

Introducción al Muestreo Minero

por
Marco Antonio Alfaro Sironvalle

$$\Phi(\lambda) = 1 + h^2 \sigma^2 / 2! + \dots + (-1)^k \lambda^k \mu_k / k! + R_k(\lambda)$$

Le reste $R_k(\lambda)$ de ce developpement est:

$$R_k(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda x - m^2} - 1 - \lambda^2 (x-m)^2 / 2! - \dots - (-1)^k \lambda^k (x-m)^k / k! \right] f(x) dx$$

Portant dans (5) l'expression de $\Phi(\lambda)$, nous obtendriens:

$$E\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{m} + \frac{\sigma^2}{m^2} + \dots + (-1)^k \frac{\mu_k}{m^{k+1}} + R'_k$$

Le reste R'_k etant donne par:

$$R'_k = \int_0^{\frac{m}{2}} e^{-\lambda z} R_k(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{l}{z} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^{k+l} f(z) dz$$

Pour majorer ce reste, prenons un nombre $a > 1$

Santiago, Chile, 2002



Instituto de Ingenieros de Minas de Chile.

Encomenderos 260, Of. 31. Tel (56-2) 2461615, Fax 2466387.

E-Mail: instituto@iimch.cl

Web: <http://www.iimch.cl>

Santiago, Chile, 2002.

Es Propiedad.

Prohibida la reproducción parcial o total sin autorización del autor.

Preface

Is there a single important decision made on a mining project that is not in a way or another, directly or indirectly based on some kind of assayed grade, or in other terms on a mineral sample? And who, in the end, is responsible for the devastating consequences of taking bad samples?

It clearly is a subject of utmost importance that Dr. Marco Alfaro has decided to bring to his audience in this simple, yet fundamental leaflet, which is directed not only to technical professionals of the mining industry, but also to those who manage them and bear the ultimate responsibility for the results and consequences of mineral sampling. In this piece of work, Dr. Alfaro genuinely makes justice to the simplicity of sampling theory, and to the many services it renders and has rendered the industry over several decades of applications.

Like in many a discipline, however, there is Sampling and 'Sampling', good and poor applications, enlightenment and ignorance, science and witchcraft. Practical implementations have kept improving, but have also suffered through many avatars, not all consistent with its eminently scientific approach. Erroneous sampling equipment and experimental procedures, incorrect application models and formulae, based on a highly commercial but appallingly arbitrary *modus operandi*, have made their way into our service and equipment markets, and are currently offered to the non-discerning professional. The utmost critical sense and prudence must be exercised.

It is to Dr. Alfaro's credit to have presented in a simple and short publication all the tools that will help the professional of the industry, as well as **the managers and directors who are committed to the success of mining projects**, tell the good from the bad, and not fall prey to 'imitation sampling theory' which plagues our plants, our mines, and even some of our 'consultants' calculations.

As active devotees to the future and growth of genuine sampling theory, we feel indebted to Dr. Alfaro and thank him very much for this commendable effort.

Pierre Gy & Dominique Francois-Bongarcon
Sampling Associates

Prólogo

Estimado lector, he decidido publicar en el lenguaje más simple posible una introducción a la Teoría del Muestreo Minero, para ello, basado en mi experiencia docente, he considerado fundamental incluir el máximo de gráficos.

En algunas ocasiones el material presentado corresponde a minas conocidas, he omitido sus nombres, por razones de discreción minera.

Agradezco sinceramente la ayuda, consejos y apoyo de los Doctores Pierre Gy y Dominique Francois-Bongarcon. Agradezco también a Ana María por su apoyo y consejos.

Estimado lector, agradeceré contactarme ante cualquier duda, comentario o sugerencia. Juntos mejoraremos futuras ediciones del libro.



Marco Antonio Alfaro
Enero, 2002.

A
Ana María, Marco y Sebastián.

TEMARIO.

I. Introducción e Importancia del muestreo de minerales.	5
II. Conceptos importantes en Teoría del Muestreo. Problema principal.	8
III. El Muestreo Estadístico. Ecuaciones.	14
IV. Consideraciones prácticas para el muestreo de minerales.	18
V. Muestreo de flujos de minerales en movimiento.	40
VI. Tipos especiales de muestreo minero.	49
VII. El Error Fundamental del Muestreo. Teoría de Pierre Gy.	64
VIII. Bibliografía.	74
Anexo 1. Tabla de números aleatorios.	75
Anexo 2. El Profesor Pierre Maurice Gy.	76
Anexo 3. Sesgos generados por muestreo y análisis.	77
Anexo 4. Ejemplos de errores de muestreo importantes.	78
Anexo 5. ¿Porqué los errores aleatorios son gaussianos?	79

I. Introducción e Importancia del muestreo de minerales.

Definiciones.

Según el **Diccionario de la Lengua española**:

Muestra es una parte ó porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como **representativa** del mismo.

Muestreo es la acción de recoger muestras representativas de la calidad ó condiciones medias de un todo ó la técnica empleada en esta selección ó la selección de una pequeña parte estadísticamente determinada para **inferir** el valor de una ó varias características del conjunto.

Población ó lote: es el conjunto completo de observaciones que deseamos estudiar.

El muestreo **estadístico** es diferente del **muestreo de minerales**:

- En el muestreo estadístico, el lote ó población está compuesto por objetos de igual peso.
- En el muestreo de minerales, el lote está compuesto de objetos de diferentes pesos.

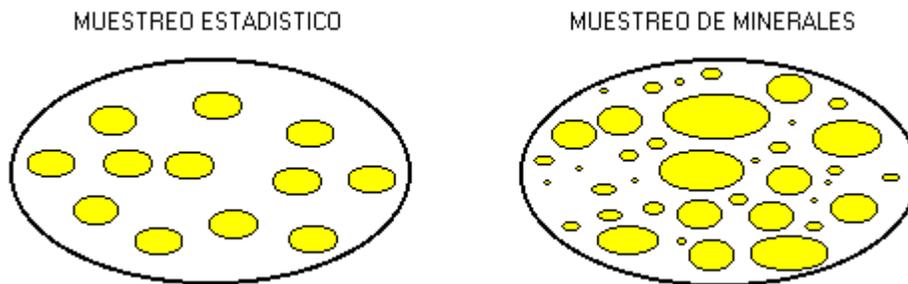


Figura I.1: Muestreo estadístico y muestreo de minerales.

El muestreo de minerales. Importancia:

Casi todas las decisiones que se hacen respecto de un Proyecto Minero, **desde la exploración hasta el cierre de la mina**, están basadas en valores obtenidos de material **muestreado**. Estas decisiones significan millones de dólares.

Ejemplo: Pozos de tronadura en una mina a cielo abierto:

En un pozo de tronadura el material acumulado (detritus de la perforación) puede ser enorme, lo que obliga a tomar una muestra. Sea un depósito minero, con densidad de 2.5 ton/m^3 en una malla de perforación de $10\text{m} \times 10\text{m}$, con altura de

banco de 15m., con diámetro de perforación igual a 25cm. La cantidad de material acumulado, en toneladas, es:

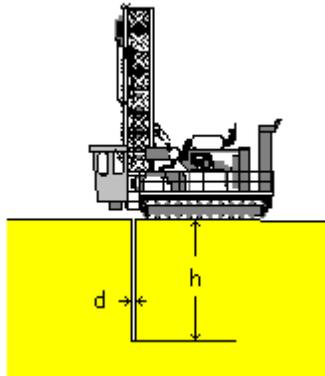


Figura I.2: pozo de tiro.

$$Tons = \pi d^2 h \delta / 4 = 3.14 * 0.25^2 * 15 * 2.5 / 4 = 1.8 \text{ toneladas}$$

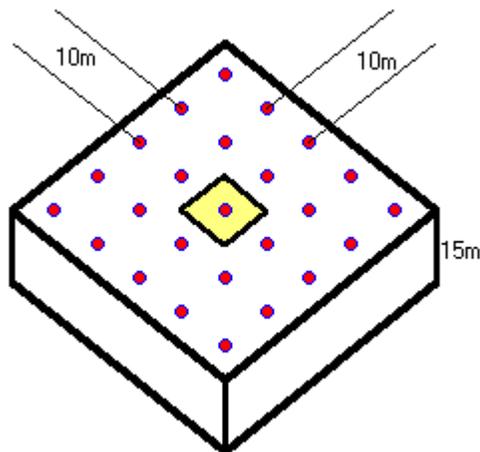


Figura I.3: Malla de pozos de tronadura.

