de la forma:

$(E_1)X(E_2) \Rightarrow E$ (Reescriba X como E si aparece en el contexto E_1XE_2.)

Un ejemplo bien conocido de una gramática *sensible al contexto* es la siguiente:

$S \Rightarrow aSBC$

$S \Rightarrow abC$

$(C)B \Rightarrow D$

$C(D) \Rightarrow B$

$(B)D \Rightarrow C$

$b(B) \Rightarrow b$

$C \Rightarrow c$

El lenguaje L(G) producido por esta gramática consiste en todas las secuencias de símbolos terminales que tienen la misma cantidad de letras a, b, c (en ese orden).

Por ejemplo, una derivación de aabbcc se efectúa como sigue:
S, aSBC, aabCBC, aabCDC, aabBDC, aabBCC, aabbCC, aabbcC, aabbcc.

Finalmente, la variedad más compleja, las gramáticas *tipo*-0, admiten reglas según las cuales cualquier expresión formada a partir de símbolos auxiliares y terminales puede reescribirse como cualquier otra:

$E_1 \Rightarrow E_2$

Para la descripción lingüística se obtiene el siguiente gradiente de modelos de gramáticas:

regular, independiente del contexto, sensible al contexto, tipo-0.

A menudo este gradiente de modelos de gramáticas se denomina *jerarquía de Chomsky* en honor al creador de esta categorización fundamental.

7.2 Gramáticas y autómatas

Intuitivamente, una gramática es un sistema de reglas por medio de las cuales se puede producir un lenguaje. Pero, además del aspecto 'generativo' del lenguaje, también está la cuestión del reconocimiento: esto es, decidir si una secuencia de símbolos dada es o no una expresión del lenguaje en cuestión. A menudo se ofrece una descripción matemática de la última función en términos de modelos de máquinas. En forma análoga a la jerarquía de gramáticas consignada más arriba, tenemos entonces una jerarquía de máquinas de reconocimiento ordenadas según su 'potencia motriz' (*engine power*).

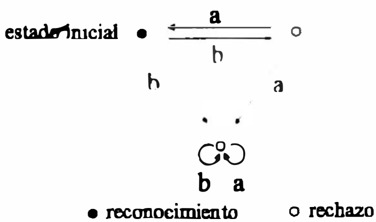
Las máquinas de reconocimiento más sencillas son los *autómatas de estado finito*. Los mismos pueden leer expresiones, símbolo por símbolo (por ejemplo, codificados en una cinta linear), estando siempre en uno de un número finito de estados internos. De manera que el comportamiento de una máquina tal está completamente determinado por las siguientes características:

(i) su 'estado inicial';

(ii) su 'función transición', que dice en cuál estado va a entrar la máquina, dado cualquier estado presente y el último símbolo que leyó

(iii) una clasificación de todos los estados como 'reconociendo' o 'rechazando' (respecto de la cadena leída hasta el momento);

Ejemplo: El lenguaje regular que consiste en todas las secuencias de pares ab se reconoce mediante el siguiente autómata de estado finito.



Aquí sólo cuentan como 'reconocidas' aquellas cadenas cuyo procesamiento lleva a la máquina a un estado de aceptación.

La correlación exhibida en este ejemplo no es azarosa. Puede probarse que, dado cualquier lenguaje con una gramática regular, hay un autómata de estado finito que reconoce precisamente ese lenguaje. Y la conversa también se cumple: por cada máquina tal puede construirse una gramática regular que genera precisamente el lenguaje que consiste en las expresiones reconocidas por esa máquina. (Para definiciones y argumentos detallados remitimos al lector a la literatura.)

Ahora puede argumentarse que cualquier máquina fisicamente realizable debe ser un autómata de estado finito (quizás más bien grande). Pero también hay otras nociones naturales de computación. En particular, si estamos preparados para eliminar idealmente todas las restricciones de memoria o costo computacional, y si consideramos solamente lo que humanamente es posible realizar *en principio* con una computadora mecánica, entonces llegamos a la noción de *máquina de Turing*, que concreta la idea más general de un procedimiento efectivo, o *algoritmo*. Comparada con una máquina de estado finito, una máquina de Turing tiene dos capacidades extra: en principio, tiene memoria ilimitada y puede aplicar transformaciones a la memoria. Una descripción más concreta es la siguiente. La máquina trabaja sobre una cinta infinitamente larga sobre la cual hay símbolos (inicialmente sólo la cadena que se va a investigar). La misma examina la cinta con su cabezal de lectura/escritura, y dependiendo de su estado interno y del símbolo que acaba de leer, puede:

(i) reemplazar ese símbolo por otro;

(ii) trasladar su cabezal de lectura/escritura una posición a la izquierda o a la derecha;

(iii) asumir un estado diferente.

Las máquinas de Turing proporcionan un análisis elegante y muy potente de la computabilidad efectiva en fundamentos de la matemática y en ciencias de la computación. A pesar de ello, generalmente se supone que son lo suficientemente potentes como para la descripción de lenguajes naturales. Esto se relaciona con el siguiente hecho: los lenguajes reconocidos por máquinas de Turing son precisamente aquellos para los cuales puede escribirse una gramática tipo-0.

Entre estos dos extremos también existe un tipo intermedio de máquina que corresponde a las gramáticas independientes del contexto mencionadas más arriba, a saber, el *autómata descendente* (*push down automaton*). Ésta es una máquina de estado finito que también es capaz de conservar y usar una 'pila' que contiene información acerca de símbolos ya leídos. Mientras está leyendo símbolos, y dependiendo de su estado presente y del símbolo que acaba de leer, un autómata descendente tiene las siguientes opciones: puede eliminar el símbolo superior de su pila de memoria, puede dejar el símbolo inalterado, o puede reemplazarlo por una nueva combinación de símbolos. El resultado es que la información lingüísticamente relevante puede almacenarse en la memoria y recuperarse después. Lo que sigue puede servir a modo de ilustración.

Anteriormente y mediante una gramática independiente del contexto generamos el lenguaje a^1b^1 de cadenas de símbolos a seguidos por la misma cantidad de símbolos b. De hecho, este lenguaje no puede ser reconocido por un autómata de estado finito, dado que una máquina tal tiene sólo un número finito de estados en los cuales puede codificar los patrones de símbolos que haya encontrado hasta el momento. En consecuencia, siempre habrá secuencias cuyo segmento inicial a^1 se torne demasiado largo como para recordarlo, como resultado de lo cual no puede establecer una comparación suficiente con los números b por venir. Sin embargo, un autómata descendente resuelve el problema guardando en su pila todas las a que lee y luego simplemente las compara con las b que va leyendo.

Nuevamente, una cadena cuenta como reconocida por algún autómata descendente si su procesamiento conduce a la máquina a un estado de aceptación. Sin embargo, aquí hay una sutileza. En general, para el reconocimiento de los lenguajes independientes del contexto puede tener que requerirse de autómatas descendentes *no deterministas*, los cuales tienen varias opciones de movimientos posibles en cada estadio. En el último caso, una cadena cuenta como reconocible si existe al menos una secuencia de elecciones exitosa por parte de la máquina que la lleva al estado de aceptación luego de su lectura.

Expresado en términos más lingüísticos, un autómata descendente puede ocuparse de una 'coordinación' a distancia. Sin embargo, no puede realizarse más de una coordinación: el ejemplo anterior de $a^1b^1c^1$ no puede darse en una descripción independiente del contexto. Debe ser descripto por medios sensibles al contexto. La cuestión acerca de si la sintaxis del lenguaje natural tiene verdaderamente tales patrones de coordinación múltiple sigue siendo un tema de debate continuo en lingüística.

7.3 La teoría de los lenguajes formales

Los conceptos discutidos más arriba han dado origen a una rica teoría general de los lenguajes. Una vez más remitimos al lector a la obra de Hopcroft y Ullman (1979), la cual también tiene formulaciones y pruebas exactas de los resultados que se discuten en este capítulo. En Savitch *et al.* (1987), hay un interesante estudio actualizado de las discusiones contemporáneas.

Una cuestión importante es cuán específicamente deben acomodarse los lenguajes naturales (y también, por ejemplo, los lenguajes de programación) en las jerarquías consignadas más arriba. Una gramática generativa explícita o máquina de reconocimiento indica el nivel más alto de complejidad en el cual debe colocarse el lenguaje, pero para mostrar que no puede ser colocado más abajo necesitamos un procedimiento para demostrar que el lenguaje no puede ser descripto por medio de alguna clase de gramática o autómata más simple. En §7.2 ya habíamos indicado brevemente un método de refutación para este propósito, para lenguajes regulares en tanto que reconocidos por máquinas de estado finito. La restricción a un número finito fijo de estados da lugar a un resultado denominado 'Lema de Bombeo'('*Pumpmg Lemma*'):

Lema:

Para cada lenguaje regular L hay una constante N tal que si $E_1E_2E_3$ es una expresión en L en la cual la longitud de E_2 es mayor que la de N, entonces hay x, y, z tales que E_2 tiene la forma xyz, y toda expresión de la forma $E_1xy^kzE_2$ también es una expresión en L (para cualquier número **k** de repeticiones de y).

Que el lenguaje anterior a^ib^i no es regular es una consecuencia directa de este lema ('bombee el segmento inicial a^i', para i > N). Para lenguajes independientes del contexto y lenguajes de orden superior, que involucran patrones de duplicación más complejos, se cumplen resultados más sutiles del bombeo.

Una segunda cuestión importante se refiere a la complejidad de los diversos lenguajes. Así como podemos ocuparnos de la decidibilidad efectiva de las leyes del razonamiento válido en los sistemas lógicos (véase cap. 4 anterior), también podemos ocuparnos de la decidibilidad de la forma gramatical de las expresiones de un lenguaje. Se puede enfocar esta cuestión asociando algoritmos con el sistema de reglas de reescritura; el algoritmo va a constatar si cualquier cadena dada puede ser producida por medio de alguna combinación de las reglas. La membrecía de L(G) resulta decidible para gramáticas G hasta gramáticas sensibles al contexto inclusive. Pero los lenguajes producidos por gramáticas tipo-0 no son necesariamente decidibles. En general sólo son 'efectivamente enumerables': es decir, tenemos un procedimiento efectivo para generar sucesivamente todas las cadenas que pertenecen al lenguaje. (Esencialmente uno simplemente rastrea todas las derivaciones posibles de acuerdo con algún esquema razonable.) Dado que en general este proceso será infinito, aunque en cierto estadio finito del procedimiento no nos permita rechazar una expresión dada, su turno puede venir después. Esta situación es análoga a la que encontramos anteriormente, cuando discutíamos la complejidad de las leyes válidas en lógica de predicados (véase §4.2). La totalidad de la clase de lenguajes decidibles debe encontrarse en algún punto entre los descriptos mediante gramáticas sensibles al contexto y el nivel completo de tipo-0 de la jerarquía de Chomsky.

Este tema tiene ramificaciones prácticas directas en el análisis de expresiones lingüísticas, con un agregado concerniente a la eficiencia con la que pueden implementarse nuestros procedimientos de decisión. Al menos para lenguajes independientes del contexto, los algoritmos para el análisis pueden ser eficientes: estos lenguajes pueden ser analizados por medio de un algoritmo que no requiere más que k^3 pasos computacionales sucesivos para analizar una expresión con k símbolos. (En este sentido, también puede trazarse una jerarquía independiente, de estructura más fina, de lenguajes ordenados según su complejidad de análisis. La teoría de la última jerarquía aun está poco desarrollada).

Una tercera y última cuestión se refiere a las investigaciones sobre familias de lenguajes que están asociados con diferentes clases de gramáticas. En este campo de estudio tienen particular importancia ciertas operaciones sobre el universo de todas las expresiones en el alfabeto relevante. Por ejemplo, la familia de lenguajes regulares es cerrada bajo todas las operaciones booleanas (correspondientes a las conectivas de la lógica proposicional): las intersecciones, uniones y complementos de los lenguajes regulares son lenguajes regulares. Pero esto no se cumple para lenguajes independientes del contexto, en donde sólo está garantizada la clausura bajo las uniones. No obstante, el que la intersección de un lenguaje independiente del contexto y un lenguaje regular siempre deba ser un lenguaje independiente del contexto es un provechoso resultado 'mixto'. Tendremos oportunidad de aplicar esto en §7.5.

Además de las operaciones booleanas, que son conocidas a partir de la lógica, sobre los lenguajes se pueden efectuar muchas otras operaciones importantes que tienen características más intrínsecamente sintácticas. Por ejemplo, dados dos lenguajes L_1 y L_2, uno puede formar su 'producto' consistente en todas las secuencias formadas mediante la concatenación de una cadena de L_1 y una de L_2 en ese orden. Tanto los lenguajes regulares como los lenguajes independientes del contexto también son cerrados bajo productos de esta clase.

7.4 Complejidad gramatical de los lenguajes naturales

Uno de los aspectos más convincentes de la obra clásica de Chomsky *Syntactic Structures* (1957) fue su discusión sobre la complejidad de los lenguajes naturales. Consideró sucesivamente gramáticas regulares y gramáticas independientes del contexto como candidatas a paradigmas gramaticales y las rechazó en tanto tales. El modelo eventualmente resultante para la descripción lingüística fue la bien conocida propuesta de emplear la *estructura de la frase*, un componente independiente del contexto que generara una base lingüística relativamente perspicua, con otro conjunto de reglas, *transformaciones*, que operarían sobre el último para obtener en forma correcta los detalles de la sintaxis. Pero alrededor de 1970, Peters y Ritchie probaron que el enfoque en dos etapas tiene el mismo poder descriptivo que las gramáticas tipo-0, o las máquinas de Turing: algo que generalmente había sido considerado como una combinación letal. A pesar de eso, la opinión lingüística prevaleciente acerca del tema siguió siendo que la complejidad de los lenguajes naturales es mayor que la de los lenguajes independientes del contexto.

La discusión se ha reavivado en los últimos años (para un estudio, véase Gazdar y Pullum, 1987). Por ejemplo, resulta ser que muchos de los argumentos tradicionales a favor de la ausencia de independencia del contexto son formalmente incorrectos. Una falacia matemática que se menciona a menudo es que si algún sublenguaje del lenguaje *central* (*target language*) L no es independiente del contexto, por ejemplo debido a la ocurrencia de patrones de coordinación ternarios o más elevados, entonces L tampoco puede ser independiente del contexto. Otros argumentos al menos formalmente correctos resultaron ser discutibles en el terreno de lo empírico. Actualmente, sólo se conocen unos pocos candidatos plausibles para lenguajes naturales que no son independientes del contexto (entre ellos, suizo-alemán, bambara y holandés).

Pero, en todo caso, quizás la cuestión más interesante es una cuestión 'local': ¿cuáles subsistemas naturales de un lenguaje admiten una descripción independiente del contexto o tal vez alguna más simple? Por ejemplo, recientemente, muchos estudiosos han señalado el carácter regular de muchas construcciones sintácticas importantes.

> *Ejemplo*: La siguiente gramática independiente del contexto genera frases nominales complejas con complementos preposicionales:
>
> NP ⇒ Det N
>
> Det ⇒ *cada*
>
> Det ⇒ *un*
>
> N ⇒ *niño*
>
> N ⇒ *perro*
>
> N ⇒ N PP
>
> PP ⇒ Prep NP
>
> Prep ⇒ *con*
>
> Prep ⇒ *sin*

Esta gramática genera expresiones complejas como *un niño sin un perro con cada niño*. Pero puede ser 'regularizada' al conjunto equivalente de reglas de reescritura:

> NP ⇒ *un* N
>
> NP ⇒ *cada* N
>
> N ⇒ *niño*

N ⇒ *perro*

N ⇒ *niño* PP

N ⇒ *perro* PP

PP ⇒ *sin* NP

PP ⇒ *con* NP

Presumiblemente necesitamos un enfoque formal más sensible a la complejidad de mecanismos gramaticales dentro de un único lenguaje para apreciar significativamente la 'complejidad' del último.