Tratemos de encontrar ahora el valor económico que representa una decisión basada en una muestra de un pozo, para ello calculemos el tonelaje que representa una muestra, asumiendo un área de influencia igual a la malla de perforación (figura I.3), expresando el tonelaje en libras (se utiliza un factor de 2,204) y en onzas (se utiliza un factor de 32,150.75):

$$\begin{aligned} \text{Tonelaje} &= 10 * 10 * 15 * 2.5 = 3,750 \text{ toneladas} \\ &= 3,750 * 2,204 = 8,265,000 \text{ libras} \\ &= 3,750 * 32,150.75 = 120,565,312 \text{ onzas} \end{aligned}$$

a) Caso de un depósito de cobre de 1% CuT (con un precio de 0.70 US\$/libra):

Valor decisión = US\$ 57,855.

b) Caso de un depósito de oro de 2 gr/ton (con un precio de 300 US\$/onza):

Valor decisión = US\$ 72,339.

El valor de la decisión depende del precio de los metales, pero a menudo es ¡mucho más de lo que se piensa!

En una mina a cielo abierto, la ley de un pozo de tronadura es fundamental para la planificación de corto plazo: este valor decide, de una u otra manera, el destino de los materiales (planta, stock o botadero).

II. Conceptos importantes en Teoría del Muestreo. Problema principal.

La figura II.1 resume el problema principal del muestreo: **estimar la media de una población** (con N elementos) **ó lote** (de tamaño M_L) **a partir de una muestra** (de tamaño n ó M_S):

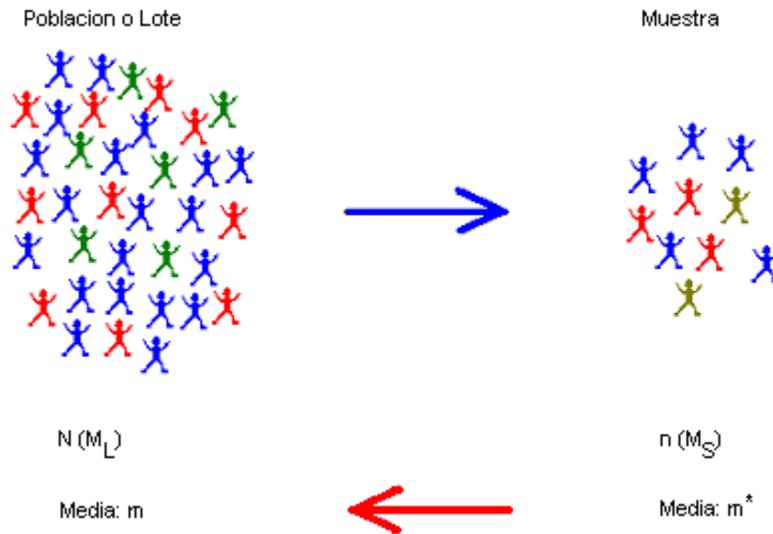


Figura II.1(a): El problema principal del muestreo.

En general, el muestreo **exhaustivo**, es decir tomar los N datos ó la masa total M_L (llamado a veces **censo**) es muy **difícil** y de **alto costo**.

En Estados Unidos, los **muestreos de gobierno** toman muestras de 105,000 personas, es decir 1 persona cada 1,240 personas.

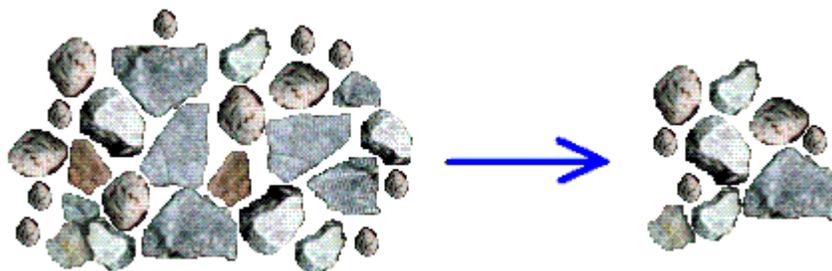


Figura II.1(b): Muestreo de minerales quebrados.

II.1. Etapas de un muestreo.

En todo muestreo, debe estar bien establecido lo siguiente:

1. **Objetivo del muestreo.**
2. **Población a muestrear**
3. **Datos a recolectar**
4. **Manera de recolectar los datos**
5. **Grado de precisión deseado**
6. **Método de medida.**

Para cumplir bien con la definición inicial de muestreo, se debe cumplir el hecho siguiente, de vital importancia:

“El muestreo debe ser equiprobable”

En el caso de los minerales: el muestreo de un lote M_L compuesto de N fragmentos es **equiprobable** cuando **todas** las combinaciones de n fragmentos tienen la **misma probabilidad** de ser elegidos para la constitución de la muestra (M_S es la muestra con n fragmentos).

Según Pierre Gy, creador de la teoría moderna del muestreo de minerales, cuando la condición de equiprobabilidad no se cumple, se tiene más bien un **“especimen”** (un ejemplar) en vez de una muestra.

La figura II.2 muestra un ejemplo de espécimen, las extracciones se basan en la hipótesis **no realista y peligrosa de homogeneidad**.

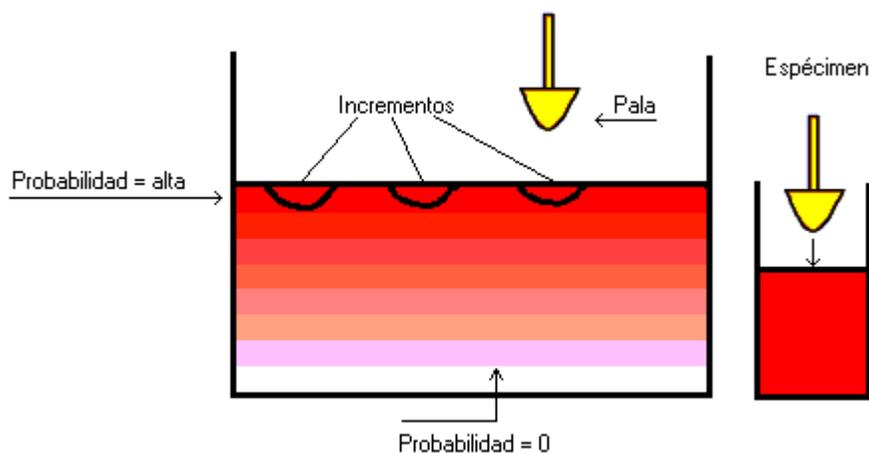


Figura II.2: El operador toma incrementos de la parte más accesible del lote. La suma de los incrementos constituye un espécimen.

En el muestreo estadístico, la definición de muestra equiprobable es análoga a la anterior.

Ejemplos de muestreos que no son equiprobables:

- a) Los muestreos de **carros** ó de **marinas** en minería, por lo general, no son equiprobables, porque se está obligado a tomar una **muestra superficial**.
- b) En muestreo estadístico, tomar **voluntarios** constituye un muestreo no equiprobable (ejemplo: test de drogadictos).

II.2. Tipos de Muestreo.

Los principales **tipos** de muestreo son los siguientes:

Muestreo aleatorio simple.

Consiste en la selección de n fragmentos ó unidades del lote M_L de modo que **todas las muestras posibles de tamaño n tengan la misma probabilidad de ser elegidas.**

Ejemplo:

En una mina hay 100 cátodos de cobre (numerados) para análisis. Se sortean (con una tabla de números aleatorios) 5 cátodos y se envían para análisis al laboratorio. Se analiza Cu, O, S, Cl, Pb, Zn, Ni, Mn, Fe, Ag, As, Sb, Se, Te, Bi, Sn, etc. (ver figura IV.8).

Muestreo sistemático.

En este caso las **extracciones** de las muestras son determinadas **según una regla fija.**

Ejemplos:

- Tomar **canaletas** en una galería cada 2 metros.
- En una **cinta transportadora**, tomar una muestra cada 10 minutos.

Muestreo estratificado.

El lote M_L se divide en partes o **estratos** que **no se solapan entre sí.** Cada estrato es muestreado posteriormente según los procedimientos anteriores.

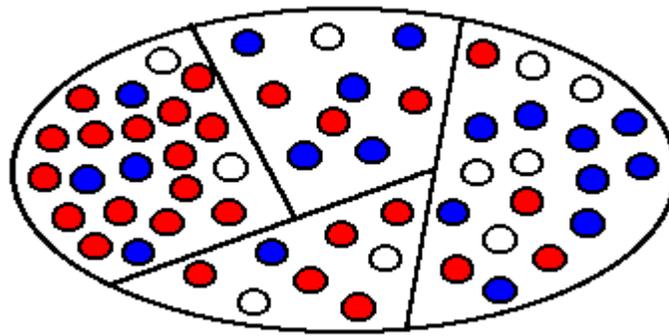


Figura II.3: El muestreo estratificado.

Ejemplo:

En las figuras II.4 se tiene un experimento de muestreo estratificado en un depósito de **yodo**. Se realizaron **sondajes**, de 2 metros de profundidad los cuales proporcionaron las leyes z_1, z_2, z_3, \dots . Luego el material M_L de la **zanja** de $5m \times 2m \times 1m$ se redujo a la muestra M_S considerando dos estratos (material **fino** y material **grueso**). El muestreo fue manual y la proporción finos/gruesos se determinó “visualmente”. Los resultados de la muestras y_1, y_2, y_3, \dots (ver Tabla 1) indican la presencia de un **sesgo o error sistemático** (datos en ppm.).

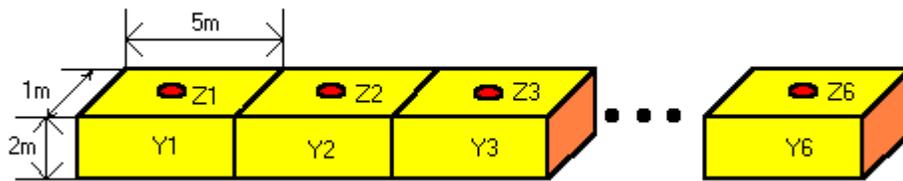


Figura II.4(a): Bloques de $1m \times 5m \times 2m$.

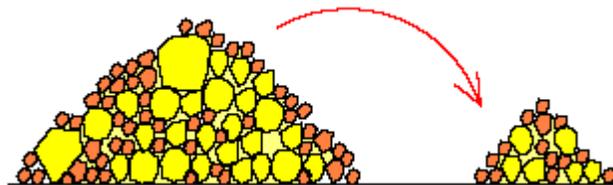


Figura II.4(b): Generación “visual” de la muestra M_S .

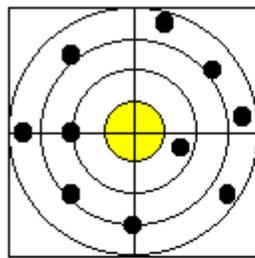
Tabla 1

Zanja	Ley sondaje Zi	Ley muestra Yi
1	520	830
2	630	1050
3	600	1100
4	550	910
5	580	820
6	550	860

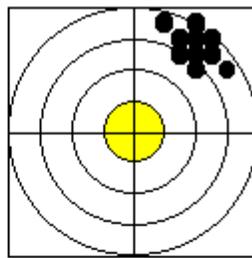
II.3. Exactitud y Precisión.

En teoría del muestreo de minerales se utilizan las nociones de **exactitud** y **precisión**. La figura II.5 clarifica estos conceptos.

En términos estadísticos estos conceptos corresponden respectivamente a la **media**, la cual debe ser **insesgada** (exactitud) y a la **varianza** del error, la cual debe ser **pequeña** (precisión)



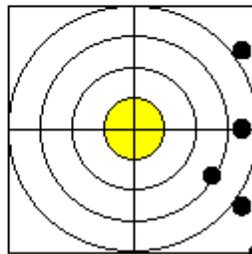
a)



b)



c)



d)



Figura II.5:

- a) Exactitud sin precisión.
- b) Precisión sin exactitud.
- c) Exactitud y precisión.
- d) Ninguno.

En resumen:

Exactitud \Leftrightarrow Media
Precisión \Leftrightarrow Varianza

“La media debe ser insesgada (sin desviación sistemática) y la varianza debe ser pequeña”.

Ejemplo:

Sea M_L una población o lote con 4 datos y M_S una muestra de 2 observaciones del lote:

$$M_L = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad N = 4$$
$$M_S = \{a_1, a_2\} \quad n = 2$$

Las muestras posibles y las **medias muestrales** correspondientes son:

$\{x_1, x_2\}$	$m_1 = (x_1 + x_2) / 2$
$\{x_1, x_3\}$	$m_2 = (x_1 + x_3) / 2$
$\{x_1, x_4\}$	$m_3 = (x_1 + x_4) / 2$
$\{x_2, x_3\}$	$m_4 = (x_2 + x_3) / 2$
$\{x_2, x_4\}$	$m_5 = (x_2 + x_4) / 2$
$\{x_3, x_4\}$	$m_6 = (x_3 + x_4) / 2$

La media del lote es (observar que en nuestro caso **minero** nos interesa en general el **muestreo sin reemplazamiento**):

$$m_0 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) / 4$$

y la media de las muestras (posibles) es:

$$m^* = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) / 6$$

se observa entonces que:

$$m_0 = m^*$$

Se dice que la media de la muestra (de 2 observaciones) $m = (x_i + x_j) / 2$ es un **estimador insesgado** de la media del lote $m_0 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) / 4$.

La propiedad de disponer de un estimador insesgado se cumplirá cuando la muestra sea equiprobable.

En la práctica, cuando sea posible, **siempre se deben utilizar estimadores insesgados** (la experiencia muestra que no existe nada más complejo que **corregir sesgos**).

III. El Muestreo Estadístico. Ecuaciones.

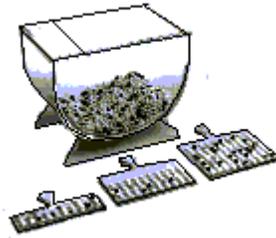


Figura III.1: Dispositivo para experimentos de muestreo. Sirve para demostrar que las fórmulas de muestreo “funcionan”.

Estudiaremos a continuación las **fórmulas** del muestreo estadístico las cuales constituyen una excelente introducción a las **fórmulas del muestreo de minerales**.

III.1. Formulas del muestreo aleatorio.

Sea

$$M_L = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \}$$

$$M_S = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \}$$

(se supone que los a_i corresponden a una elección al azar, sin reemplazar de los x_i).

$$m^* = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / n$$

es un **estimador insesgado** de:

$$m_0 = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) / N$$

por otra parte hay que calcular la **varianza** de la muestra, según la fórmula siguiente:

$$s^2 = [(a_1 - m^*)^2 + (a_2 - m^*)^2 + (a_3 - m^*)^2 + \dots + (a_n - m^*)^2] / (n - 1)$$

Se puede demostrar que la **varianza $S^2 = \text{Var}(m^*)$ del error de muestreo** está dada por:

$$S^2 = s^2 (1/n - 1/N) \quad (\text{III.1})$$

$$(n < N)$$

Luego, el **error de muestreo**, con 95% de confianza, asumiendo que los errores son **gaussianos**, lo cual es una **aproximación** razonable (ver Anexo 5), verifica la desigualdad:

$$-2S < \text{error} < 2S$$

Las ecuaciones anteriores resuelven el problema del **muestreo aleatorio estadístico**.