En relación con esto también podemos mencionar el marco de la *gramática categorial*, que discutiremos en el capítulo 4 del volumen 2. Alrededor de 1960 se mostró que las gramáticas categoriales en su forma original reconocen precisamente todos los lenguajes independientes del contexto, y ninguno más. En ese entonces esto fue visto como una objeción importante al uso de paradigmas categoriales en lingüística. No obstante, como veremos en el volumen 2, en años recientes se han desarrollado variededes más flexibles y poderosas de gramáticas categoriales que emplean reglas lógicas de 'cambio de categoría'. Otra vez, hay una incipiente teoría del lenguaje para el último marco en términos de las nociones que hemos desarrollado aquí. Pero aún no se conocen resultados concluyentes respecto de su poder de reconocimiento.

El hecho mismo de que sirva como una clase de norma aceptada, mediante la cual podrían calibrarse los paradigmas lingüísticos que se proponen, es una indicación del éxito que ha tenido la teoría formal de gramáticas de reescritura. Verdaderamente, la calibración no requiere limitarse a lenguajes naturales sino que puede extenderse a lenguajes de programación. Por ejemplo, resulta ser que muchos de los bien conocidos lenguajes de programación son independientes del contexto. Pero los lenguajes regulares también desempeñan un papel importante en ciencia computacional, por ejemplo, en la construcción de compiladores.

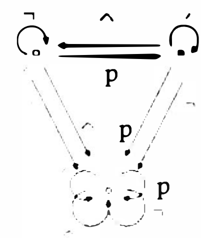
Finalmente deberíamos prestar atención a la cuestión gramatical que hasta aquí hemos ignorado. Desde un punto de vista lingüístico, el reconocimiento de cadenas 'planas' por medio de alguna gramática de la clase apropiada no es lo único que cuenta. (En relación con ésto, se emplea el término poder de reconocimiento *débil*.) La *forma* en que una gramática hace esto tiene la misma importancia, dado que la forma en que se deriva una cadena determina la 'estructura constitutiva' de esa cadena. Para una descripción lingüística apropiada es importante si una gramática dada atribuye a las expresiones las estructuras constitutivas correctas, o al menos plausibles. (En relación con este requisito más riguroso, se emplea el término poder de reconocimiento *fuerte*.) Por ejemplo, la posible reducción de las gramáticas independientes del contexto mencionadas anteriormente a gramáticas regulares sólo tendrá éxito verdaderamente si no introduce árboles analíticos, y por consiguiente estructuras constitutivas, que sean demasiado artificiales, y puede producir los árboles analíticos correspondientes a la lectura natural de las expresiones.

7.5 Gramáticas, autómatas y lógica

A pesar de que la perspectiva anterior fue desarrollada en un contexto más lingüístico, también puede ser transferida, de muchas maneras diferentes, a la lógica misma.

Para empezar, la complejidad de los lenguajes lógicos formales puede investigarse. Los lenguajes estándar resultan ser independientes del contexto; véase el ejemplo de más arriba con fórmulas proposicionales. No obstante, si se elimina la función que cumplen los paréntesis y que consiste en eliminar la ambigüedad, entonces los lenguajes resultantes son mayormente regulares.

Ejemplo: El siguiente autómata de estado finito reconoce precisamente todas las expresiones del lenguaje para la lógica proposicional discutido más arriba en §7.1, pero habiendo eliminado los paréntesis (de manera que el alfabeto es {p, ', ¬, ∧}):



Sin embargo, cambios aparentemente inofensivos en la sintaxis formal pueden incrementar la complejidad más allá de lo que sea independiente del contexto. Por ejemplo, las fórmulas de la lógica de predicados que carecen de cuantificación vacua (véase §3.3), forman un lenguaje que no es independiente del contexto. (Para una prueba e ilustraciones, véase van Benthem, 1987.) Éste no es un fenómeno aislado. Por ejemplo, también se sabe que el introducir ciertas restricciones razonables sobre las convenciones para ligar variables en los lenguajes de programación puede llevar a una pérdida de la independencia del contexto.

Pero las nociones mencionadas más arriba también pueden aplicarse a la semántica lógica. Por ejemplo, los autómatas pueden emplearse en tanto procedimientos para calcular los valores semánticos de diversas clases de expresiones. Por ende, podríamos ponernos de acuerdo con la contrapartida semántica de la anterior preocupación sintáctica central: la complejidad de las *denotaciones* o *significados*. En van Benthem (1986, cap. 8) se hace esto para el caso especial de expresiones cuantificadoras, introduciendo una jerarquía de 'autómatas semánticos' que computan relaciones cuantificacionales. Para los propósitos actuales, el cálculo anterior de los valores de verdad de fórmulas proposicionales (véase §2.2) es un ejemplo más accesible. Es posible aducir dos razones que muestran que ningún autómata de estado finito puede hacer esto. No sólo evaluará algunas expresiones no gramaticales como si fueran fórmulas bien formadas, sino que también ejecutará la acción peor peor de evaluar algunas fórmulas proposicionales bien formadas en forma incorrecta. (Para una prueba de esta afirmación, véase van Benthem, 1987.) Así, las nociones desarrolladas hasta aquí pueden emplearse para formular una moraleja semántica: la evaluación por medio de tablas de verdad al menos es un proceso independiente del contexto. En otras palabras, en el aparato introducido en este capítulo no hay nada intrínsecamente sintáctico; puede ser igualmente aplicado a la semántica.

Podemos avanzar otro paso y considerar los patrones lógicos de inferencia bajo la presente perspectiva. Por ejemplo, ¿cuál es la complejidad gramatical de la clase de las tautologías proposicionales? Supondremos de aquí en más que nuestro vocabulario básico tiene sólo un número finito fijo de letras proposicionales. Luego, la clase de las tautologías proposicionales es independiente del contexto, como puede mostrarse por medio de una construcción sencilla. Pero con lógicas más expresivas que incluyan más constantes lógicas, la complejidad comienza a incrementarse: véase la siguiente ilustración de la lógica proposicional intensional.

Ejemplo: La 'lógica proposicional modal minimal' K introducida en el volumen 2, §2.3.3, enriquece a la lógica proposicional corriente por medio del denominado operador necesidad $\Box$ (se lee: 'es necesario que...'). En este cálculo de inferencias, un principio de la forma:

$$(\Box^i p \wedge \Box^j q) \rightarrow \Box^k(p \wedge q)$$

es válido si y sólo si $i = j = k$. Considérese la intersección de la clase de leyes válidas de esta lógica y el lenguaje regular que consiste en todas las cadenas de la forma:

$$(\Box^* p \wedge \Box^* q) \rightarrow \Box^*(p \wedge q)$$

en la cual $\Box^*$ se refiere a una cantidad arbitraria de apariciones del símbolo $\Box$. La intersección consiste en todas las cadenas de la forma

$$(\Box^i p \wedge \Box^i q) \rightarrow \Box^i(p \wedge q).$$

Debido a la condición de coordinación ternaria requerida para que las fórmulas sean válidas, el último lenguaje no es independiente del contexto. Pero en vista de una observación que hiciéramos al final de §7.3, se sigue que la clase de las leyes de la lógica proposicional modal tampoco puede ser independiente del contexto.

No hemos agotado los aspectos lógicos de la sintaxis o por caso, los aspectos sintácticos de la lógica. Hay otros temas interesantes en la literatura actual, tales como la relación entre prueba lógica y análisis sintáctico ('análisis como deducción' es un tópico actual). Aquí se explota la analogía entre buscar un análisis de una expresión, dada una cierta gramática de reescritura, y buscar una prueba de la afirmación de que la expresión pertenece a la categoría de oración, empleando la información contenida en dicha gramática. La idea es prominente en modelos actuales de procesamiento del lenguaje natural basado en la así denominada programación lógica (véase Pereira y Shieber, 1987), pero también es central para la gramática categorial del volumen 2, capítulo 4 (véase Moortgat, 1988). No podemos proseguir con estos temas aquí, pero esperamos haber transmitido al menos las características principales de la interfase sintáctica entre la lógica y la lingüística.

Soluciones a los ejercicios

Capítulo 2

Ejercicio 1

(i) Sí.
(ii) No, pero $(p \vee q)$ sí es una fórmula.
(iii) No, pero $\neg q$ sí es una fórmula.
(iv) Sí.
(v) No, pero $(p \rightarrow (p \rightarrow q))$ sí es una fórmula.
(vi) Sí.
(vii) Sí.
(viii) No, pero $(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$ y $((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ sí son fórmulas.
(ix) Sí.
(x) No.
(xi) Sí.
(xii) Sí.

Ejercicio 2

(a) Véanse las figuras i-iii
Las subfórmulas de $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$ son: p_1, p_2, $p_1 \leftrightarrow p_2$, $\neg p_2$ y $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$.
Las subfórmulas de $p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_2)$ son: p_1, p_2, $\neg p_2$, $p_2 \vee \neg p_2$ y $p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_2)$.
Las subfórmulas de $((p \vee q) \vee \neg r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee \neg r))$ son: p, q, r, $p \vee q$, $\neg r$, $(p \vee q) \vee \neg r$, $q \vee \neg r$, $p \vee (q \vee \neg r)$ y $((p \vee q) \vee \neg r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee \neg r))$.

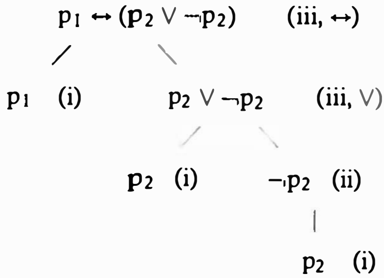
(i)

$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$ (iii, $\vee$)

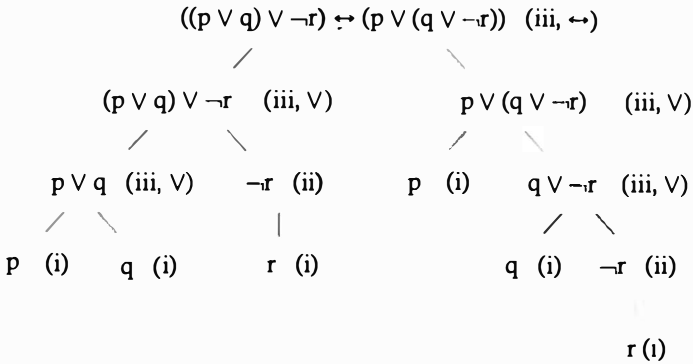
$p_1 \leftrightarrow p_2$ (iii, $\leftrightarrow$) $\qquad$ $\neg p_2$ (ii)

p_1 (i) $\qquad$ p_2 (i) $\qquad$ p_2 (i)

(ii)

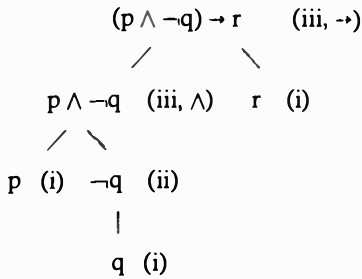


(iii)



(b) $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
$p \wedge (\neg q \rightarrow r)$
$p \wedge \neg(q \rightarrow r)$
Véanse figuras iv-vi.

(iv)



(v)

- $p \wedge (\neg q \to r)$ (iii, $\wedge$)
  - p (i)
  - $\neg q \to r$ (iii, $\to$)
    - $\neg q$ (ii)
      - q (i)
    - r (i)

(vi)

- $p \wedge \neg(q \to r)$ (iii, $\wedge$)
  - p (i)
  - $\neg(q \to r)$ (ii)
    - $q \to r$ (iii, $\to$)
      - q (i)
      - r (i)

(c)

(i)	$p \to q$	implicación
(ii)	$\neg p$	negación
(iii)	p	fórmula atómica
(iv)	$(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$	conjunción
(v)	$\neg(p \to q)$	negación
(vi)	$(p \to q) \vee (q \to \neg\neg p)$	disyunción
(vii)	p_4	fórmula atómica
(viii)	$(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \neg p_2$	disyunción
(ix)	$\neg(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg p_2$	conjunción
(x)	$(p \wedge (q \wedge r)) \vee p$	disyunción

Ejercicio 3

(a) Para el operador profundidad de ϕ escribiremos op(ϕ). Luego

(i) $op(p) = 0$ para las letras proposicionales p;

(ii) $op(\neg\phi) = op(\phi) + 1$;

(iii) $op(\phi \circ \psi) = \max(op(\phi), op(\psi)) + 1$ para conectivas binarias

(b) A(ϕ) da la longitud de la rama más larga del árbol constructivo de ϕ. (Una rama de un árbol es una secuencia consecutiva de nodos del árbol que va desde la raíz hasta uno de los puntos terminales [hojas].) B(ϕ) proporciona la secuencia más larga de nodos a través de los que se puede pasar de uno a otro conectado con el anterior, sin pasar por el mismo nodo dos veces. (Véase también la columna de Dewndey en *Scientific American* de junio de 1985.)

Ejercicio 4

(a) ϕ^+ mide el número de apariciones de letras proposicionales en ϕ, y ϕ^* el número de apariciones de conectivas binarias.

(b) La prueba inductiva de la relación entre estos dos números se apoya en las tres observaciones siguientes:

$p^+ = 1 = 0 + 1 = p^* + 1$;

$(\neg\phi)^+ = \phi^+ = \phi^* + 1$ (por hipótesis inductiva) $= (\neg\phi)^* + 1$;

$(\phi \circ \psi)^+ = \phi^+ + \psi^+ = \phi^* + 1 + \psi^* + 1$ (*por hipótesis inductiva*) $= (\phi \circ \psi)^* + 1$.

Ejercicio 5

(1) Traducción: $\neg p \wedge q$.
Diccionario: p: este motor es ruidoso; q: este motor consume mucha energía.

(2) Traducción: $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$.
Diccionario: p: Pedro viene; q: Enrique viene; r: Andrés viene.

(3) Traducción: $\neg(p \wedge \neg q)$.
Diccionario: p: Caín es culpable; q: Abel es culpable.

(4) Traducción: $\neg(p \vee q)$.
Diccionario: p: esto ha sido escrito con un lápiz; q: esto ha sido escrito con una lapicera.

(5) Traducción: $p \wedge q$.
Diccionario: p: Juan es estúpido; q: Juan es desagradable.

(6) Traducción: $(p \wedge q) \wedge (\neg r \wedge \neg s)$.
Diccionario: p: Juan quiere que Papá Noel le traiga un tren; q: Juan quiere que Papá Noel le traiga una bicicleta; r: Juan recibirá un tren de Papá Noel; s: Juan recibirá una bicicleta de Papá Noel.

(7) Traducción: $\neg(p \vee q)$.
Diccionario: p: alguien rió; q: alguien aplaudió.

(8) Traducción: $(p \vee q) \vee (r \vee s)$.
Diccionario: p: iré a la playa a pie; q: iré al cine a pie; r: iré a la playa en bicicleta, s: iré al cine en bicicleta.

(9) Traducción: $p \vee q$.
Diccionario: p: Carlos y Elsa son hermano y hermana; q: Carlos y Elsa son primo y prima.
Traducción alternativa: $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$.
Diccionario: p: Carlos es hermano de Elsa; q: Elsa es hermana de Carlos; r: Carlos es primo de Elsa, s: Elsa es prima de Carlos.

(10) Traducción: $p \vee q$.
Diccionario: p: Carlos va a trabajar en auto; q: Carlos va a trabajar en bicicleta y tren.
Adviértase que $p \vee (q \wedge r)$ es una traducción incorrecta, porque en la clave q significa que Carlos usa ambos la bicicleta y el tren, uno después del otro, para ir a trabajar.

(11) Traducción: $p \rightarrow q$.

Diccionario: p: Dios quiere; q: la paz vendrá.

(12) Traducción: $(p \wedge q) \rightarrow r$.
Diccionario: p: llueve; q: brilla el sol; r: aparecerá un arco iris.

(13) Traducción: $(p \vee q) \rightarrow \neg r$.
Diccionario: p: el clima es malo; q: muchos están enfermos; r: la fiesta se hará.