Observación:

el error de muestreo es **pequeño** cuando:

- a) **n es próximo a N** (en particular, si $n = N$ el error es **nulo**)
- b) la **varianza s^2 es pequeña**. Esto ocurre cuando hay poca **variabilidad** (los datos a_i son próximos a su promedio m^*)

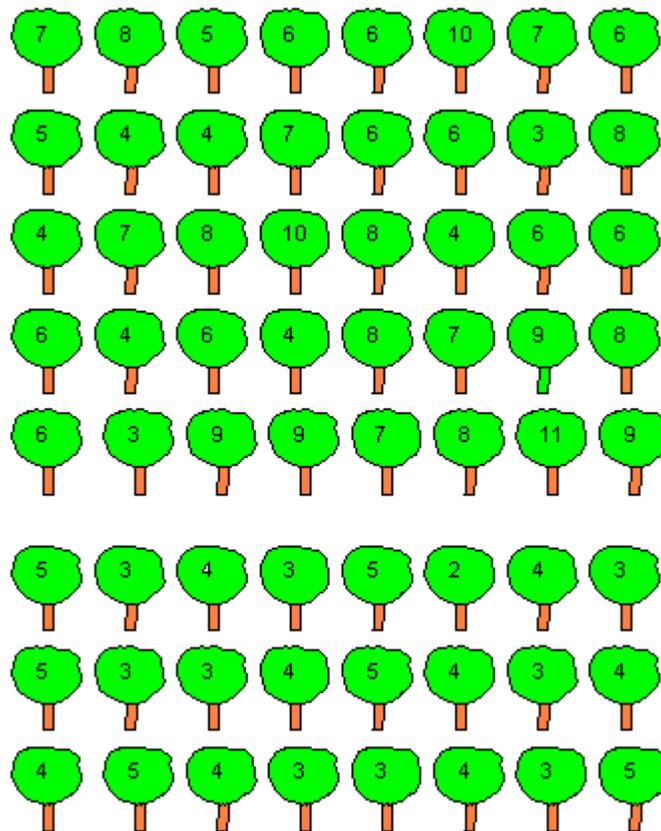


Figura III.2: 64 manzanos y su rendimiento en bushels.

Ejemplo:

En la figura III.2 se tienen $N = 64$ árboles de manzanas con su rendimiento en bushels: 1 bu = 35 lt (podrían ser diámetros de partículas, leyes de muestras, etc.) La media real es $m_0=5.56$. Mediante una tabla de números al azar (ver Anexo 1), se sorteó la siguiente muestra (sin reemplazamiento) de $n=8$ árboles:

$$\{6, 5, 5, 9, 6, 6, 2, 3\}$$

Obteniéndose:

$$\begin{array}{ll} \text{Media estimada} & = 5.25 \text{ Bu} \\ \text{Error de estimación} & = 1.40 \text{ Bu} \end{array}$$

(el error de estimación, con 95% de confianza es $2S$).

III.2. Formulas del muestreo aleatorio estratificado.

En el caso del muestreo **aleatorio estratificado** se eligen k estratos, siendo $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$ los tamaños de cada estrato. En cada estrato tomamos n_i datos. El tamaño de la población total es N :

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_k$$

$$m^* = (N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3 + \dots + N_k m_k) / N$$

Es un estimador **insesgado** de la media de la población m .

y la **varianza del error de estimación** es:

$$S^2 = [(N_1 S_1)^2 + (N_2 S_2)^2 + (N_3 S_3)^2 + \dots + (N_k S_k)^2] / (N)^2$$

(observar que siempre se multiplica por N_i y nunca por n_i)

En las expresiones anteriores se tiene:

$$m_i = [a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n_i}] / n_i$$

$$S_i^2 = s_i^2 (1/n_i - 1/N_i)$$

$$s_i^2 = [(a_1 - m_i)^2 + (a_2 - m_i)^2 + (a_3 - m_i)^2 + \dots + (a_{n_i} - m_i)^2] / (n_i - 1)$$

El muestreo aleatorio estratificado, bien aplicado, proporciona, en general, **mejores resultados** que el muestreo aleatorio simple.

Ejemplo:

En el caso anterior de los árboles, las tres últimas filas corresponden a árboles nuevos. Realizar varios muestreos estratificados con dos estratos (árboles viejos y árboles nuevos); ver que la teoría **funciona** comparando la **estimación, el valor real y el error**.

IV. Consideraciones prácticas para el muestreo de minerales.

Resulta difícil proporcionar recomendaciones prácticas **generales** acerca del muestreo de minerales, debido a que esta operación se realiza en todas las etapas de un Proyecto Minero y a que no existen dos minas iguales entre sí.

El punto **fundamental** es siempre (para no tener sesgos) y resultados reproducibles:

“Muestras representativas, es decir equiprobables y de varianza pequeña”

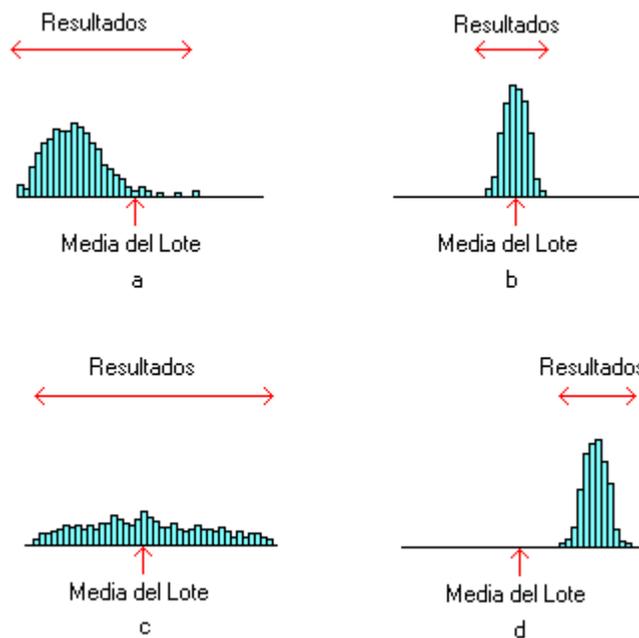


Figura IV.1:

Recordar que: insesgado \Leftrightarrow exacto

varianza pequeña \Leftrightarrow preciso

a) sesgado, varianza grande

b) insesgado, varianza pequeña

c) insesgado, varianza grande

d) sesgado, varianza pequeña

IV.1. Ejercicios y complementos.

1. Utilizando las ecuaciones del muestreo comprobar que se puede calcular el tamaño n de la muestra utilizando la relación:

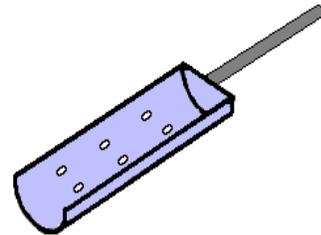
$$n = \frac{1}{\frac{S^2}{s^2} + \frac{1}{N}} \approx \frac{s^2}{S^2} \quad (\text{Si } N \text{ es grande})$$

El usuario puede fijar el error $2S$, luego S sería conocido. Sin embargo s es desconocido y sería necesario realizar algunas mediciones para estimar su orden de magnitud.

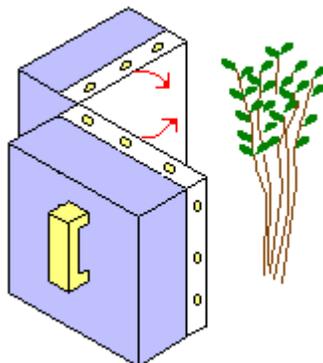
2. En ciertas ocasiones, en el muestreo estadístico, es difícil definir la población ó lote. Por ejemplo, se desea hacer una encuesta de votación acerca del apoyo al candidato A en una cierta asociación. ¿Cuál es la población? (los socios inscritos, los socios al día en las cuotas, los socios que votaron la vez anterior, ...).

Supongamos que van a votar $N=580$ socios y que se hace una encuesta tomando, al azar, $n=100$ socios, obteniendo el apoyo de 62 socios. Comprobar que el error de muestreo verifica (con 95% de confianza): $-0.09 < \text{error} < 0.09$. ¿Está seguro de ser elegido el candidato?

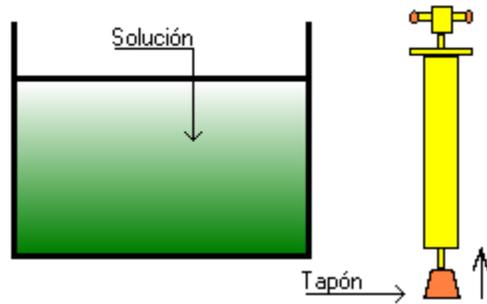
3. Ejemplos de muestreo. A continuación se presenta una serie de muestreos. Criticarlos desde el punto de vista de la equiprobabilidad. ¿En qué casos se trata de un espécimen?



- a) Figura IV.2: Se desea tomar una muestra del balde del LHD, para analizar la ley de cobre de producción. Observar la granulometría del material. En esta mina se utiliza una poruña con hoyos para no tener mucho material fino en la muestra. Comentarios.



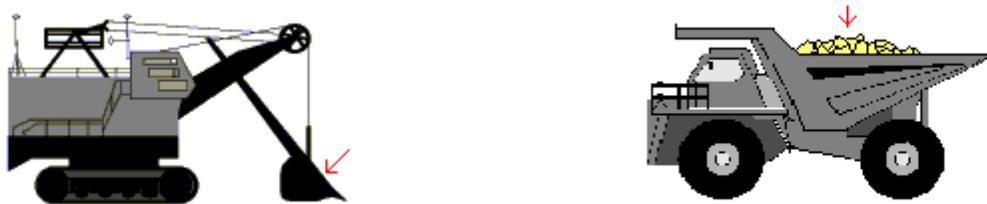
- b) Figura IV.3: En ecología del suelo, para disponer de muestras uniformes, se utiliza el muestreador de la figura. Comentarios.



- c) Figura IV.4: Muestreo de una solución de lixiviación. Se utiliza el muestreador de la figura llamado coliwasa (composited liquid waste sampler). Comentarios.



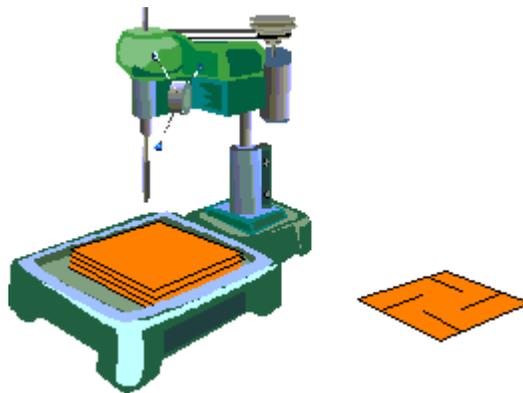
- d) Figura IV.5: Izquierda: sonda para muestreo en un tranque de relaves. Derecha: probeta para muestreo del suelo. Comentarios.



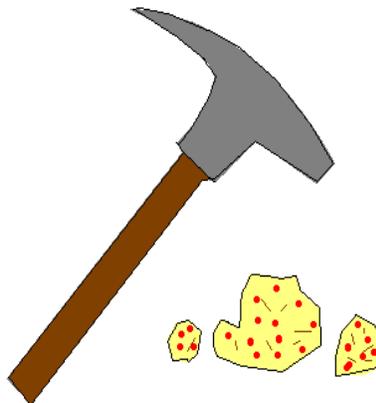
- e) Figura IV.6: Cómo tomar una muestra del balde de la pala ó de la carga del camión. En ciertas minas de uranio se pone un contador Geiger sobre las cargas. Comentarios.



- f) Figura IV.7. ¿Cómo garantizar que el lingote de cobre de la figura tiene pureza del 99%?. Comentarios.



- g) Figura IV.8. Muestreo de cátodos de cobre. Se hacen 3 perforaciones en diagonal (izquierda). En otra mina se hacen 4 cortes con sierra (derecha). Comentarios.



- h) Figura IV.9. Una vez tomada la muestra, por ejemplo las rocas de exploración de la figura, ya es demasiado tarde: no existe ningún test que garantice si la muestra es buena o es mala. La toma de la muestra debe ser planificada previamente según el criterio de representatividad (equiprobable y de varianza pequeña). Comentarios.

4. Son buenas o son malas las muestras siguientes: a) 1cc de sangre para medir glóbulos rojos. b) 5cc de orina para medir glucosa.
5. Kennedy leía una cada 50 cartas de las 30,000 que llegaban semanalmente a la Casa Blanca. Comentar desde el punto de vista del muestreo.
6. En 1936 la revista norteamericana The Literary Digest realizó una encuesta entre sus suscriptores, recibiendo 2,400,000 respuestas. Predijo la derrota de Roosevelt quién obtendría un 41% de los votos. Un estadístico de apellido Gallup encuestó a 5,000 futuros votantes mediante un muestreo que trataba de reproducir la equiprobabilidad predijo el triunfo de Roosevelt por un 56%. El día de la elección, Roosevelt obtuvo el 61% de los votos.
- Explicar el fracaso de la encuesta del Literary Digest (revista que a los pocos meses quebró). Conclusión: si una muestra está sesgada, el hecho de ser grande no corrige el error, sino que lo repite a mayor escala.
 - Calcular el error de la encuesta de Gallup (considerar $N = \infty$).
 - Si resolvió la pregunta anterior, entonces la teoría del muestreo equiprobable funciona bien. ¿Se podría reemplazar entonces el sufragio universal por una encuesta? Comentarios.
7. Tome un periódico y revise el listado de acciones transadas. Use como variable x en estudio el total transado. Calcule el promedio m de esta variable. Registre el número total de empresas N . Ahora tome 1 empresa cada 10 y forme una muestra de n datos. Calcular un estimador m' de la media de x promediando los valores de su muestra. Compare con m . Calcule ahora el error de muestreo asociado a su estimación. Conclusiones.
- Ahora realice el sorteo de las empresas utilizando la Tabla de números aleatorios del Anexo. Para ello proceder de la forma siguiente (sortear n empresas al azar y sin repetición): numere las empresas del 1 a N . Suponiendo que $N \leq 100$, tomar la primera columna con dos dígitos, por ejemplo 14, 26, 69, ...esto quiere decir que la muestra aleatoria está compuesta por la empresa 14, luego la empresa 26, luego la empresa 69,.... Esto termina al llegar al número n . (si los números al azar se repiten, salte al número siguiente, si por ejemplo $N=95$ y sale sorteada la empresa 98, salte al número siguiente.). Repetir los calculos anteriores para esta nueva muestra y comparar.
8. El sesgo de las casas. Un muestreo estadístico no equiprobable consiste en elegir una casa al azar y luego elegir al azar, una persona, entre los miembros de la familia. Una persona de una familia poco numerosa tiene más probabilidad de estar en la muestra que una persona de una familia numerosa.

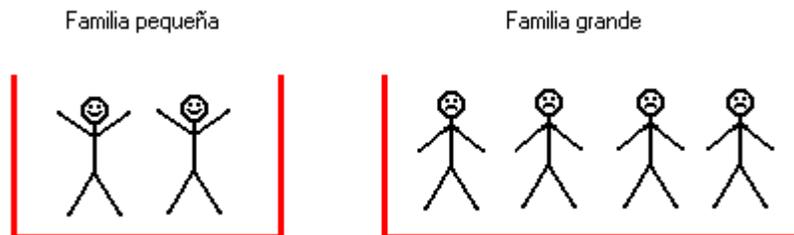


Figura IV.10: El sesgo de las casas.

9. Un experimento de muestreo. Tomar los manzanos de la figura III.2. Numerarlos del 01, 02, ..., 64. (a) Utilizar la Tabla del Anexo 1 para tomar una muestra de tamaño $n=4$. Guardar los 4 resultados. (b) Calcular la media $(x_1+x_2+x_3+x_4)/4$. Repetir las etapas (a) y (b) cuatro veces más (cinco en total), utilizando cada vez una zona diferente de la Tabla. El promedio de las cinco medias debería ser próximo al valor real 5.56 (la media es un estimador insesgado cuando la muestra es equiprobable).

IV.2. Los 3 estados del mineral.

En la figura IV.11 aparecen los **estados** en que se puede encontrar el mineral:

- In situ**: corresponde en este caso aplicar la Teoría de la **Geoestadística**.
- Quebrado**: corresponde en este caso aplicar la Teoría del Muestreo de **Pierre Gy**, la cual estudiaremos más adelante.
- Liberado**: en este caso, debido a un proceso de conminución (molienda) se ha separado la **ganga (material estéril)** del componente crítico ó material con valor comercial ó **mena**.

Se observará que el **tamaño de la partícula**, caracterizado por un **diámetro nominal d** decrece de a) a c).