(14) Traducción: $p \wedge (q \rightarrow r)$.
Diccionario: p: Juan irá a la escuela; q: llueve; r: Pedro irá a la escuela.

(15) Traducción: $\neg p \rightarrow ((r \vee s) \rightarrow (q \wedge t))$.
Diccionario: p: estamos en verano; q: está húmedo; r: es de tarde, s: es de noche; t: hace frío.

(16) Traducción: $(p \wedge \neg q) \rightarrow (s \rightarrow \neg r)$ o $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (s \rightarrow \neg r)$.
Diccionario: p: yo te necesito; q: tú me ayudas; r: yo te ayudo, s: tú me necesitas.

(17) Traducción: $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$.
Diccionario: p: yo bebo; q: tú te quedas conmigo.

(18) Traducción: $p \leftrightarrow q$ o $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
Diccionario: p: Carlos viene; q: Elsa viene.

(19) Traducción: $p \rightarrow \neg q$.
Diccionario: p: Juan viene; q: Pedro viene.

(20) Traducción: $p \leftrightarrow \neg q$.
Diccionario: p: Juan viene; q: Pedro viene.

(21) Traducción: $p \leftrightarrow q$.
Diccionario: p: Juan viene; q: Pedro se queda en su casa.

(22) Traducción: $\neg p \rightarrow q$ o $p \nleftrightarrow q$.
Diccionario: p: iremos; q: llueve.

(23) Traducción: $p \rightarrow q$.
Diccionario: p: Juan viene; q: es una desgracia si vienen Pedro y Juana.

(24) Traducción: $((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge \neg q) \rightarrow r)$.
Diccionario: p: mi padre va; q: mi madre va; r: yo iré.

(25) Traducción: $((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((\neg p \wedge q) \rightarrow r)$.
Diccionario: p: Juan quiere recibir una bicicleta de Papá Noel; q: Juan es amable; r: Papá Noel le regalará una bicicleta a Juan.

(26) Traducción: $\neg p \wedge (p \rightarrow \neg q)$.
Diccionario: p: quisiste decir eso; q: te creo.

(27) Traducción: $p \rightarrow q$.
Diccionario: p: Juan queda fuera; q: es obligatorio que Pedro o Nicolás participen.

Ejercicio 6 (*sólo las partes impares*)

(a) Véase figuras i y ii.
(c) Véase figura iii.
(e) Véase figura iv.
(g) Véase figura v.
(i) Véase figura vi.
(k) Véase figura vii.
(m) Véase figura viii.
(o) Véase figura ix.

i.

ϕ	$\neg\phi$	$\neg\neg\phi$	$\phi \wedge \phi$	$\phi \vee \phi$
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0

ii.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge (\phi \vee \psi)$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee (\phi \wedge \psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

iii.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\neg(\phi \vee \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

iv.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\psi \vee \phi$	$\neg\phi$	$\neg\phi \rightarrow \psi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$	$\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$	$\phi \rightarrow \psi$	$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$
1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0

v.

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \psi$	$\neg\psi$	$\phi \wedge \neg\psi$	$\neg(\phi \wedge \neg\psi)$	$\neg\phi \rightarrow \psi$
1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0

vi.

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \phi$	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$	$\phi \wedge \psi$	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$	$(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

vii. ϕ	ψ	χ	$\psi \vee \chi$	$\phi \wedge (\psi \vee \chi)$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \wedge \chi$	$(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

viii. ϕ	ψ	χ	$\phi \vee \psi$	$(\phi \vee \psi) \rightarrow \chi$	$\phi \rightarrow \chi$	$\psi \rightarrow \chi$	$(\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

ix. ϕ	ψ	χ	$\psi \rightarrow \chi$	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	$\phi \wedge \psi$	$(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Ejercicio 7

(a) Por el ejercicio 6i, $\phi \leftrightarrow \psi$ es equivalente a $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$; por el ejercicio 6f, $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ es equivalente a $(\psi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)$; y por el ejercicio 6i, $(\psi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)$ es equivalente a $\psi \leftrightarrow \phi$.

(b) Según el ejercicio 6g, $\phi \rightarrow \neg\phi$ es equivalente a $\neg\phi \vee \neg\phi$, la cual a su vez es equivalente a $\neg\phi$ por el ejercicio 6a.

(c) Debido a la asociatividad de $\wedge$, $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ es equivalente a $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$, la cual es equivalente a $(\psi \wedge \phi) \wedge \chi$ dada la conmutatividad de $\wedge$; y también por la conmutatividad de $\wedge$, $(\psi \wedge \phi) \wedge \chi$ es equivalente a $\chi \wedge (\psi \wedge \phi)$.

(d) Según el ejercicio 6o, $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$, es equivalente a $(\phi \wedge \phi) \rightarrow \psi$, la cual es equivalente a $\phi \rightarrow \psi$ por el ejercicio 6a.

(e) Por el ejercicio 6j, $\phi \nleftrightarrow \psi$, es equivalente a $\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$, la cual a su vez es equivalente a $\neg(\psi \leftrightarrow \phi)$ por el ejercicio 7a; por el ejercicio 6j, $\neg(\psi \leftrightarrow \phi)$ es equivalente a $\neg\psi \leftrightarrow \phi$. la cual a su vez es equivalente a $\phi \leftrightarrow \neg\psi$ por el ejercicio 7a.

(f) Por el ejercicio 7e, $\phi \leftrightarrow \neg\psi$ es equivalente a $\phi \leftrightarrow \neg\neg\psi$. De acuerdo con la ley de doble negación, $\phi \leftrightarrow \neg\neg\psi$ es equivalente a $\phi \leftrightarrow \psi$; y $\phi \leftrightarrow \psi$ es equivalente a $\neg\neg\phi \leftrightarrow \psi$, la cual es equivalente a $\neg\phi \nleftrightarrow \psi$ por el ejercicio 6j.

Ejercicio 8 (*sólo las partes impares*)

(i) Véase figura a. (v) Véase figura c.
(iii) Véase figura b. (vii) Véase figura d.

a.

ϕ	$\phi \rightarrow \phi$
1	1
0	1

b.

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

c.

ϕ	$\neg\phi$	$\phi \vee \neg\phi$
1	0	1
0	1	1

d.

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \phi$	$(\phi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \phi)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Ejercicio 9

(i) Véase figura i.

i	p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
	1	1	1	1	1
	1	0	0	1	1
	0	1	1	0	0 ←
	0	0	1	1	1

Luego, $\nvDash (p \to q) \to (q \to p)$. Contraejemplo: $V(p) = 0$, $V(q) = 1$. Para algunas ϕ y ψ, $(\phi \to \psi) \to (\psi \to \phi)$ es ciertamente una tautología, por ejemplo, si $\phi = p$, $\psi = p \wedge q$. Por ello este ejercicio se formula con p y q.

(ii) Véase figura ii.

ii	p	q	$p \to q$	$p \vee (p \to q)$
	1	1	1	1
	1	0	0	1
	0	1	1	1
	0	0	1	1

Luego, $\vDash p \vee (p \to q)$

(iii) Véase figura iii

iii.	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \vee q)$
	1	1	0	0	0	1	0	1
	1	0	0	1	1	1	0	0 ←
	0	1	1	0	1	1	0	0 ←
	0	0	1	1	1	0	1	1

Luego, $\nvDash (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \vee q)$. Contraejemplos: $V(p) = 1$, $V(q) = 0$ y $V'(p) = 0$, $V'(q) = 1$.

(iv) Véase figura iv.

iv. p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \to \neg q)$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \to \neg q)) \to q$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1

Luego, $\nvDash ((p \vee q) \wedge (\neg p \to \neg q)) \to q$. Contraejemplo $V(p) = 1$, $V(q) = 0$.

(v) Véase figura v

v. p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$(p \to q) \to q$	$((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Luego, $\vDash ((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to q)$

(vi) Véase figura vi.

vi. p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

Luego, $\vDash ((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r))$.

Ejercicio 10

(1) Contingente, lógicamente equivalente a χ.
(2) Tautológica.
(3) Contradictoria.
(4) Contingente, lógicamente equivalente a χ.
(5) Contradictoria.
(6) Tautológica.
(7) Contingente.

Ejercicio 11

(ia) Supóngase que $\phi \rightarrow \psi$ es una contradicción. Luego, para cada valuación V, $V(\phi \rightarrow \psi) = 0$. A partir de la tabla de verdad de $\rightarrow$ puede apreciarse que esto significa que para toda V, $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 0$. Por consiguiente ϕ es una tautología y ψ una contradicción.

(ib) $\Rightarrow$: Supóngase que $\phi \wedge \psi$ es una tautología. Luego, para toda valuación V, $V(\phi \wedge \psi) = 1$. Según la tabla de verdad de $\wedge$ esto significa que para cada V, $V(\phi) = 1$ y $V(\psi) = 1$. Por tanto, ϕ y ψ son ambas tautologías.
$\Leftarrow$: Supóngase que ϕ y ψ son tautologías. Luego, a partir de la tabla de verdad de $\wedge$ puede apreciarse que esto significa que para toda valuación V, $V(\phi \wedge \psi) = 1$. Así, $\phi \wedge \psi$ es una tautología.

(ii) La fórmula $p \vee \neg p$ es un contraejemplo. Esta fórmula es una tautología, pero ni p ni $\neg p$ son tautologías.

(iii) $\Leftarrow$: esta parte de la equivalencia se cumple para cada ϕ y ψ. Si, por ejemplo, ϕ es una tautología, entonces para cada valuación V, $V(\phi) = 1$. Por la tabla de verdad de $\vee$ queda claro que para cada valuación V, $V(\phi \vee \psi) = 1$. De este modo, $\phi \vee \psi$ es una tautología. Si ψ es una tautología, el razonamiento es similar.
$\Rightarrow$: Para realizar esta dirección de la equivalencia se necesita un supuesto extra: supóngase que ϕ y ψ no tienen letras proposicionales en común y que $\phi \vee \psi$ es una tautología, esto es, para cada V, $V(\phi \vee \psi) = 1$. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, que ni ϕ ni ψ son tautologías; entonces existe una valuación V_1 y una valuación V_2 tales que $V_1(\phi) = 0$ y y $V_2(\psi) = 0$. Ahora defínase $V_3(p) = V_1(p)$ para cualquier letra proposicional que aparece en ϕ, y $V_3(q) = V_2(q)$ para cualquier letra proposicional que aparece en ψ. Dado que ni ϕ ni ψ tienen letras proposicionales en común, la definición es correcta. Además queda claro que $V_3(\phi) = V_1(\phi) = 0$, porque V_3 y V_1 se calculan sobre las mismas letras proposiciones de ϕ y, en forma similar, $V_3(\psi) = V_2(\psi) = 0$. Por la tabla de verdad de $\vee$ también se sigue que $V_3(\phi \vee \psi) = 0$. Esto último es imposible en razón de haber supuesto que $\phi \vee \psi$ es una tautología; de manera que el supuesto de que la conclusión es falsa no puede sostenerse.

Ejercicio 12

(1) Cinco valuaciones: p/q/r = 1/1/0 ó 0/1/1 ó 0/1/0 ó 0/0/1 ó 0/0/0.
(2) Tres valuaciones: 0/1/0 y 0/0/0 ya no califican.
(3) Dos valuaciones: 0/0/1 ya no califican. Quedan, p/q/r = 1/1/0 y 0/1/1.

Ejercicio 13

(a) $\neg(\neg p \vee q \vee \neg r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee \neg r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee r)$

(bi) Por la prueba del teorema 5, toda fórmula ϕ es equivalente a una fórmula $\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$, siendo que en $\phi_1 \ldots \phi_n$ sólo aparecen $\wedge$ y $\neg$. Se sigue que la fórmula ϕ es equivalente a $\neg(\neg\phi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\phi_n)$ en la cual las únicas conectivas que aparecen son $\wedge$ y $\neg$. Luego, $\wedge$y $\neg$ forman un conjunto funcionalmente completo.

(bii) Supóngase que en ϕ sólo aparecen $\vee$ y $\neg$, entonces se pueden reemplazar sucesivamente todas las subfórmulas de la forma $\psi \vee \chi$ en ϕ por $\neg\psi \rightarrow \chi$. Como $\psi \vee \chi$ es equivalente a $\neg\psi \rightarrow \chi$, obtenemos así una fórmula que es equivalente a ϕ y que tiene sólo $\rightarrow$ y $\neg$.

(c) Como puede observarse en la tabla de verdad $\neg\phi$ es equivalente a $\phi \downarrow \phi$.

c. ϕ	$\neg\phi$	$\phi \downarrow \phi$
1	0	0
0	1	1

También queda claro que $\phi \vee \psi$ es equivalente a $\neg(\phi \downarrow \phi)$ y, por tanto, también a $(\phi \downarrow \psi)\downarrow(\phi \downarrow \psi)$. Debido a que $\vee$ junto con $\neg$ forman un conjunto de conectivas funcionalmente completo, toda fórmula es equivalente a otra fórmula en la que sólo aparezcan las conectivas $\vee$ y $\neg$. Éstas pueden reemplazarse por apariciones de $\downarrow$, como se hizo más arriba. Por ende, $\downarrow$ es en sí mismo un conjunto completo de conectivas. La conjunción que corresponde a $\downarrow$ es *ni ...ni.*

Ejercicio 14

La cantidad es 6 con las siguientes representaciones: $p \rightarrow p$, p, q, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $(p \rightarrow q) \rightarrow q$. (Nótese que la última es una definición de $p \vee q$ en términos de implicación.) Aplicaciones ulteriores de $\rightarrow$ no nos conducirán a una nueva tabla de verdad.

Ejercicio 15

$p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $p \rightarrow q$, $\neg p \vee \neg q$

Ejercicio 16

$\wedge(0)$ es la función de verdad unaria que arroja un valor constante 0; $\wedge(1)$ es la función identidad sobre valores de verdad.

Capítulo 3

Ejercicio 1

(a) Ajp.
Diccionario: Axy: x es más agradable que y; j: Juan: p: Pedro.

(b) Ac $\wedge\neg$Ae
Diccionario: Ax: x es agradable; c: Carlos; e: Elsa.

(c) Ipcba
Diccionario: Ixyzw: x se fue con y en z a w; p: Pedro; c: Carlos; b: la bicicleta nueva de María; a: Zandvoort.

(d) $\neg$Opnc $\rightarrow$ Opne

Diccionario: Oxyz: x oyó y por boca de z; n: las novedades; e: Elsa; c: Carlos; p: Pedro.

(e) $Ac \lor Ic$
Diccionario: Ax: x es aburrido; Ix: x es irritante; c: Carlos.

(f) $Mm \land Fm$
Diccionario: Fx: x es feliz; Mx: x es una mujer; m: María.

(g) Ab
Diccionario: Ax: x es el autor más vendido; b: Bee.

(h) $Hce \lor Pce$
Diccionario: Hxy: x e y son hermanos; Pxy: x e y son primos; c: Carlos; e: Elsa.

(i) Ajp
Diccionario: Axy: x e y son amigos intimos; j: Juan; p: Pedro.

(j) Ajj
Diccionario: Axy: x admira a y; j: Juan.

(k) $Aj \rightarrow Ljj$
Diccionario: Ax: x arriesga; Lxy: x lastima a y; j: Juan.

(l) $(Ajm \land Amj) \land (\neg Ijm \land \neg Imj)$
Diccionario: Axy: x ama profundamente a y; Ixy: x hace feliz a y; j: Juan; m: María.

Ejercicio 2

(a) $\forall x Axm$
Diccionario: Axy: x ama a y; m: María.

(b) $\exists x(Px \land Hx)$
Diccionario: Px: x es político; Hx: x es honesto.

(c) $\neg \exists x(Px \land \neg Ax)$
Diccionario: Px: x es político; Ax: x es ambicioso.

(d) $\neg \forall x(Ax \rightarrow \neg Hx)$
Diccionario: Hx: x es honesto; Ax: x es ambicioso.