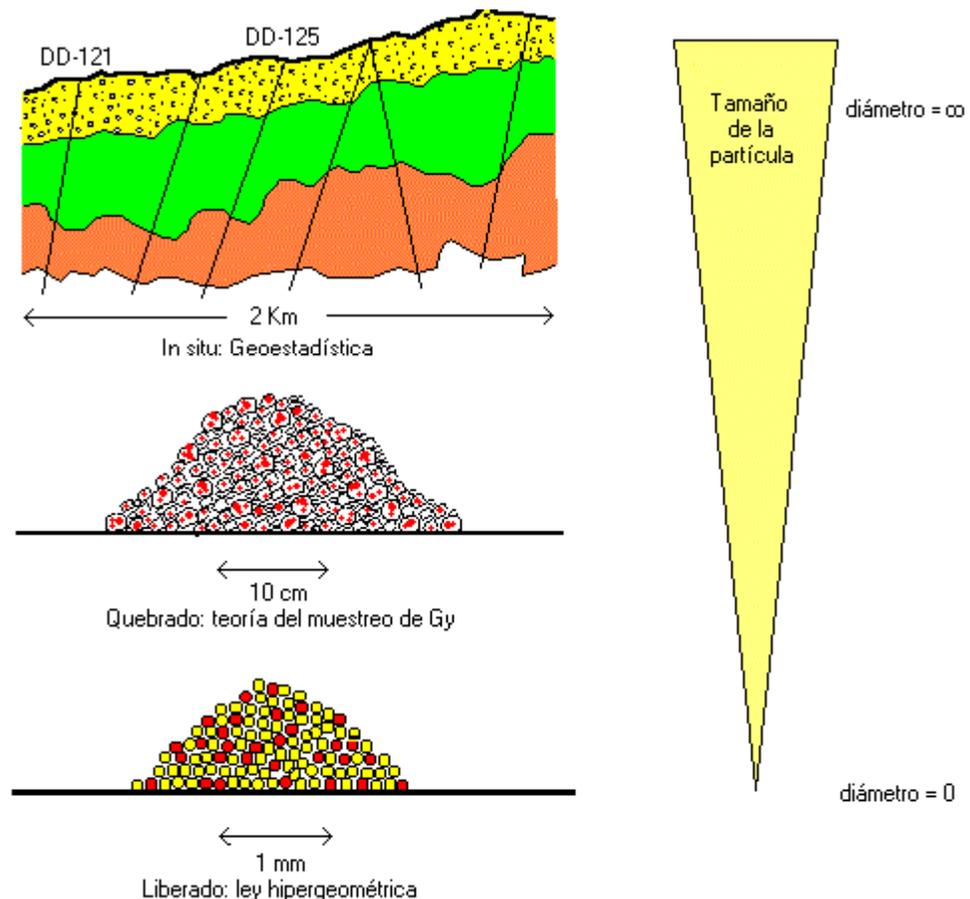


Figura IV.11: Los 3 estados del mineral.

IV.3. La Segregación.

Las partículas de mineral tienden a **segregarse** (figura IV.12), por ejemplo las más **pesadas** tienen una tendencia a localizarse en el fondo. El caso homogéneo es muy **difícil** de encontrar en la práctica (algunos autores afirman que este caso es inexistente). Sin embargo, el fenómeno de segregación es más complejo y depende además de las **granulometrias, formas y pesos de las partículas**. Para ver lo anterior haga el **experimento** siguiente: ponga en un recipiente transparente una cierta cantidad de porotos y otra cantidad de azúcar: observar que es **imposible** tener un conjunto homogéneo (IV.13)

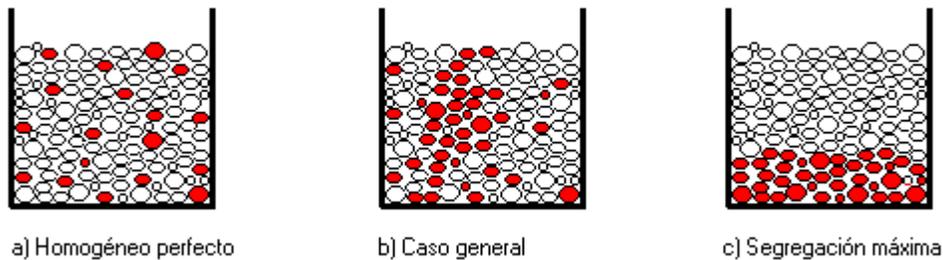


Figura IV.12: Diferentes tipos de segregación.



Figura IV.13: Experimento para comprobar la segregación de dos materiales azúcar y porotos. No se pueden mezclar.

Una **receta** para **disminuir el efecto de la segregación** en la toma de la muestra es realizar varios **incrementos**, es decir tomar un cierto número de **submuestras** para constituir una muestra primaria (figura IV.14).

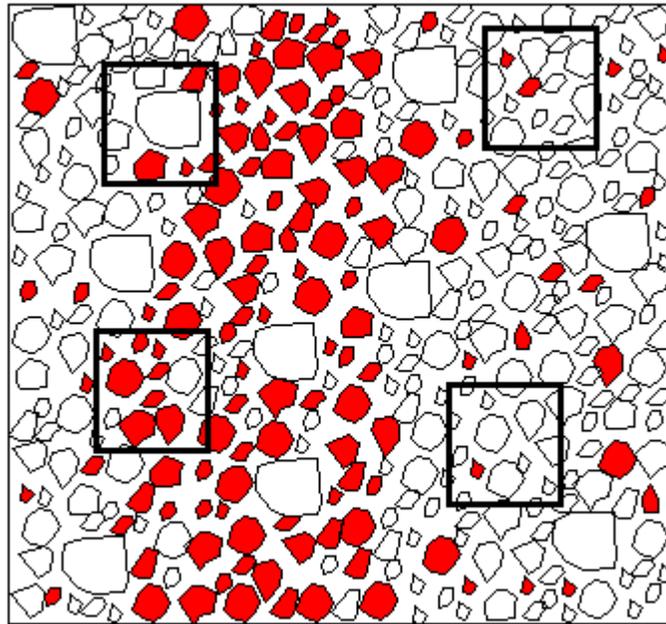


Figura IV.14. Incrementos para constituir una sola muestra, disminuyendo el efecto de segregación.

Donde se producen segregaciones importantes es en las cintas transportadoras de mineral, tal como muestra la figura IV.15.

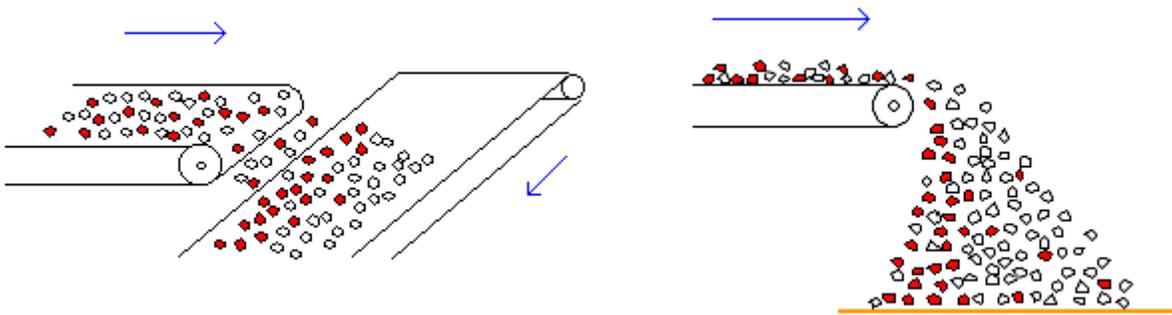


Figura IV.15: Segregación en cintas transportadoras.

No se han realizado muchos estudios prácticos respecto del problema de la segregación de minerales pero se sabe que es un **problema** mayor.

IV.4. La extracción de la Muestra.

La extracción e integridad de la muestra es de vital importancia en el muestreo minero. Revisemos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Es muy difícil tener la situación ideal de **recuperación** de sondaje. En la mayoría de los casos se trabaja, desafortunadamente, en un punto intermedio entre la situación correcta e incorrecta (figura IV.16).

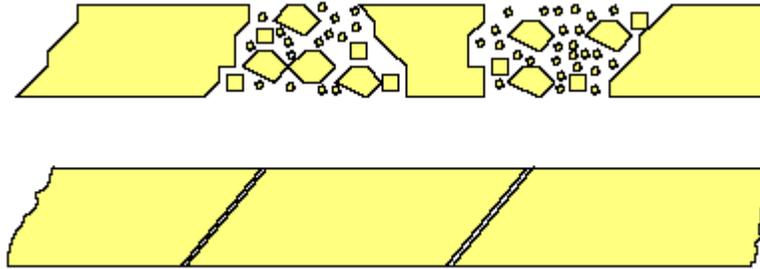


Figura IV.16. Testigo. Situación incorrecta (superior) y correcta (inferior)

En este tipo de situaciones se debe estudiar la correlación entre la recuperación de la muestra y la ley de mineral y llevar lo anterior a un gráfico. No debería haber correlación entre estas variables.