(e) $\forall x((Ax \land Rx) \rightarrow Ix)$
Diccionario: Rx: x es rubio; Ax: x es un autor; Ix: x es inteligente.

(f) $\exists x(Ax \land Cx)$
Diccionario: Ax: x es uno de los autores más vendidos; Cx: x es ciego.

(g) $Ap \land \exists x(Lx \land Vx \land Epx)$
Diccionario: Ax: x es autor; Lx: x es libro; Vx: x es el más vendido; Exy: x escribió y; p: Pedro.

Ejercicio 3

Clase de fórmula	Alcance	Libre	Oración
(i) Existencial	$\exists$x: Axy $\wedge$ Bx	y	no
(ii) Conjunción	$\exists$x: Axy	y x en Bx	no
(iii) Implicación	$\exists$x: $\exists$yAxy $\exists$y:Axy	x en Bx	no
(iv) Existencial	$\exists$x: $\exists$yAxy $\rightarrow$ Bx $\exists$y: Axy	ninguna	sí
(v) Implicación	$\exists$x: $\exists$yAxy $\exists$y: Axy	x en Bx	no
(vi) Universal	$\forall$x: $\neg\exists$yAxy $\exists$y: Axy $\exists$w: Cxw	ninguna	sí
(vii) Implicación	$\forall$y: $\neg$Axy $\vee$ Bx	x y en Cy	no
(viii) Existencial	$\exists$x: Axy $\vee$ By	y	no
(ix) Disyunción	$\exists$x: Axx $\exists$y: By	ninguna	sí
(x) Existencial	$\exists$x: $\exists$yAxy $\vee$ By $\exists$y: Axy	y en By	no
(xi) Universal	$\forall$x: $\forall$y((Axy $\wedge$ By) $\rightarrow$ $\exists$wCxw) $\forall$y: (Axy $\wedge$ By) $\rightarrow$ $\exists$wCxw $\exists$w: Cxw	ninguna	sí
(xii) Universal	$\forall$x: $\forall$yAyx $\rightarrow$ By $\forall$y: Ayx	y en By	no
(xiii) Implicación	$\forall$x: $\forall$yAyy $\forall$y: Ayy	x en Bx	no

Ejercicio 4

La profundidad p(ϕ) de una fórmula arbitraria ϕ está dada por la siguiente definición inductiva:

$p(\phi) = 0$ para fórmulas atómicas ϕ.
$p(\neg\phi) = p(\phi)$
$p(\phi \circ \psi) = \text{máximo}(p(\phi), p(\psi))$ para conectivas binarias $\circ$.
$p(Qx\phi) = p(\phi) + 1$ para cuantificadores Q.

Ejercicio 5

(i) Traducción: $\forall x(Dx \vee Ax)$
Diccionario: Ax: x es amargo; Dx: x es dulce.
Dominio: cosas comestibles.

(ii) Traducción: $\forall xDx \vee \forall xAx$
Diccionario: Ax: x es amargo; Dx: x es dulce.
Dominio: cosas comestibles.

(iii) Traducción: $\forall x(Bx \rightarrow Mx)$
Diccionario: Bx: x es una ballena; Mx: x es un mamífero.
Dominio: animales.

(iv) Traducción: Bt
Diccionario: Bx: x es una ballena; t: Teodoro.
Dominio: animales.

(v) Traducción: $\exists x(Tax \wedge Bx \wedge Nx)$
Diccionario: Txy: x tiene y; Bx: x es una bicicleta; Nx: x es nueva; a: Ana María.
Dominio: personas y medios de transporte.

(vi) Traducción: $\exists x(Pex \wedge Ax \wedge Gx)$
Diccionario: Pxy: x es propietario de y; Ax: x es un automóvil; Gx: x es grande; e: este hombre.
Dominio: personas y medios de transporte.

(vii) Traducción: $\forall x\exists yAxy$
Diccionario: Axy: x ama a y.
Dominio: personas.

(viii) Traducción: $\exists x\forall yAyx$
Diccionario: Axy: x ama a y.
Dominio: personas.

(ix) Traducción: $\neg\exists x(Cx \wedge Rexc)$
Diccionario: Cx: x es una cosa; Rxyz: x recibe y de parte de z; e: Elsie; c: Carlos.
Dominio: personas y cosas.

(x) Traducción: $\exists x(Rx \wedge Elxj) \wedge \neg\exists x(Cx \wedge Elxp)$
Diccionario: Rx: x es un regalo; Cx: x es una cosa; Exyz: x recibe y de parte de z; l: Lina; j: Juan; p: Pedro.
Dominio: personas y cosas.

(xi) Traducción: $\exists x(Px \wedge (Rxb \vee Txb))$
Diccionario: Px: x es una persona; Rxy: x robó y; Txy: x tomó prestado y; b: nueva bicicleta de María.
Dominio: personas y cosas.

(xii) Traducción: $\forall x(Gxa \rightarrow Ctx)$
Diccionario: Gxy: x es una galletita de y; Cxy: x come y; a: Yo; t: tú.

Dominio: personas y cosas comestibles.

(xiii) Traducción: $\neg\exists x\neg\exists yAyx$
Diccionario: Axy: x ama a y.
Dominio: personas.

(xiv) Traducción: $\forall x(Lx \rightarrow Ix) \rightarrow Ia$
Diccionario: Lx: x es un lógico; Ix: x es inteligente; a: Alfredo.
Dominio: personas.

(xv) Traducción: $\exists x(Hx \wedge \neg Ax) \wedge \exists x(Mx \wedge \neg Ax)$
Diccionario: Hx: x es un hombre; Ax: x es maduro; Mx: x es una mujer.
Dominio: personas.
La traducción $\exists x\exists y((Hx \wedge My) \wedge (\neg Ax \wedge \neg Ay))$ es correcta, pero $\exists x(Hx \wedge Mx \wedge \neg Ax)$ no es correcta porque supone que x es tanto hombre como mujer.

(xvi) Traducción: $\forall x((Px \wedge Lx) \rightarrow \neg Mx)$
Diccionario: Px: x es un perro; Lx: x ladra; Mx: x muerde.
Dominio: animales.

(xvii) Traducción: $\forall x(Px \wedge Djx) \rightarrow \neg\exists y(Ey \wedge Mjxy)$
Diccionario: Px: x es un perro; j: Juan; Dxy: x es dueño de y; Ex: x es una persona; Mxyz: x muestra y a z.
Dominio: personas y animales.

(xviii) Traducción: $\exists x(Exh \wedge Hx \wedge Oxh)$
Diccionario: Exy: x es esposa de y; Hx: x es hermosa; Oxy: x odia a y; h: Haroldo.
Dominio: personas.

(xix) Traducción: $\neg\exists x(Vxu \wedge \neg Nxu)$
Diccionario: Vxy: x vive en y; Nxy: x nació en y; u: Urk.
Dominio: personas y lugares.

(xx) Traducción: $\exists x(Lx \wedge Pjxp \wedge \neg Djxp)$
Diccionario: Lx: x es un libro; Pxyz: x pide prestado y a z; Dxyz: x devuelve y a z; j: Juan; p: Pedro.
Dominio: personas y cosas.

(xxi) Traducción: $\exists x\exists y(Axy \wedge Jyx \wedge Oxy)$
Diccionario: Axy: x es agradable con y; Jxy: x es jefe de y; Oxy: x es ofendido por y.
Dominio: personas.

(xxii) Traducción: $\forall x\forall y((Px \wedge Ay \wedge \exists z(Pz \wedge Oxyz)) \rightarrow Cxy)$
Diccionario: Px: x es una persona; Ax: x es un acto; Oxyz: x promete y a z; Hxy: x debe hacer y.
Dominio: personas y acciones.

(xxiii) Traducción: $\forall x((Px \wedge (Vxa \vee Cxa)) \rightarrow \exists y(Ay \wedge Txy)$
Diccionario: Px: x es una persona; Vxy: x vive en y; Cxy: x vive cerca de y; Ax: x es un automóvil; Dxy: x tiene su propio y; a: Amherst
Dominio: personas, automóviles y lugares.

(xxiv) Traducción: $\forall x((Px \wedge Vtx) \rightarrow \neg\exists y(Cy \wedge Dtyx))$
Diccionario: Px: x es una persona; Vxy: x ve a y; Cx: x es una carta; Dxyz: x debe entregar y a z; t: tú.
Dominio: personas y medios de comunicación.

(xxv) Traducción: $\forall x((Bx \wedge Dpx) \rightarrow Gpx)$
Diccionario: Bx: x es un burro; Dxy: x es dueño de y; Gxy: x golpea a y; p: Pedro.
Dominio: personas y animales.

(xxvi) Traducción: $\forall x((Px \wedge \neg\exists y(Ay \wedge Dxy)) \rightarrow \exists y(My \wedge Dxy))$
Diccionario: Px: x es una persona; Ax: x es un automóvil; Dxy: x es dueño de y; Mx: x es una motocicleta.
Dominio: personas y medios de transporte.

(xxvii) Traducción: $\forall x(\neg Mx \rightarrow Px) \rightarrow Pa$
Diccionario: Mx: x puede hacer un movimiento; Px: x ha perdido; a: yo
Dominio: personas.

(xxviii) Traducción: $\exists x(Px \wedge \exists y(My \wedge Ixy \wedge Uxy))$
Diccionario: Px: x es una persona; Mx: x es una motocicleta; Ixy: x pide prestado y; Uxy: x está usando y.
Dominio: personas y motocicletas.

(xxix) Traducción: $\exists x\exists y\exists z(Px \wedge Py \wedge Mz \wedge Ixzy \wedge \neg Dxzy)$
Diccionario: Px: x es una persona; Mx: x es una motocicleta; Ixyz: x pide prestado y a z; Dxyz: x devuelve y a z.
Dominio: personas y motocicletas.

(xxx) Traducción: $\exists xRx \rightarrow \forall yEy$
Diccionario: Rx: x hace ruido; Ex: x se enoja.
Dominio: personas.

(xxxi) Traducción: $\forall x(Rx \rightarrow \forall yEyx)$
Diccionario: Rx: x hace ruido; Exy: x se enoja con y.
Dominio: personas.

Ejercicio 6

(i) y (iii) son superficiales; (ii) y (iv) no lo son; pero (iv) es equivalente a la fórmula $\exists x(\forall yRxy \wedge \forall zSxz)$ que sí es superficial.

Ejercicio 7

(a) $I(a_1) = P_1$, $I(a_2) = P_2$, $I(a_3) = P_3$, $I(C) = \{P_1, P_2\}$
$I(F) = \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_3, P_2\rangle, \langle P_3, P_3\rangle\}$

(b)(i) Esta fórmula expresa que hay un punto que flecha a dos puntos diferentes, uno de los cuales está circulado y el otro no. Esto se cumple al menos para P_1, de manera que la oración es verdadera. La justificación, empleando la definición 7, se realiza de la siguiente forma: $V_M(Fa_1a_2) = 1$ y $V_M(Fa_1a_3) = 1$, porque $\langle P_1, P_2\rangle$ y $\langle P_1, P_3\rangle$ son elementos de I(F). $V_M(Ca_2) = 1$, pues $P_2 \in I(C)$, mientras que $V_M(Ca_3) = 0$, porque $P_3 \notin I(C)$. De esto, y de la cláusula (ii) se sigue que $V_M(\neg Ca_3) = 1$. De esto, y de la cláusula (iii) se sigue que $V_M(Fa_1a_2 \wedge Ca_2 \wedge Fa_1a_3 \wedge \neg Ca_3) = 1$. De esto y de la cláusula (viii) se sigue que $V_M(\exists z(Fa_1a_2 \wedge Ca_2 \wedge Fa_1z \wedge \neg Cz)) = 1$. Aplicando dos veces más (viii) obtenemos en primer lugar $V_M(\exists y\exists z(Fa_1y \wedge Cy \wedge Fa_1z \wedge \neg Cz)) = 1$, y, en segundo lugar, obtenemos

$V_M(\exists x\exists y\exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)) = 1$.

(b)(ii) Esta fórmula expresa que cada punto se flecha a sí mismo. Esto es falso. No se cumple para P_1. Justificación completa: de $\langle P_1, P_1 \rangle \notin I(F)$ se sigue directamente que $V_M(Fa_1a_1) = 0$. De esto, junto con la cláusula (vii) se sigue inmediatamente que $V_M(\forall xFxx) = 0$.

(b)(iii) Esta fórmula expresa que cualquier punto se flecha a sí mismo si y sólo si dicho punto no está circulado. Esto es verdadero porque sólo P_3 se flecha a sí mismo y sólo P_3 no está circulado. Justificación completa: $V_M(Fa_1a_1) = 0$ y $V_M(Ca_1) = 1$. De manera que $V_M(\neg Ca_1) = 0$ y $V_M(Fa_1a_1 \leftrightarrow \neg Ca_1) = 1$. Puesto que $V_M(Fa_2a_2) = 0$ y $V_M(Ca_2) = 1$, obtenemos que $V_M(\neg Ca_2) = 0$ y que $V_M(Fa_2a_2 \leftrightarrow \neg Ca_2) = 1$. Finalmente, puesto que $V_M(Fa_3a_3) = 1$ y $V_M(Ca_3) = 0$ obtenemos $V_M(\neg Ca_3) = 1$ y $V_M(Fa_3a_3 \leftrightarrow \neg Ca_3) = 1$. Ahora puede aplicarse la cláusula (vii).

(b)(iv) Esta fórmula expresa que hay un punto que flecha a otro punto (no necesariamente diferente) ninguno de los cuales está circulado. Esto es verdadero gracias al agregado de *no necesariamente diferentes*. P_3 se flecha a sí mismo y P_3 no está circulado. Justificación: $V_M(Fa_3a_3) = 1$ y $V_M(Ca_3) = 0$. Así $V_M(\neg Ca_3) = 1$. Esto es, $V_M(Fa_3a_3 \wedge \neg Ca_3 \wedge \neg Ca_3) = 1$, y aplicando dos veces (viii) se sigue que $V_M(\exists y(Fa_3y \wedge \neg Ca_3 \wedge \neg Cy)) = 1$ y $V_M(\exists x\exists y(Fxy \wedge \neg Cx \wedge \neg Cy)) = 1$.

(b)(v) Esta fórmula expresa que todo punto que se flecha a sí mismo, flecha a algún punto que está circulado. Esto es verdadero: P_3 es el único punto que se flecha a sí mismo, y P_3 flecha a P_2, el cual está circulado. Justificación: $V_M(Fa_1a_1) = 0$. Así $V_M(Fa_1a_1 \rightarrow \exists y(Fa_1y \wedge Cy)) = 1(*)$. También: $V_M(Fa_2a_2) = 0$. Así $V_M(Fa_2a_2 \rightarrow \exists y(Fa_2y \wedge Cy)) = 1(**)$. Respecto de a_3 se obtiene lo siguiente: $V_M(Fa_3a_2) = 1$ y $V_M(Ca_2) = 1$. Por consiguiente, $V_M(Fa_3a_2 \wedge Ca_2) = 1$, y también $V_M(Fa_3a_3 \rightarrow \exists y(Fa_3y \wedge Cy)) = 1$. De lo anterior, junto con la cláusula (vii) y (*) y (**), se sigue que $V_M(\forall x(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy))) = 1$.

(b)(vi) Esta fórmula expresa que cada punto que está circulado flecha a algún punto. Esto no es cierto: P_2 está circulado y no flecha a ningún punto. Justificación: $V_M(Fa_2a_1) = 0$ y $V_M(Fa_2a_2) = 0$ y $V_M(Fa_2a_3) = 0$. De esto se sigue que $V_M(\exists yFa_2y) = 0$. De la misma forma $V_M(Ca_2) = 1$. Así $V_M(Ca_2 \rightarrow \exists yFa_2y) = 0$, y finalmente, $V_M(\forall x(Cx \rightarrow \exists yFxy)) = 0$.

(b)(vii) Esta fórmula expresa que hay dos puntos tales que están vinculados por una sola flecha y tales que el primero puede flechar también indirectamente al segundo a través de un punto intermedio. Esto es verdadero: hay una flecha que parte de P_1 y apunta hacia P_2, y no en sentido inverso, mientras que hay una flecha que apunta desde P_1 hacia P_3 y desde P_3 hacia P_2. Justificación: $V_M(Fa_1a_2) = 1$ y $V_M(Fa_2a_1) = 0$. Así, $V_M(\neg Fa_2a_1) = 1$. Además, $V_M(Fa_1a_3) = 1$ y $V_M(Fa_3a_2) = 1$. Por consiguiente, $V_M(Fa_1a_2 \wedge \neg Fa_2a_1 \wedge \exists z(Fa_1z \wedge Fza_2)) = 1$. Aplicando dos veces (viii) obtenemos $V_M(\exists x\exists y(Fxy \wedge \neg Fyx \wedge \exists z(Fxz \wedge Fzy))) = 1$.

Ejercicio 8

(i) La forma más instructiva es elegir g tal que $g(x) = P_1$, $g(y) = P_2$, y $g(z) = P_3$

(por supuesto, es irrelevante la g que se elija). En esta asignación se cumple que $\langle g(x), g(y)\rangle \in I(F)$, porque $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle P_1, P_2\rangle$, y en forma similar $\langle g(x), g(z)\rangle \in I(F)$. Esto significa que $V_{M,g}(Fxy) = 1$ y $V_{M,g}(Fxz) = 1$. También se cumple que $g(y) \in I(C)$. Así $V_{M,g}(Cy) = 1$, mientras que $g(z) \notin I(C)$. Así $V_{M,g}(Cz) = 0$ y $V_{M,g}(\neg Cz) = 1$. Lo anterior conjuntamente nos da $V_{M,g}(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz) = 1$. Dado que $g(z) = P_3$, se sigue que $g[z/P_3] = g$ y así $V_{M\,g[z/P_3]}(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz) = 1$ se cumple, resultando en $V_{M,g}(\exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)) = 1$. De la misma forma $g[y/P_2] = g$. Así, se cumple que $V_{M,g[y/P_2]}(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz) = 1$, y así $V_{M,g}(\exists y\exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)) = 1$. Igualmente, se cumple que $g[x/P_1] = g$; y se sigue que $V_{M\,g[x/P_1]}(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz) = 1$. De esto se sigue que $V_{M,g}(\exists x\exists y\exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)) = 1$. Podemos escribir $V_M(\exists x\exists y\exists z(Fxy \wedge Cy \wedge Fxz \wedge \neg Cz)) = 1$ pues la fórmula es una oración.

(iii) Dado que $\langle P_1, P_1\rangle \notin I(F)$, se cumple que $V_{M\,g[x/P_1]}(Fxx) = 0$. Ahora, se cumple que $P_1 \in I(C)$, de manera que tanto $V_{M\,g[x/P_1]}(Cx) = 1$ como $V_{M,g[x/P_1]}(\neg Cx) = 0$ se cumplen. En consecuencia, se cumple que (*)$V_{M,g[x/P_1]}(Fxx \leftrightarrow \neg Cx) = 1$. (Todo esto es independiente de los valores que asigne g.) Exactamente de la misma forma, reemplazando P_1 por P_2, obtenemos (**)$V_{M\,g[x/P_2]}(Fxx \leftrightarrow \neg Cx) = 1$. Ahora $\langle P_3, P_3\rangle \in I(F)$, de manera que $V_{M\,g[x/P_3]}(Fxx) = 1$. Dado que $P_3 \notin I(C)$, $V_{M\,g[x/P_3]}(Cx) = 0$. De lo anterior se sigue que $V_{M\,g[x/P_3]}(\neg Cx) = 1$. Por consiguiente, $V_{M,g[x/P_3]}(Fxx \leftrightarrow \neg Cx) = 1$, y de esto, junto con (*) y (**), también se sigue que $V_{M,g}(\forall x(Fxx \leftrightarrow \neg Cx) = 1$.

(v) Dado que $\langle P_1, P_1\rangle \notin I(F)$, se cumple $V_{M\,g[x/P_1]}(Fxx) = 0$, y así (*)$V_{M,g[x/P_1]}(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy)) = 1$. De la misma forma se obtiene (**) $V_{M\,g[x/P_2]}(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy)) = 1$. Dado que se cumple que $\langle P_3, P_2\rangle \in I(F)$ y que $P_2 \in I(C)$, también se cumple que $V_{M,g[x/P_3][y/P_1]}(Fxy) = 1$ y que $V_{M\,g[x/P_3][y/P_1]}(Cy) = 1$. Y, por ende, se cumple que $V_{M,g[x/P_3][y/P_1]}(Fxy \wedge Cy) = 1$. De lo anterior obtenemos que $V_{M,g[x/P_3]}(\exists y(Fxy \wedge Cy)) = 1$, y así $V_{M,g[x/P_3]}(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy)) = 1$. De esto, junto con (*) y (**), se sigue que $V_{M,g}(\forall x(Fxx \rightarrow \exists y(Fxy \wedge Cy))) = 1$.

Ejercicio 9

(i) Hay que probar que para todo M, si $V_M(\forall x\phi) = 1$, entonces también $V_M(\exists x\phi) = 1$. Dado que en este caso se habrá probado que $V_M(\forall x\phi) = 1$ y $V_M(\exists x\phi) = 0$ son imposibles. Así se habrá probado que para cada modelo M, $V_M(\forall x\phi \rightarrow \exists x\phi) = 1$. Supóngase ahora que $V_M(\forall x\phi) = 1$. Esto significa que para cada constante c, $V_M([c/x]\phi) = 1$. Dado que D no es vacío, hay al menos una constante c, tal que $V_M([c/x]\phi) = 1$, lo cual prueba que es el caso que $V_M(\exists x\phi) = 1$.

(v) Supóngase que $V_M(\exists x(\phi \wedge \psi)) = 1$. De esto se sigue que hay una constante c tal que $V_M([c/x](\phi \wedge \psi)) = 1$. Hay que probar que $V_M(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) = 1$. La fórmula $[c/x](\phi \wedge \psi)$ es $[c/x]\phi \wedge [c/x]\psi$. Así $V_M([c/x]\phi \wedge [c/x]\psi) - 1$. De esto se sigue tanto que $V_M([c/x]\phi) = 1$ como que $V_M([c/x]\psi) = 1$, y de esto que $V_M(\exists x\phi) = 1$ y $V_M(\exists x\psi) = 1$, de manera que $V_M(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) = 1$.

(ii) Supóngase $V_{M,g}(\forall x\phi) = 1$. Hay que probar que $V_{M,g}([t/x]\phi) = 1$. $V_{M,g}(\forall x\phi) = 1$ significa que para todo $d \in D$, $V_{M,g[x/d]}(\phi) = 1$. En particular, $[[t]]_{M,g}$ es un elemento tal de D. Por consiguiente $V_{M,g[x/[[t]]_{M,g}]}(\phi) = 1$. De esto se sigue que $V_{M,g}([t/x]\phi) = 1$ (en sentido estricto esto debería probarse por inducción sobre la longitud de ϕ).

(vii) Supóngase que $V_{M,g}(\forall xAxx) = 1$. De esto se sigue que $V_{M,g[x/d]}(Axx) = 1$, para todo $d \in D$. Esto significa que para todo $d \in D$, $\langle d, d \rangle \in I(A)$. Ahora $g[x/d][y/d](x) = d$ y $g[x/d][y/d](y) = d$. Así, para cada $d \in D$, $\langle g[x/d][y/d](x), g[x/d][y/d](y) \rangle \in I(A)$ es verdadero, lo cual significa que para todo $d \in D$ se cumple que $V_{M,g[x/d][y/d]}(Axy) = 1$ y también que $V_{M,g[x/d]}(\exists yAxy) = 1$. De esto se sigue inmediatamente que $V_{M,g}(\forall x\exists yAxy) = 1$, que era lo que había que probar.

Ejercicio 10

Hay ocho posibilidades, las cuales pueden ordenarse en forma descendente como sigue, según el sentido de la implicación:

$$\begin{array}{ccc} & \{\forall x\forall yRxy,\ \forall y\forall xRxy\} & \\ & \downarrow \qquad \downarrow & \\ \{\exists x\forall yRxy\} & & \{\exists y\forall xRxy\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\forall y\exists xRxy\} & & \{\forall x\exists yRxy\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \{\exists x\exists yRxy,\ \exists y\exists xRxy\} & \end{array}$$

Ejercicio 11

(a) Traducción: $\neg\exists x(Hx \wedge Ixx)$
Dominio: personas.
Diccionario: Hx: x es hombre; Ixy: x es más inteligente que y.

(b) Traducción: $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(Hy \wedge y \neq x \wedge Iyx))$
Dominio: personas.
Diccionario: Hx: x es hombre; Ixy: x es más inteligente que y.

(c) Traducción: $\exists x(Hx \wedge \forall y(y \neq x \leftrightarrow Ixy))$.
Dominio: personas.
Diccionario: Hx: x es hombre; Ixy: x es más inteligente que y.

(d) Traducción: $\exists x(\forall y(y \neq x \rightarrow Ixy) \wedge x = p)$
Dominio: personas.
Diccionario: Ixy: x es más inteligente que y; p: el primer ministro.

(e) Traducción: $\exists x\exists y(Rx \wedge Ry \wedge x \neq y)$
Dominio: personas.
Diccionario: Rx: x es reina.

(f) Traducción: $\forall x\forall y\forall z((Rx \wedge Ry \wedge Rz) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$

Dominio: personas.
Diccionario: Rx: x es reina.

(g) Traducción: $\neg\exists x(Rx \wedge x \neq b) \wedge Rb$
Dominio: personas.
Diccionario: Rx: x es reina.; b: Beatriz.
Comentario: si consideráramos que la oración supone, pero no lo expresa, que Beatriz es una reina, entonces Rb no se consignaría.

(h) Traducción: $\forall x\forall y((x \neq y \wedge Ixy) \rightarrow ((Px \wedge \neg Py) \vee (\neg Px \wedge Py)))$
Dominio: personas.
Diccionario: Ixy: x e y realizan un intercambio; Px: x saldrá perjudicado.

(i) Traducción: $\forall x\exists y\exists z(y \neq z \wedge \forall w(Pxw \leftrightarrow (w = y \vee w = z)))$
Dominio: personas.
Diccionario: Pxy: y es progenitor de x.

(j) Traducción: $\forall x(Gmx \rightarrow Hx)$
Dominio: personas.
Diccionario: m: María, Gxy: x gusta de y; Hx: x es hombre.

(k) Traducción: $\forall x(Acx \leftrightarrow (x = e \vee x = b))$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y; c: Carlos; e: Elsa; b: Beatriz.

(l) Traducción: $\forall x(Acx \leftrightarrow Abx)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y; c: Carlos; b: Beatriz.

(m) Traducción: $\neg\exists x\exists y(Cxy \wedge \forall z(Ayz \leftrightarrow z = m))$
Dominio: personas.
Diccionario: Cxy: x comprende a y; Axy: x ama a y; m: María.

(n) Traducción: $\forall x(Aax \rightarrow Axx)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ayuda a y; a: yo.

(o) Traducción: $\forall x\exists y\forall z(Axz \leftrightarrow z = y)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y.

(p) Traducción: $\forall x\exists y\forall z((Axz \wedge x \neq z) \leftrightarrow z = y)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y.

(q) Traducción: $\forall x\forall y(x \neq y \rightarrow \exists w\exists z(w \neq z \wedge Axw \wedge Ayz))$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y.

(r) Traducción: $\forall x\forall y(Axy \leftrightarrow x = y)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y.

(s) Traducción: $\forall x(\forall y(Axy \leftrightarrow x \neq y) \rightarrow Lx)$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y; Lx: x es altruista.

(t) Traducción: $\forall x\forall y((Lx \wedge Ly \wedge x \neq y) \rightarrow (Axy \wedge Ayx))$
Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y; Lx: x es altruista.

(u) Traducción: $\forall x\forall y((Axy \wedge Ayx \wedge x \neq y) \rightarrow (Fx \wedge Fy))$

Dominio: personas.
Diccionario: Axy: x ama a y; Fx: x es feliz.

Ejercicio 12

(a)
(i) Significa: Hay un parágrafo que depende de sí mismo. Falsa.
(ii) Significa: Hay dos parágrafos distintos que dependen mutuamente. Falsa.
(iii) Significa: Hay un parágrafo que no depende de ningún otro y ningún parágrafo depende de él. Verdadera; §1.2.
(iv) Significa: Hay exactamente dos parágrafos de los cuales no depende ningún parágrafo. Verdadera; §§1.2 y 1.3.
(v) Significa: Hay un parágrafo del cual dependen exactamente dos parágrafos. Verdadera; §4.1.
(vi) Significa: Hay dos parágrafos de los cuales dependen los mismos parágrafos (realmente existentes). Verdadera: e.g., §§2.3 y 3.2.
(vii) Significa: Hay una secuencia de siete parágrafos tal que cada parágrafo depende del previo. Falso; la secuencia de este tipo más larga (e.g., §§1.3-1.4-2.1-2.2-2.3-3.4) tiene longitud 6.
(viii) Significa: Dados tres parágrafos diferentes y mutuamente independientes no hay ningún parágrafo que dependa de los tres. Falsa; §3.4 depende de §§2.3, 3.2 y 3.3.
(ix) Significa: No hay dos parágrafos distintos y mutuamente independientes de los cuales dependan dos parágrafos distintos y mutuamente independientes. Falsa; §§3.2 y 3.3 dependen de §§2.2 y 3.1.

(b)
(i) Significa: Una línea es aquello sobre lo cual hay algo y viceversa. Verdadera.
(ii) Significa: Para cada par de líneas hay un punto que está sobre ambas. Verdadera.
(iii) Significa: Por cada par de puntos pasa una línea. Falsa; ninguna linea pasa por P_1 y por P_3.
(iv) Significa: Hay dos líneas tales que cada punto aparece sobre al menos una de ellas. Verdadera.
(v) Significa: Hay una línea que pasa por exactamente tres puntos. Verdadera; e.g., sobre l_3.
(vi) Significa: Hay dos puntos distintos y dos líneas distintas tales que ambos puntos están sobre las dos líneas. Falsa; dicha situación es imposible.
(vii) Significa: Si un punto está entre dos puntos dados en un cierto orden, entonces también está entre ellos cuando se invierte el orden. Verdadera.
(viii) Significa: Sobre cada línea hay tres puntos, uno de los cuales está entre los otros dos. Falsa; véase l_4.
(ix) Significa: De cada tres puntos que están sobre una línea hay exactamente uno que está entre los otros dos. Verdadera.
(x) Significa: Cada punto que está sobre dos líneas diferentes está entre dos puntos. Falsa; véase P_1 y P_3.

Ejercicio 13

Todas las interpretaciones asignan a R uno de los patrones que se exhiben en la siguiente figura:

Ejercicio 14

(i) "Aplique $\forall y$ a x": resulta una contradicción, la cual no es verdadera en ningún modelo.

(ii) Los únicos modelos para esta fórmula o bien tienen un objeto (con I(R) vacía e I(P) arbitraria), o tienen dos objetos, uno de los cuales tiene I(P) y el otro no, con la correspondiente I(R) como se muestra en la figura:

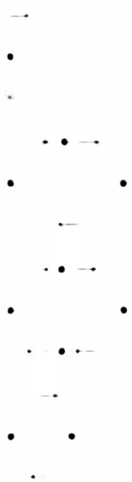
P $\neg$P

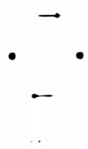
Es imposible más de una P o $\neg$P. Alguna flecha-R debería, en tal caso, estar dentro de I(P) o dentro de la interpretación de $\neg$P (por el primer conjuntivo), lo cual está prohibido por el segundo conjuntivo.