Ejemplo 2: Los **tubos** de muestreo de detritus deben tener una abertura adecuada (figura IV.17).

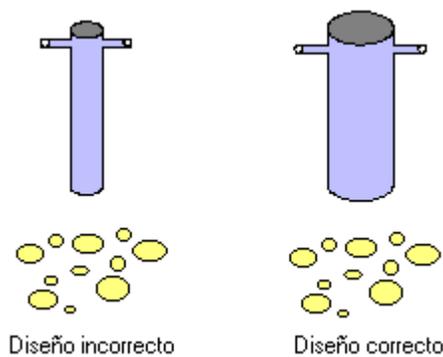


Figura IV.17: Tubos para captar detritus.

Ejemplo 3: El **riffle** (aparato utilizado para dividir una muestra en dos) debe tener abertura de manera de contener todas las partículas (figura IV.18).

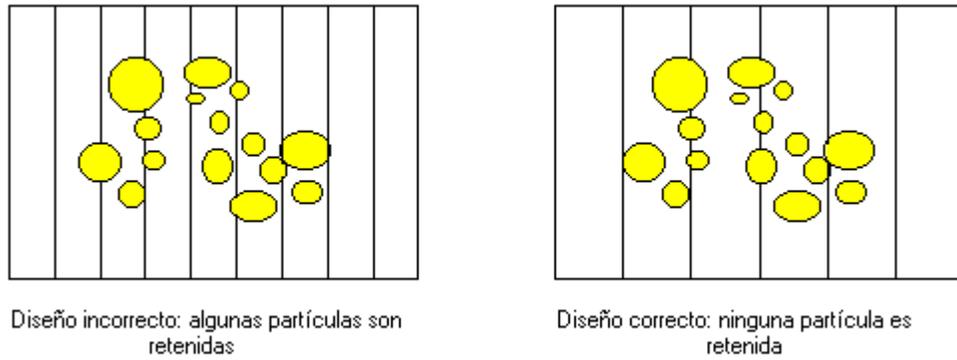


Figura IV.18: Riffle mirado desde arriba

Ejemplo 4: Las palas deben tener una abertura suficiente de manera de contener los diferentes tipos de tamaño (granulometría) del material quebrado (figura IV.19).

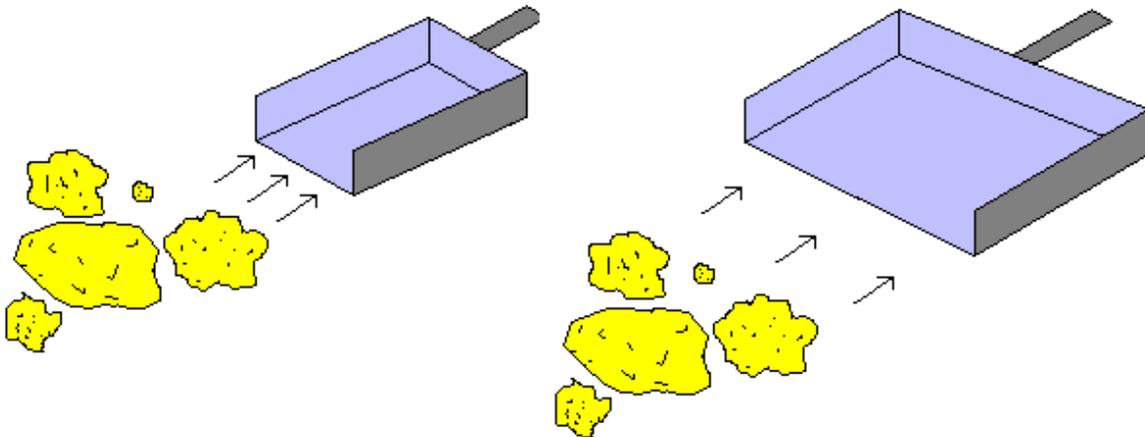


Figura IV.19: Palas de muestreo. Diseño incorrecto (izquierda), diseño correcto (derecha).

Una solución para el diseño es tomar el diámetro d de la abertura de manera tal que:

$$d > 3d_M$$

en que d_M es el diámetro de la partícula máxima.

En general la muestra debe respetar la **granulometría** del lote debido a que en la mayoría de los casos, **la ley del material fino puede ser muy diferente de la ley del material grueso.**

Respecto a la integridad de la muestra. Es evidente que si se usa una bolsa, ésta debe ser resistente, estar bien etiquetada (rotulada) y guardada en un lugar seguro. En ciertas ocasiones la muestra debe estar a prueba de **fraudes** o de **contaminación**.



Figura IV.20: Hay que proteger la muestra. Con buena identificación (interior y/o exterior).

IV.5. La delimitación de la Muestra.

La **delimitación** de una muestra está íntimamente relacionada con la **representatividad** de la misma. Es importante que la delimitación sea correcta. Revisemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: En una mina a cielo abierto, la muestra de un pozo de tronadura debe ser **representativa del banco** y no debería considerarse la **pasadura**. Lo anterior, dependiendo del método, ocasiona **problemas operacionales**, debido a que habría que detener la perforación del hoyo y/o cubrir el cono de detritus con una lona ó plástico (figura IV.21).

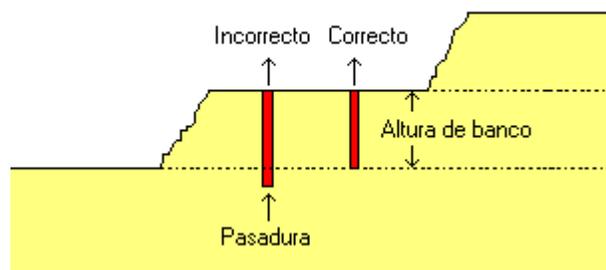


Figura IV.21. La muestra debe representar al "banco".

Ejemplo 2: En una pila de lixiviación de ripios, de 2 metros de altura, se toman muestras de sondajes de profundidad 1.5 metros (para no destruir la membrana inferior). Esta muestra, mal delimitada, está **sesgada** debido a que, por lo general, la ley del fondo es mayor que la ley de la superficie (figura IV.22).

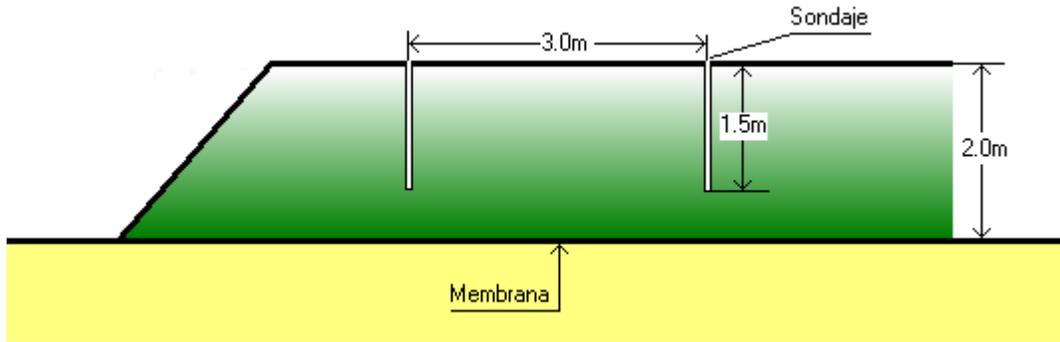
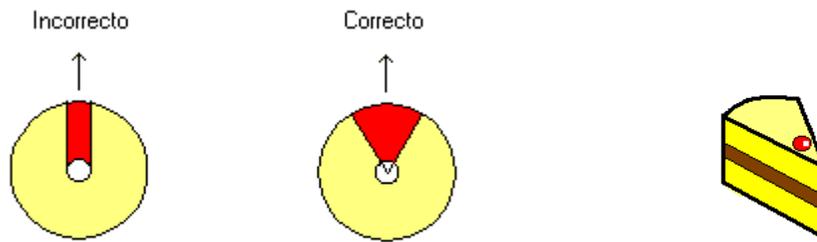


Figura IV.22: sondajes en una pila de lixiviación.