(iii) Los modelos para esta fórmula contienen al menos una cadena ascendente infinita de objetos d_1I(R)d_2I(R)d_3..., que alternativamente están en I(P) y no están en I(P).

Ejercicio 15

Sólo pueden ser grupos de "lazos finitos", de las formas que se exhiben en la siguiente figura:





Escribir en detalle el argumento según el cual éstas son las únicas posibilidades ocuparía mucho espacio. En todo caso, una de las ventajas de la semántica de la lógica de predicados sobre su contrapartida proposicional es que a menudo nos permite pensar pictóricamente acerca de lo que es verdadero y lo que no lo es.

Ejercicio 16

(i) es persistente: el "testigo" de I(P) siéndolo en una de sus ampliaciones.

(ii) no es persistente: puede refutarse agregando objetos que carezcan de la propiedad P.

(iii) no es persistente: alguien puede amar a todos en San Francisco, sin que lo mismo sea verdadero para todo el hemisferio norte.

(iv) es persistente: su verdad se reduce a la existencia de algún par de objetos para los que no se cumpla la relación I(R), y tal par también refutará a $\forall x \forall y Rxy$ en todas sus ampliaciones. (En general, sólo serán persistentes, en un sentido técnico no explicado aquí, las fórmulas *existenciales* de lógica de predicados.)

Ejercicio 17

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)
reflexiva	no	no	no	sí	no	no	no	sí	no
irreflexiva	sí	sí	sí	no	sí	sí	sí	no	sí
simétrica	no	no	no	sí	no	no	no	no	sí
asimétrica	sí	sí	sí	no	sí	sí	sí	no	no
antisimétrica	sí	sí	sí	no	sí	sí	sí	sí	no
transitiva	no	sí	sí	sí	no	sí	sí	sí	no
conexa	no	no	no	no	no	no	sí	no	sí

Ejercicio 18

(i) Si H es reflexiva, entonces evidentemente no es necesario que –H lo sea, mientras que $\check{H}$ debe serlo.

(ii) Si H es simétrica, entonces también lo es –H: $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ es equivalente a $\forall x \forall y(\neg Ryx \to \neg Rxy)$; ésta es equivalente a $\forall y \forall x(\neg Rxy \to \neg Ryx)$, y esta última a $\forall x \forall y(\neg Rxy \to \neg Ryx)$. Así, si $I(R) = H$, y H es simétrica, entonces $\langle x, y \rangle \in -H$ implica $\langle y, x \rangle \in -H$. De la misma forma, la simetría de H implica la de H.

(iii) La transitividad también se preserva en las conversas: si $\langle x, y \rangle \in H$, $\langle y, z \rangle \in \check{H}$, entonces $\langle y, x \rangle \in H$, $\langle z, y \rangle \in H$; así, por la transitividad de H, $\langle z, x \rangle \in H$, i.e., $\langle x, z \rangle \in H$. Pero, por ejemplo, la identidad es una relación transitiva, mientras que la no identidad no lo es (véase ejercicio 17).

Capítulo 4

Ejercicio 1

(a) Véase figura i. A pratir de esta figura queda claro que $p \wedge q \models p$.
(b) Para el resto, damos sólo la respuesta: $p \wedge q \models q$.
(c) $p \vee q \not\models p$. Contraejemplo: $V(q) = 1$, $V(p) = 0$.
(d) $p, q \models p \wedge q$
(e) $p \models p \vee q$
(f) $q \models p \vee q$
(g) Véase figura ii. A partir de esta figura queda claro que $p \not\models p \wedge q$ y que $V(p) = 1$, $V(q) = 0$ constituye un contraejemplo.
(h) Véase figura iii. A partir de esta figura queda claro que $p, p \to q \models q$.

i. p	q	$p \wedge q$	/	p
1	1	1	*	1
1	0	0		
0	1	0		
0	0	0		

ii. p	q	/	$p \wedge q$
1	1	*	1
1	0	*	0 ←
0	1		
0	0		

iii. p	q	$p \to q$	/	q
1	1	1	*	1
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

iv. p	q	$q \to p$	/	q
1	1	1	*	1
1	0	1	*	0←
0	1	0		
0	0	1		

v.	p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	/	r
	1	1	1	1	1	1	*	1
	1	1	0	1	0	0		
	1	0	1	1	1	1	*	1
	1	0	0	1	0	1		
	0	1	1	1	1	1	*	1
	0	1	0	1	1	0		
	0	0	1	0	1	1		
	0	0	0	0	1	1		

(i) Véase figura iv. En esta figura queda claro que $p, q \to p \not\models q$, y que $V(p) = 1$, $V(q) = 0$ constituye un contraejemplo.

(j) $p, \neg p \models q$. (No hay contraejemplo. Compárese esto con la interpretación en la lógica de predicados del cuantificador universal en *todos los A son B*).

(k) $p \to (q \wedge \neg q) \models \neg p$

(l) Véase figura v. En esta figura queda claro que $p \vee q, p \to r, q \to r \models r$.

(m) Véase figura vi. En esta figura queda claro que $p \vee q, (p \wedge q) \to r \not\models r$ y que $V_1(p) = 1$, $V_1(q) = 0$, $V_1(r) = 0$ constituye un contraejemplo, así como también $V_2(p) = 0$, $V_2(q) = 1$, $V_2(r) = 0$.

(n) $p \vee q, p \to q \models q$

(o) $p \vee q, p \to q \not\models p$. Un contraejemplo es $V(p) = 0$, $V(q) = 1$.

(p) $p \to q, \neg q \models \neg p$

(q) $p \to q \not\models \neg p \to \neg q$. La valuación $V(p) = 0$, $V(q) = 1$ constituye un contraejemplo.

iv	p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	/	r
	1	1	1	1	1	1	*	1
	1	1	0	1	1	0		
	1	0	1	1	0	1	*	1
	1	0	0	1	0	1	*	0←
	0	1	1	1	0	1	*	1
	0	1	0	1	0	1	*	0←
	0	0	1	0	0	1		
	0	0	0	0	0	1		

Ejercicio 2

(a) $D = \{1, 2\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \{2\}$.
Un objeto (1) para el cual se cumple I(A), un objeto (2) para el que se cumple I(B), pero ninguno para el cual se cumplan ambas.

(b) Nos sirve el mismo modelo que empleamos en el caso (a). Se cumple para cada objeto I(A) o I(B), pero no para todo objeto I(A) o todo objeto I(B).

(c) $D = \{1, 2\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \{1\}$.
Para que la conclusión sea falsa, debe cumplirse I(A) para algún objeto (1), y, en razón de la primera premisa, I(B) también debe cumplirse para ese objeto. De acuerdo con la segunda premisa, debe haber un objeto (2) para el cual no se cumpla I(B) y, de acuerdo con la primera premisa, para ese objeto, tampoco se cumple I(A).

(d) $D = \{1, 2\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \{1, 2\}$; $I(C) = \{2\}$

(e) $D = \{1, 2\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \{2\}$; $I(C) = \emptyset$.
Para todos los objetos para los que se cumplen I(A) e I(B), también debe cumplirse I(C). Si la conclusión debe ser falsa, entonces I(C) no puede cumplirse para ningún objeto, de manera que tampoco pueden cumplirse I(A) e I(B) simultáneamente para ningún objeto.

(f) $D = \{1, 2\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \emptyset$ (o bien $I(B) = \{1\}$)
Para que la primer premisa sea verdadera, debe existir un objeto (1) para el cual se cumpla I(A) pero no I(B). Además, si se quiere que la conclusión sea falsa, no puede cumplirse I(A) para todos los objetos (ni tampoco I(B), si la segunda premisa es verdadera, pero ya arreglamos eso).

(g) $D = \{1\}$; $I(A) = \{1\}$; $I(B) = \emptyset$ o $I(B) = \{1\}$.
No debemos hacer nada para refutar la conclusión: $\exists x(Bx \wedge \neg Bx)$: es una contradicción.

(h) $D = \{1, 2\}$; $I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.
Véase figura vii. De cada punto sale una flecha pero ningún punto se flecha a sí mismo.

(i) $D = \{1, 2\}$; $I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.
Véase figura viii. Si la premisa es verdadera entonces cada punto necesita flecharse a sí mismo. Es suficiente que falte una flecha para que la conclusión sea falsa. (De manera que podría haberse agregado una flecha de 1 a 2 o de 2 a 1.)

(j) $D = \{1, 2, 3\}$; $I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.
Véase figura ix. Al menos un punto (1) flecha a todos. Todos los puntos se flechan a sí mismos. Para refutar la conclusión hay dos puntos no conectados por ninguna flecha.

(k) $D = \{1, 2\}$; $I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$; $I(A) = \emptyset$.
Véase figura x. De acuerdo con la segunda premisa I(A) se sostiene exactamente para los puntos que se flechan a sí mismos.

(l) $D = \{1, 2, 3\}$; $I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$.
Véase figura xi. De acuerdo con la segunda premisa, entre dos puntos (no necesariamente distintos) hay al menos una flecha; esto se aplica también a un punto respecto de sí mismo: cada punto se flecha a sí mismo. Luego, también se verifica la primera premisa. Para refutar la conclusión debemos asegurar que la relación no es transitiva. En el diagrama esto se cumple apropiadamente: 1 flecha a 2, y 2 flecha a 3, pero 1 no flecha a 3.

(m) Para este esquema de argumento no hay un contramodelo con dominio finito. Si uno intentara hacerlo se daría cuenta de que hay problemas cuando aparecen los círculos; véase figura xii. Para lograr que el círculo sea transitivo, debe hacerse que cada punto se fleche a sí mismo. Por otra parte, para refutar la conclusión, no pueden aparecer tales elementos "reflexivos". Un contraejemplo infinito es el siguiente:

$D = \{1, 2, 3, ...\}$; $I(R) = \{\langle i, j\rangle D^2 \mid i < j\}$.

Luego, I(R) se cumple entre dos números naturales, si el primero es menor que el segundo.

(n) $D = \{1\}$; $I(R) = \emptyset$.

Debido a que las premisas son implicaciones cuantificadas universalmente, pueden hacerse verdaderas si no se introduce ninguna flecha. Si se lo hiciera, la conclusión también sería falsa.

(o) $D = \{1, 2\}$

(p) $D = \{1, 2\}$

(q) $D = \{1, 2, 3, 4\}$; $I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

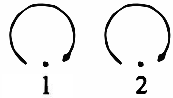
Véase figura xiii. El modelo consiste en dos partes transitivas separadas. La relación I(R) no es conexa.

(r) $D = \{1, 2\}$; $I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$; $I(A) = \{1\}$.

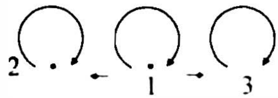
Véase figura xiv. De acuerdo con la primera premisa I(A) se cumple exactamente para los puntos que flechan a todos los puntos. La segunda premisa afirma que hay exactamente un punto tal. De acuerdo con la conclusión, hay a lo sumo un elemento reflexivo. Por lo tanto, para refutar la conclusión, debemos proporcionar al menos dos elementos reflexivos.

vii.

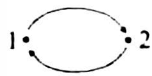
viii.



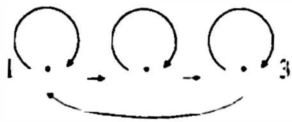
ix



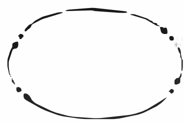
x.



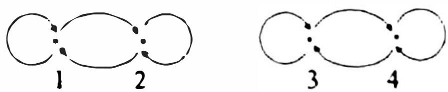
xi.



xii.



xiii.



xiv.

Ejercicio 3

(a)

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	$p \wedge q$	I$\wedge$, 1, 2

(b)

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	r	supuesto
4.	$p \wedge r$	I$\wedge$, 1, 3
5.	$q \wedge (p \wedge r)$	I$\wedge$, 2, 4

Ejercicio 4

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	supuesto
2.	$q \wedge r$	E$\wedge$, 1
3.	r	E$\wedge$, 2
4.	p	E$\wedge$, 1
5.	$r \wedge p$	I$\wedge$, 3, 4

Ejercicio 5

(a)

1.	$p \to (q \to r)$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	q	supuesto
4.	$q \to r$	E$\to$, 1, 2
5.	r	E$\to$, 4, 3

(b)

1.	$p \to (q \wedge r)$	supuesto
2.	$r \to s$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$q \wedge r$	E$\to$, 1, 3
5.	r	E$\wedge$, 4
6.	s	E$\to$, 2, 5

Ejercicio 6

(a)

1.	$p \to (q \to r)$	supuesto
2.	$p \wedge q$	supuesto
3.	p	E$\wedge$, 2
4.	$q \to r$	E$\to$, 1, 3
5.	q	E$\wedge$, 2
6.	r	E$\to$, 4, 5
7.	$(p \wedge q) \to r$	I$\to$
8.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$	I$\to$

(b)

1.	$p \to (p \to q)$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	$p \to q$	E$\to$, 1, 2
4.	q	E$\to$, 3, 2
5.	$p \to q$	I$\to$
6.	$(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$	I$\to$

Ejercicio 7

(a)

1.	$p \vee (p \wedge q)$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	p	Rep., 2
4.	$p \rightarrow p$	I→
5.	$p \wedge q$	supuesto
6.	p	E∧, 5
7.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	I→
8.	p	E∨, 1, 4, 7

(b)

1.	$p \vee q$	supuesto
2.	$p \rightarrow q$	supuesto
3.	q	supuesto
4.	q	Rep., 3
5.	$q \rightarrow q$	I→
6.	q	E∨, 1, 2, 5
7.	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	I→
8.	$(p \vee q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$	I→

(c)

1.	$p \vee (q \vee r)$	supuesto
2.	p	supuesto
3.	$p \vee q$	I$\vee$, 2
4.	$(p \vee q) \vee r$	I$\vee$, 3
5.	$p \to ((p \vee q) \vee r)$	I$\to$
6.	$q \vee r$	supuesto
7.	q	supuesto
8.	$p \vee q$	I$\vee$, 7
9.	$(p \vee q) \vee r$	I$\vee$, 8
10.	$q \to ((p \vee q) \vee r)$	I$\to$
11.	r	supuesto
12.	$(p \vee q) \vee r$	I$\vee$, 11
13.	$r \to ((p \vee q) \vee r)$	I$\to$
14.	$(p \vee q) \vee r$	E$\vee$, 6, 10, 13
15.	$(q \vee r) \to ((p \vee q) \vee r)$	I$\to$
16.	$(p \vee q) \vee r$	E$\vee$, 1, 5, 15

Ejercicio 8

(a)

1.	p	supuesto
2.	$\neg p$	supuesto
3.	$\perp$	E$\neg$, 2, 1
4.	$\neg\neg p$	I$\neg$
5.	$p \to \neg\neg p$	I$\to$

(b)

1.	$p \wedge \neg q$	supuesto
2.	$p \to q$	supuesto
3.	p	E$\wedge$, 1
4.	q	E$\to$, 3, 2
5.	$\neg q$	E$\wedge$, 1
6.	$\perp$	E$\neg$, 5, 4
7.	$\neg(p \to q)$	I$\neg$
8.	$(p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$	I$\to$

(c)

1.	$p \rightarrow q$	supuesto
2.	$\neg q$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	q	E→, 1, 3
5.	$\bot$	E¬, 2, 4
6.	$\neg p$	I¬
7.	$\neg q \rightarrow \neg p$	I→
8.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	I→

(d)

1.	$p \rightarrow \neg q$	supuesto
2.	q	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\neg q$	E→, 1, 3
5.	$\bot$	E¬, 4, 2
6.	$\neg p$	I¬
7.	$q \rightarrow \neg p$	I→

Ejercicio 9

(a)

1.	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	supuesto
2.	$\neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\bot$	E¬. 2, 3
5.	q	EFSQ, 4
6.	$p \rightarrow q$	I→
7.	p	E→, 1, 6
8.	$\bot$	E¬, 2, 7
9.	$\neg\neg p$	I¬
10.	p	¬¬, 9
11.	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	I→

(b)

1.	$\neg(p \wedge q)$	supuesto
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	q	supuesto
5.	$p \wedge q$	I$\wedge$, 3, 4
6.	$\perp$	E$\neg$, 1, 5
7.	$\neg q$	I$\neg$
8.	$\neg p \vee \neg q$	I$\vee$, 7
9.	$\perp$	E$\neg$, 2, 8
10.	$\neg p$	I$\neg$
11.	$\neg p \vee \neg q$	I$\vee$, 10
12.	$\perp$	E$\neg$, 2, 11
13.	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	I$\neg$
14.	$\neg p \vee \neg q$	$\neg\neg$, 13
15.	$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$	I$\rightarrow$

(c)

1	$\neg(p \rightarrow q)$	supuesto
2	$\neg p$	supuesto
3	p	supuesto
4	$\perp$	E$\neg$, 2, 3
5	q	EFSQ, 4
6	$p \rightarrow q$	I$\rightarrow$
7	$\perp$	E$\neg$, 1, 6
8.	$\neg\neg p$	I$\neg$
9	p	$\neg\neg$, 8
10.	q	supuesto
11.	p	supuesto
12.	q	Rep., 10
13.	$p \rightarrow q$	I$\rightarrow$
14.	$\perp$	E$\neg$, 1, 13
15.	$\neg q$	I$\neg$
16.	$p \wedge \neg q$	I$\wedge$, 9, 15
17.	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$	I$\rightarrow$

Ejercicio 10

(a)

1.	$p \wedge (q \vee r)$	supuesto
2.	p	E$\wedge$, 1
3.	$q \vee r$	E$\wedge$, 1
4.	q	supuesto
5.	$p \wedge q$	I$\wedge$, 2, 4
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	I$\vee$, 5
7.	$q \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	I$\rightarrow$
8.	r	supuesto
9.	$p \wedge r$	I$\wedge$, 2, 8
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	I$\vee$, 9
11.	$r \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	I$\rightarrow$
12.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	E$\vee$, 3, 7, 11

(b)

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	supuesto
2.	$p \wedge q$	supuesto
3.	p	E$\wedge$, 2
4.	q	E$\wedge$, 2
5.	$q \vee r$	I$\vee$, 4
6.	$p \wedge (q \vee r)$	I$\wedge$, 3, 5
7.	$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$	I$\rightarrow$
8.	$p \wedge r$	supuesto
9.	p	E$\wedge$, 8
10.	r	E$\wedge$, 8
11.	$q \vee r$	I$\vee$, 10
12.	$p \wedge (q \vee r)$	I$\wedge$, 9, 11
13.	$(p \wedge r) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$	I$\rightarrow$
14.	$p \wedge (q \vee r)$	E$\vee$, 1, 7, 13

(c)

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	supuesto
2.	$p \rightarrow q$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	q	E→, 2, 3
5.	$q \rightarrow r$	E→, 1, 3
6.	r	E→, 5, 4
7.	$p \rightarrow r$	I→
8.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	I→
9.	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	I→

(d)

1.	$p \rightarrow q$	supuesto
2.	$r \rightarrow s$	supuesto
3.	$p \vee r$	supuesto
4.	p	supuesto
5.	q	E→, 4, 1
6.	$q \vee s$	I∨, 5
7.	$p \rightarrow (q \vee s)$	I→
8.	r	supuesto
9.	s	E→, 2, 8
10.	$q \vee s$	I∨, 9
11.	$r \rightarrow (q \vee s)$	I→
12.	$q \vee s$	E∨, 3, 7, 11
13.	$(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$	I→

(e)

1.	$p \rightarrow \neg p$	supuesto
2.	$\neg p \rightarrow p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\neg p$	E→, 1, 3
5.	$\perp$	E¬, 4, 3
6.	$\neg p$	I¬
7.	p	E→, 2, 6
8.	$\perp$	E¬, 6, 7

Ejercicio 11

No se puede dar ningún sentido razonable a esta conectiva, dado que el introducirla llevaría a $\phi \vdash \psi$, para ϕ y ψ arbitrarias:

1.	ϕ	supuesto
2.	$\phi \circ \psi$	I∘, 1
3.	ψ	E∘, 2

Ejercicio 12

1.	$Aa \to Bb$	supuesto
2.	$\exists y(Aa \to By)$	I∃, 1 $(Aa \to By)$
3.	$\exists x \exists y(Ax \to By)$	I∃, 2 $(\exists y(Ax \to By))$

Ejercicio 13

(a)	1.	$\forall xAxx$	supuesto
	2.	Aaa	E∀, 1 (Axx)

(b)	1.	$\forall x \forall yAxy$	supuesto
	2.	$\forall yAay$	E∀, 1 $(\forall yAxy)$
	3.	Aab	E∀, 2 (Aay)

(c)	1.	$\forall x \forall yAxy$	supuesto
	2.	$\forall yAay$	E∀, 1 $(\forall yAxy)$
	3.	Aaa	E∀, 2 (Aay) .

Ejercicio 14

(a)	1.	$\forall x(Ax \land Bx)$	supuesto
	2.	$Aa \land Ba$	E∀, 1
	3.	Aa	E∧, 2
	4.	$\forall xAx$	I∀, 3
	5.	Ba	E∧, 2
	6.	$\forall xBx$	I∀, 5
	7.	$\forall xAx \land \forall xBx$	I∧, 4, 6

(b)

1.	$\forall xAx \wedge \forall xBx$	supuesto
2.	$\forall xAx$	E$\wedge$, 1
3.	Aa	E$\forall$, 2
4.	$\forall xBx$	E$\wedge$, 1
5.	Ba	E$\forall$, 4
6.	$Aa \wedge Ba$	I$\wedge$, 3, 5
7.	$\forall x(Ax \wedge Bx)$	I$\forall$, 6

(c)

1.	$\forall x\forall yAxy$	supuesto
2.	$\forall yAay$	E$\forall$, 1
3.	Aab	E$\forall$, 2
4.	$\forall yAby$	E$\forall$, 1
5.	Aba	E$\forall$, 4
6.	$Aab \wedge Aba$	I$\wedge$ 3, 5
7.	$\forall y(Aay \wedge Aya)$	I$\forall$, 6
8.	$\forall x\forall y(Axy \wedge Ayx)$	I$\forall$, 7

(d)

1.	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$	supuesto
2.	$\forall xAx$	supuesto
3.	$Aa \rightarrow Ba$	E$\forall$, 1
4.	Aa	E$\forall$, 2
5.	Ba	E$\rightarrow$, 3, 4
6.	$\forall xBx$	I$\forall$, 5

(e)

1.	$\neg\exists xAx$	supuesto
2.	Aa	supuesto
3.	$\exists xAx$	I$\exists$, 2
4.	$\bot$	E$\neg$, 1, 3
5.	$\neg Aa$	I$\neg$
6.	$\forall x\neg Ax$	I$\forall$, 5

(f)

1.	$\neg\exists x\neg Ax$	supuesto
2.	$\neg Aa$	supuesto
3.	$\exists x\neg Ax$	I∃, 2
4.	$\bot$	E¬, 1, 3
5.	$\neg\neg Aa$	I¬
6.	Aa	¬¬, 5
7.	$\forall xAx$	I∀, 6

Ejercicio 15

(a)

1.	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	supuesto
2.	$Aa \wedge Ba$	supuesto
3.	Aa	E∧, 2
4.	$\exists xAx$	I∃, 3
5.	Ba	E∧, 2
6.	$\exists xBx$	I∃, 5
7.	$\exists xAx \wedge \exists xBx$	I∧, 4, 6
8.	$(Aa \wedge Ba) \rightarrow (\exists xAx \wedge \exists xBx)$	I→
9.	$\exists xAx \wedge \exists xBx$	E∃, 1, 8

(b)

1.	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$	supuesto
2.	$\exists xAx$	supuesto
3.	Aa	supuesto
4.	$Aa \rightarrow Ba$	E∀, 1
5.	Ba	E→, 4, 3
6.	$\exists xBx$	I∃, 5
7.	$Aa \rightarrow \exists xBx$	I→
8.	$\exists xBx$	E→, 2, 7

(c)

1.	$\exists x \neg Ax$	supuesto
2.	$\neg Aa$	supuesto
3.	$\forall x Ax$	supuesto
4.	Aa	E$\forall$, 3
5.	$\bot$	E$\neg$, 2, 4
6.	$\neg \forall x Ax$	I$\neg$
7.	$\neg Aa \rightarrow \neg \forall x Ax$	I$\rightarrow$
8.	$\neg \forall x Ax$	E$\exists$, 1, 7

(d)

1.	$\forall x \neg Ax$	supuesto
2.	$\exists x Ax$	supuesto
3.	Aa	supuesto
4.	$\neg Aa$	E$\forall$, 1
5.	$\bot$	E$\neg$, 4, 3
6.	$Aa \rightarrow \bot$	I$\rightarrow$
7.	$\bot$	E$\exists$, 2, 6
8.	$\neg \exists x Ax$	I$\neg$

(e)

1.	$\neg \forall x Ax$	supuesto
2.	$\neg \exists x \neg Ax$	supuesto
3.	$\neg Aa$	supuesto
4.	$\exists x \neg Ax$	I$\exists$, 3
5.	$\bot$	E$\neg$, 2, 4
6.	$\neg\neg Aa$	I$\neg$
7.	Aa	$\neg\neg$, 6
8.	$\forall x Ax$	I$\forall$, 7
9.	$\bot$	E$\neg$, 1, 8
10.	$\neg\neg \exists x \neg Ax$	I$\neg$
11.	$\exists x \neg Ax$	$\neg\neg$, 10

(f)

1.	$\forall x(Ax \to Bx)$	supuesto
2.	$\exists x \neg Bx$	supuesto
3.	$\neg Ba$	supuesto
4.	Aa	supuesto
5.	$Aa \to Ba$	E$\forall$, 1
6.	Ba	E$\to$, 5, 4
7.	$\bot$	E$\neg$, 3, 6
8.	$\neg Aa$	I$\neg$
9.	$\exists x \neg Ax$	I$\exists$, 8
10.	$\neg Ba \to \exists x \neg Ax$	I$\to$
11.	$\exists x \neg Ax$	E$\exists$, 2, 10

(g)

1.	$\forall x(Ax \lor Bx)$	supuesto
2.	$\exists x \neg Bx$	supuesto
3.	$\neg Ba$	supuesto
4.	$Aa \lor Ba$	E$\forall$, 1
5.	Aa	supuesto
6.	$\exists x Ax$	I$\exists$, 5
7.	$Aa \to \exists x Ax$	I$\to$
8.	Ba	supuesto
9.	$\bot$	E$\neg$, 3, 8
10.	$\exists x Ax$	EFSQ, 9
11.	$Ba \to \exists x Ax$	I$\to$
12.	$\exists x Ax$	E$\lor$, 4, 7,11
13.	$\neg Ba \to \exists x Ax$	I$\to$
14.	$\exists x Ax$	E$\exists$, 2, 13

(h)

1.	$\forall x(Ax \to Bx)$	supuesto
2.	$\exists x(Ax \wedge Cx)$	supuesto
3.	$Aa \wedge Ca$	supuesto
4.	$Aa \to Ba$	E$\forall$, 1
5.	Aa	E$\wedge$, 3
6.	Ba	E$\to$, 4, 5
7.	Ca	E$\wedge$, 3
8.	$Ba \wedge Ca$	I$\wedge$, 6, 7
9.	$\exists x(Bx \wedge Cx)$	I$\exists$, 8
10.	$(Aa \wedge Ca) \to \exists x(Bx \wedge Cx)$	I$\to$
11.	$\exists x(Bx \wedge Cx)$	E$\exists$, 2, 10

Ejercicio 16

Lo que debe mostrarse es que $\vdash \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \vdash \phi$ y $\vdash \psi$.

$\Rightarrow$ Supóngase $\vdash \phi \wedge \psi$. Esto significa que existe una derivación de la forma:

1. ...
...
...
...
n. $\phi \wedge \psi$

Esta derivación puede extenderse a

1.	...		1.	...
	...			...
	...	tanto como a		...
	...			...
n.	$\phi \wedge \psi$		n.	$\phi \wedge \psi$
n + 1.	ϕ		n + 1.	ψ

Luego, $\vdash \phi$ y $\vdash \psi$.

$\Leftarrow$ Supóngase $\vdash \phi$ y $\vdash \psi$. Esto significa que hay dos derivaciones de la forma

1.	...		1.	...
	...			...
	...	y		...
	...			...
n.	ϕ		m.	ψ

Renumérese la segunda derivación como n + 1, ..., n + m (incluyendo los cambios necesarios en los números que aparecen a continuación de las fórmulas). Coloquense las dos derivaciones en secuencia y sígase de ellas la conclusión $\phi \wedge \psi$ por medio de I$\wedge$. El resultado es la siguiente derivación:

1.	...	
	...	
	...	
	...	
n.	ϕ	
n + 1.	...	
	...	
	...	
	...	
n + m.	ψ	
n + m + 1.	$\phi \wedge \psi$	I$\wedge$, n, n + m

Esta derivación muestra que $\vdash \phi \wedge \psi$.

Ejercicio 17

(i) No. Tómese $X = \{p\}$, $Y = \{\neg p\}$.

(ii) Sí. Si X es consistente, entonces tiene un modelo M. O bien $M \models \phi$ y $X \cup \{\phi\}$ es consistente, o bien $M \not\models \phi$ y $X \cup \{\neg\phi\}$ es consistente.

(iii) Sí. Enumérese X como $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Defínase Y por etapas como sigue: $Y_0 = \emptyset$. Dado que ϕ no es universalmente válida, $Y_0 \not\models \phi$. Considérese ψ_1. Si $Y_0 \cup \{\psi_1\} \not\models \phi$, entonces fíjese $Y_1 = Y_0 \cup \{\psi_1\}$; en caso contrario fíjese $Y_1 = Y_0$. Continuando de esta forma, llegamos a una $Y_i \subsetneq X$ más larga que no implica a ϕ. No es necesario que dicho conjunto Y_i sea único ya que puede depender de la enumeración que se eligió en particular. Por ejemplo, sea $X = \{\neg p, p \vee q, \neg q\}$, $\phi = q$: tanto $\{\neg p, \neg q\}$ como $\{p \vee q, \neg q\}$ son subconjuntos consistentes maximales de X que no implican a q.

Ejercicio 18

(i) Todos ellos lo son. Un ejemplo no universal sería $\forall x \exists y Rxy$ (*sucesión*) o $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$ (*densidad*).

(ii) Si $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ son universales, y $\phi_1, \ldots, \phi_n \nvDash \psi$, entonces hay un contraejemplo en el que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se cumple pero ψ no. Para que no se cumpla un universal tal como ψ es suficiente con tener un cierto número finito de objetos (no se necesita más que una cantidad equivalente al número de cuantificadores con que comience ψ) que se encuentren en ciertas (no) relaciones atómicas. El que no se cumpla ψ aún persistiría si consideramos un modelo que conste *sólo* de esos individuos. Además, las oraciones universales $\phi_1, \ldots, \phi_n$ seguirían siendo verdaderas bajo esta traducción. Luego, es suficiente con inspeccionar todos los modelos hasta un cierto tamaño finito para buscar posibles contraejemplos: si no se encuentra ninguno de ellos allí, no existe ninguno en absoluto. Y es posible llevar a cabo esta tarea en un tiempo finito. (A propósito, la derivabilidad mutua entre las anteriores condiciones relacionales de §3.8 es decidible.)

Notas bibliográficas

Estas notas bibliográficas contienen sugerencias para lecturas posteriores sin ninguna pretensión de ser exhaustivas. En general, no se repiten las referencias a la literatura que aparecen en el texto.

Capítulo 1

En Scholz (1967) puede encontrarse una breve introducción a la historia de la lógica. Bochenski (1956) y Kneale y Kneale (1962) son estudios comprehensivos. Barth (1974) es un estudio lógico-histórico interesante centrado en torno a un tema sistemático.

Robins (1967) es una bien conocida introducción a la historia de la lingüística. Parret (1976) es una colección de diversos estudios.

Ayer (1959), Flew (1952-53), Feigl y Sellars (1949) y Linsky (1952) son colecciones de importantes artículos en los campos de la filosofía analítica y del positivismo lógico. Véase también Caton (1963), Rorty (1967), Davidson y Harman (1972) y la literatura mencionada en el texto.

Capítulos 2, 3 y 4

Hay muchos textos introductorios buenos acerca de la lógica estándar, los más antiguos tienen, por lo general, un leve sesgo filosófico o matemático, y los más recientes también discuten las vinculaciones con ciencias de la computación.

En Hodges (1977), Allwood, Andersson y Dahl (1977), McCawley (1981), así como en Dowty, Wall y Peters (1981) se encuentra una perspectiva más lingüística. Van Dalen, Doets y de Swart (1978) es una provechosa introducción a la teoría de conjuntos.

El cálculo de deducción natural es un rasgo central de Anderson y Johnstone (1962). El método relacionado de "tablas semánticas" aparece en Jeffrey (1967) y Smullyan (1968).

En los cuatro volúmenes de *Handbook of Philosophical Logic*, editados por Gabbay y Guenthner (1983-88) se presenta material más avanzado, siendo el primer volumen un buen estudio sobre lógica básica.

Enderton (1972) es un buen libro de texto sobre lógica matemática. Bell y Machover (1977) es más amplio. El manual estándar es Barwise (1977).

Capítulos 5 y 6

En Haack (1978) se ofrece un estudio sobre sistemas lógicos no-estándar desde un punto de vista filosófico. Véase también Quine (1970).

El punto de vista de Frege acerca de las descripciones definidas puede encontrarse en Frege (1892, 1893). En Russell (1905), se expone la teoría de Russell. Para la crítica de Strawson a Russell, véase Strawson (1950)

En Enderton (1972), se encuentra una introducción con orientación matemática a la lógica de orden superior.

Véase Rescher (1969) para un estudio y amplia bibliografía acerca de lógicas polivalentes. En Lukasiewicsz (1920), se presenta el sistema de Lukasiewicsz, en Kleene (1952) el de Kleene, en Bochvar (1939) el de Bochvar. En Van Fraassen (1969, 1971) se describe el método de las supervaluaciones.

La literatura sobre el tema de las presuposiciones es abundante y continúa aumentando. Se puede tener una panorámica de los principales puntos de vista y argumentos en Wilson (1975), Kempson (1975), Gazdar (1979a, b), Soames (1979, 1982), Karttunen y Peters (1979), Link (1986), Sperber y Wilson (1986) y van der Sandt (1988). Véase también el capítulo acerca de las presuposiciones en Levinson (1983).

El artículo de Quine sobre la eliminación de variables es Quine (1966).

Levinson (1983), antes mencionado, es un buen libro de texto sobre pragmática.

La teoría de las implicaturas de Grice fue desarrollada originariamente en las Conferencias William James de 1967. Algunas partes se publicaron en Grice (1975, 1978). Véase también Grice (1981). Diversos aspectos de la teoría de Grice se discuten en la literatura sobre presuposiciones mencionada más arriba y en Cohen (1971), Walker (1975) y Groenendijk y Stokhof (1980). Véase también el capítulo pertinente en Levinson (1983).

Capítulo 7

En Partee, ter Meulen y Wall (1989), pueden aprenderse conceptos básicos acerca de lenguajes formales y autómatas. El libro de texto estándar es Hopcroft y Ullman (1979).

Referencias bibliográficas

Allwood, J., L. Andersson y O. Dahl. 1977. *Logic in Linguistics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Anderson, J. y H. Johnstone. 1962. *Natural Deduction*. Belmont: Wadsworth.

Austin, J. L. 1956. "A Plea for Excuses". *Proceedings from the Aristotelian Society*, n.s. 57. También en Austin, 1962b.

——. 1962a. *How to Do Things with Words*. Oxford: Oxford University Press.

——. 1962b. *Philosophical Papers*. Oxford: Oxford University Press.

Ayer, A. J., ed., 1959. *Logical Positivism*. Nueva York: Free Press.

Bar-Hillel, Y. 1953. "Logical Syntax and Semantics". *Language* 29.

Bar-Hillel, Y., ed., 1971. *Pragmatics of Natural Language*. Dordrecht: Reidel.

Barth, E. M. 1974. *The Logic of the Articles in Traditional Philosophy*. Dordrecht: ReidelBarwise, J., ed., 1977. *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

Bell, J. y M. Machover. 1977. *A Course in Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

Blackburn, S., ed., 1975. *Meaning, Reference and Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bochenski, I. M. 1956. *Formale Logik*. Freiburg: Orbis Academicus.

Bochvar, D. A. 1939. "Ob odnom trehznachom iscislenii i ego primeneii k analizu paradoksov klassicskogo rassirennogo funkcional 'nogo iscislenija' " *Matematiciskij sbornik*, 4.

Carnap, R. 1931-32. Überwindung der Metaphisik durch logische Analyse der Sprache. *Erkenntnis*, 10.

Caton, Ch., ed., 1963. *Philosophy and Ordinary Language*. Urbana: University of Illinois Press.

Chomsky, N. 1954. "Logical Syntax and Semantics: Their Linguistic Relevance". *Language*, 30.

——. 1957. *Syntactic Structures*. The Hague: Mouton.

Cohen, L. J. 1971. "The Logical Particles of Natural Language". En Bar- Hillel, 1971.

Cole, P., ed., 1978. *Syntax and Semantics* 9: *Pragmatics*. Nueva York: Academic Press.

——. 1981. *Radical Pragmatics*. Nueva York: Academic Press.

Cole, P. y J. Morgan, eds., 1975. *Syntax and Semantics* 3: *Speech Acts*. Nueva York: Academic Press.

Davidson, D. 1967. "Truth and Meaning". *Synthese*, 17.
Davidson, D.y G. Harman, eds., 1972. *Semantics of Natural Language*. Dordrecht: Reidel.
Dowty, D. R.; Wall, R. E. y Peters, S. 1981. *Introduction to Montague Semantics*. Dordrecht: Reidel.

Enderton, H. B. 1972. *A Mathematical Introduction to Logic*. Nueva York: Academic Press.

Feigl, H. y W. Sellars, eds., 1949. *Readings in Philosophical Analysis*. Nueva York: Appleton-Century Croft.
Flew, A., ed., 1952-53. *Logic and Language I & II*. Oxford: Blackwell.
Frege, G. 1879. *Begriffsschrift*. Halle: Verlag Louis Nebert.
———. 1892. "Uber Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritik*, 100. También en Frege, 1962. Traducción al inglés en Geach y Black, 1960.
———. 1893. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1. Jena: Verlag H. Pohle.
———. 1962. *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, ed., G. Patzig. Gottingen: Vanden Hoeck.

Gabbay, D. y F. Guenthner, eds., 1983-88. *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: Reidel.
Gazdar, G. 1979a. "A Solution to the Projection Problem". En Oh y Dinneen, 1979.
———. 1979b. *Pragmatics*. Nueva York: Academic Press.
Gazdar, G. y G. Pullum. 1987. "Computationally Relevant Properties of Natural Languages and their Grammars". En W. Savitch *et al.*, eds, *The Formal Complexity of Natural Language*. Dordrecht: Reidel
Geach. P. y M. Black, eds., 1960. *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Blackwell.
Gödel, K. 1930. "Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktionen-Kalkuls". En *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37. Hay traducción al inglés en Van Heijenoort, 1967.
——— 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". En *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38. Hay traducción al inglés en Van Heijenoort, 1967.
Grice, H. P. 1975. "Logic and Conversation". En Cole y Morgan, 1975.
———. 1978. "Further Notes on Logic and Conversation". En Cole, 1978.
———. 1981. "Presupposition and Conversational Implicatura". En Cole, 1981.
Groenendijk, J., D. de Jongh y M. Stokhof, eds., 1986. *Foundations of Pragmatics and Lexical Semantics*. Dordrecht: Foris.
Groenendijk, J.y M. Stokhof. 1980. "A Pragmatic Analysis of Specificity". En Heny, 1980.

Haack, S. 1978. *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press.
Heidegger, M. 1929. *Was ist Metaphysik*. Frankfurt: Vittorio Klosterman.
Hempel, C. 1950. "Problems and Changes in the Empiricist Criterion of Meaning". *Revue Internationale de Philosophie*, 4. También en Ayer, 1959, y en Linsky, 1952.
Henkin, L. 1949. "The Completeness of the First-Order Functional Calculus". En *Journal of Symbolic Logic*, 14.
Heny, F., ed., 1980. *Ambiguities in Intensional Contexts*. Dordrecht: Reidel.
Hilbert, D. y P. Bernays. 1934-39. *Grundlagen der Mathematik*. 2 vols. Berlin.
Hodges, W. 1977. *Logic*. Harmondsworth: Penguin.
Hopcroft, J. y Ullman, J. 1979. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
Hunter, G. 1971. *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic*. Londres: Macmillan.

Jeffrey, R. C. 1967. *Formal Logic: Its Scope and Limits*. Nueva York: McGraw-Hill.

Karttunen, L. y S. Peters. 1979. "Conventional Implicature". En Oh y Dinneen, 1979.
Katz, J. 1966. *The Philosophy of Language*. Nueva York: Harper & Row.
Katz, J. y J. Fodor. 1962. "What's Wrong with the Philosophy of Language?" *Inquiry*, 5.
Katz, J. y P. Postal. 1964. *An Integrated Theory of Linguistic Description*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
Kempson, R. M. 1975. *Presupposition and the Delimitation of Semantics*. Cambridge: Cambridge University Press.
Kleene, S. C. 1952. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland.
Kneale, W. y M. Kneale. 1962. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Lambert, K., ed., 1969. *The Logical Way of Doing Things*. New Haven: Yale University Press.
Levinson, S. C. 1983. *Pragmatics*. Cambridge: Cambridge University Press.
Link, G. 1986. "Prespie in Pragmatic Wonderland or The Projection Problem for Presuppositions Revisited". En Groenendijk, de Jongh y Stokhof, 1986.
Linsky, L., ed., 1952. *Semantics and the Philosophy of Language*. Urbana: University of Illinois Press.
Lukasiewicz, J. 1920. "O logice trojwartosciowej". *Ruch Filozoficzny* 5. Hay traducción al inglés en McCall 1967.

McCall, S., ed., 1967. *Polish Logic*: 1920-1939. Oxford: Oxford University Press.
McCawley, J. D. 1981. *Everything That Linguists Have Always Wanted to Know About Logic*. Chicago: University of Chicago Press.

Montague, R. 1970. "Universal Grammar". *Theoria* 36. También en Montague, 1974.
Montague, R. 1974. *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*, editado con una introducción de Richmond H. Thomason. New Haven: Yale University Press.
Moortgat, M. 1988. *Categorial Investigations: Logical and Linguistic Aspects of the Lambek-Calculus*. Dordrecht: Foris.

Oh, C. y D. Dinneen, eds., 1979. *Syntax and Semantics II: Presupposition*. Nueva York: Academic Press.

Parret, H., ed., 1976. *History of Linguistic Thought and Contemporary Linguistics*. Berlin: de Gruyter.
Partee, B., A. ter Meuleny R. Wall. 1989. *Mathematical Methods in Linguistics*. Dordrecht: Reidel.
Pereira, F. y S. Shieber. 1987. *Prolog and Natural Language Analysis*. Chicago: University of Chicago Press.
Prawitz, D. 1965. *Natural Deduction*. Estocolmo: Almqvist & Wicksell.

Quine, W. V. O. 1951. *Mathematical Logic*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
——. 1966. "Variables explained away". En *Selected Logic Papers*. Nueva York: Random House.
——. 1970. *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Reichenbach, H. 1947. *Elements of Symbolic Logic*. Nueva York: Macmillan.
Rescher, N. 1969. *Many-Valued Logic*. Nueva York: McGraw-Hill.
——. 1976. *Plausible Reasoning*. Assen: van Gorcum.
Robins, R. H. 1967. *A Short History of Linguistics*. Londres: Longmans.
Rorty, R., ed., 1967. *The Linguistic Turn*. Chicago: University of Chicago Press.
Russell, B. 1905. "On Denoting". *Mind* 14. También en Feigl y Sellars 1949.
Ryle, G. 1931. "Systematically Misleading Expressions". En *Proceedings from the Aristotelian Society*, n.s. 32. También en Flew, 1952-53.

Savitch, W.; Bach, E.; Marsh, W. y Safran-Naveh, G. (eds.), 1987. *The Formal Complexity of Natural Language*. Dordrecht: Reidel.
Scholz, H. 1967. *Abriss der Geschichte der Logik*. Freiburg: Karl Alber.
Searle, J. R. 1969. *Speech Acts*. Cambridge: Cambridge University Press.
Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic*. Berlin: Springer.
Soames, S. 1979. "A Projection Problem for Speaker Presuppositions". *Linguistic Inquiry*, 10.
——. 1982. "How Presuppositions Are Inherited: A Solution to the Projection Problem". *Linguistic Inquiry*, 13.
Sperber, D. y D. Wilson. 1986. *Relevance, Communication and Cognition*.

Oxford: Blackwell.
Strawson, P. F. 1950. "On Referring". *Mind* 59. También en Strawson, 1971.
——. 1971. *Logico-Linguistic Papers*. Londres: Methuen.

Tarski, A. 1933. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". *Studia Philosophia*, 1. Hay traducción al inglés en Tarski, 1956.
——. 1939. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Oxford: Oxford University Press.
——. 1956. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Van Benthem, J. 1986. *Essays in Logical Semantics*. Studies in Linguistics and Philosophy vol. 29. Dordrecht: Reidel.
——. 1987. Logical Syntax. *Theoretical Linguistics* 14.
Van Dalen, D., H. C. Doets y H. de Swart. 1978. *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*. Oxford: Pergamon Press.
Van der Sandt, R. A. 1988. *Context and Presupposition*. Londres: Croom Helm.
Van Fraassen, B. C. 1969. "Presuppositions, Supervaluations, and Free Logic". En Lambert,1969.
——. 1971. *Formal Semantics and Logic*. Nueva York: Macmillan.
Van Heijenoort, J., ed., 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard Universit y Press.
Vendler, Z. 1967. *Linguistics in Philosophy*. Ithaca: Cornell University Press.

Walker, R. 1975. "Conversational Implicatures". En Blackburn, 1975.
Wilson, D. M. 1975. *Presupposition and Non-Truth-Conditional Semantics*. Nueva York: Academic Press.
Wittgenstein, L. 1921. *Tractatus Logico-Philosophicus / Logish-philosophische Abhandlung*. *Annalen der Naturphilosophie*. Hay traducción al inglés de D. F. Pears y B. F. McGuinness, 1961. Londres: Routledge & Kegan Paul.
——. 1953. *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Blackwell.

Indice alfabético

eL

enciclopedia lógica

Esta colección incluye distintos trabajos que presentan los principales aspectos de la lógica contemporánea. En todos los casos, se presta particular interés a los problemas filosóficos relacionados con tales aspectos.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA es una excelente presentación de los temas centrales de la lógica clásica. Es el primer volumen de *Lógica, lenguaje y significado* elaborado por el seudónimo colectivo L. T. F. Gamut. Completa la obra *Lógica intensional y gramática lógica*. En INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA encontramos una presentación sistemática de la validez de los argumentos, discutiendo la relación entre el enfoque formal y el enfoque semántico. El libro contiene, además, un muy interesante tratamiento de las descripciones definidas, de la cuantificación restringida, de la lógica de segundo orden y de la lógica multivaluada. También cuenta con una presentación de los aspectos pragmáticos relacionados con las inferencias y una interesante exploración de la relación entre la lingüística matemática y la lógica.

Eduardo Alejandro Barrio
Director de la colección

ISBN 950-23-1224-4
9 789502 312248
el0060
eudeba
www.eudeba.com.ar