Ejemplo 3: La sonda de la figura IV.5 a veces proporciona **recuperaciones** de muestra de 40%, a veces del 150%.

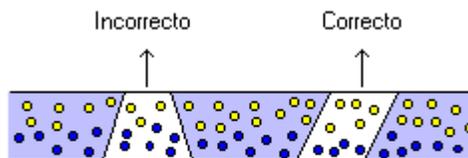
Ejemplo 4: Si se utiliza un **captador** de polvo de perforación, éste debe ser **radial** (de esta manera se respeta la proporción de finos/gruesos en la muestra, tal como veremos más adelante).



Muestreo de pozos de tronadura

Figura IV.23: El captador debe ser radial. Por ejemplo en una torta, un corte radial garantiza una repartición equitativa de las “guindas”.

Ejemplo 5: En una **cinta transportadora** la geometría de la muestra debe ser un **rectángulo** ó un **paralelogramo** (figura IV.24).



Muestreo en una cinta transportadora

Figura IV.24: Vista de arriba. En una cinta transportadora la muestra correcta corresponde a un rectángulo o un paralelogramo.

Ejemplo 6: Una **submuestra** no se puede tomar en forma **superficial**, sobre todo si existe el fenómeno de **segregación** (figura IV.25)

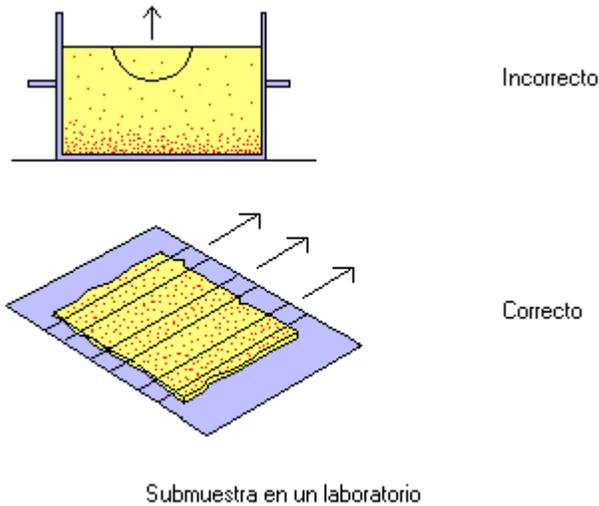


Figura IV.25. Forma incorrecta y correcta de tomar submuestras.

IV.6. Diseño de Palas.

Las **espátulas, poruñas y palas** tienen que tener un diseño recto, con bordes laterales, para no perder material, evitar el problema de la **segregación** y proporcionar muestras equiprobables (figura IV.26).

En muchos laboratorios se utilizan aún diseños curvos (algunos laboratorios de minas de oro).

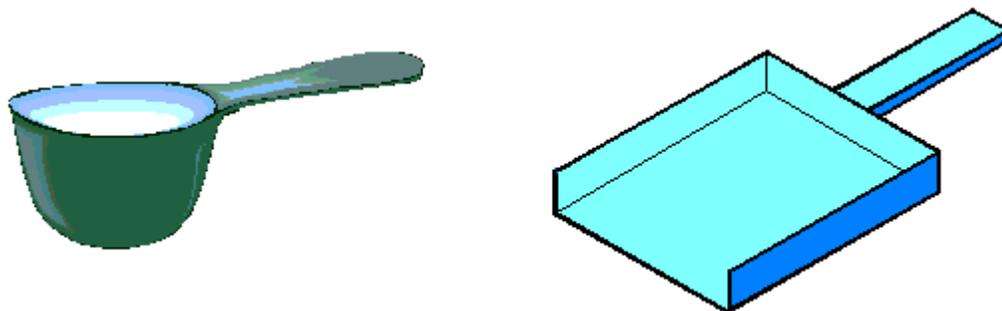
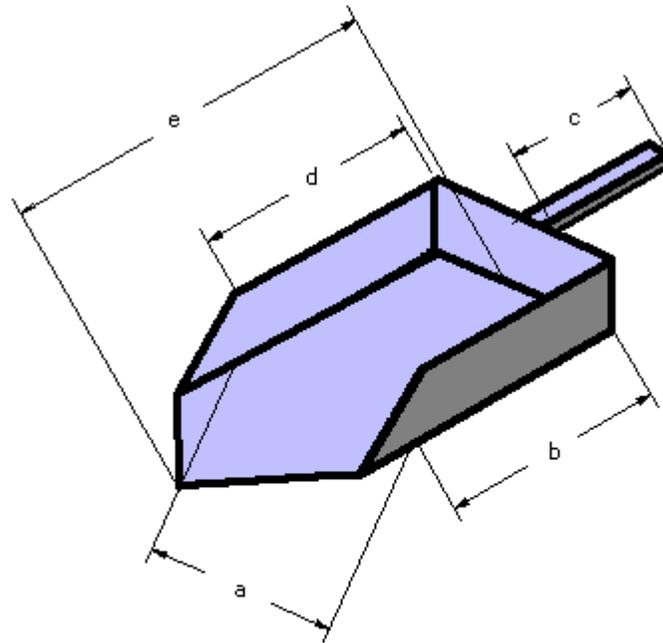


Figura IV.26: El cucharón curvo es incorrecto.

Hemos incluido también el diseño de una pala de muestreo según las normas JIS (Japanese Industrial Standards), que consisten en palas especialmente diseñadas para diferentes tipos de material (figura IV.27). Esta norma considera tamaños máximos de partículas de 150 mm.



Normas JIS
Japanese Industrial Standards

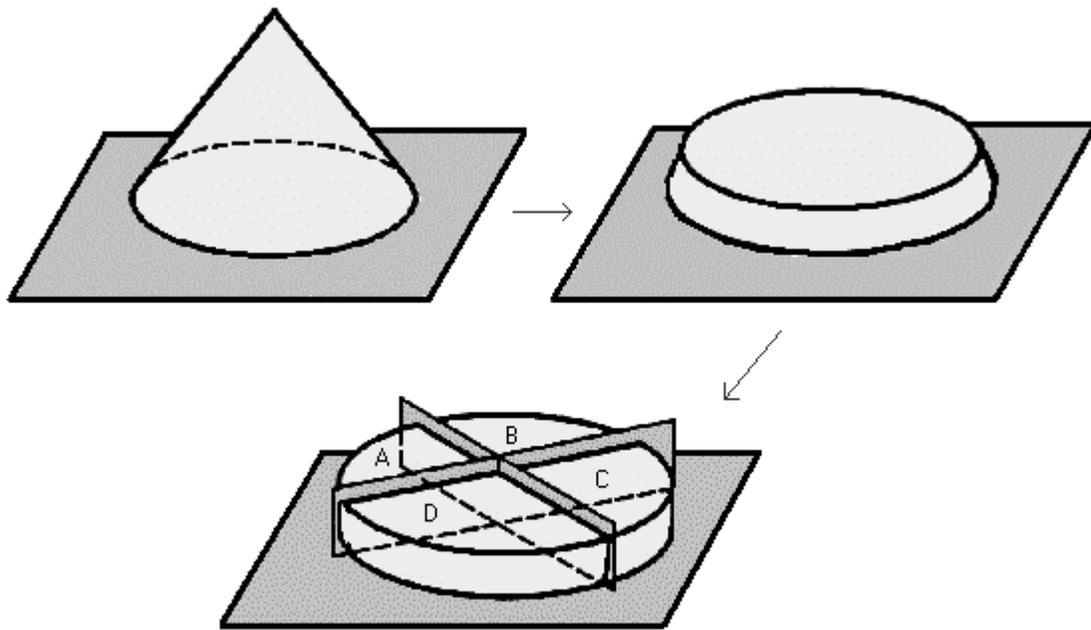
Figura IV.27.

IV.7. Reducción de la Muestra. Cuarteo, Riffle, vibrador rotatorio, mesa vibradora.

La **reducción** ó **división** de una muestra **es necesaria** en la práctica. Principalmente se utiliza:

- **Cuarteo**
- **Riffle.**
- **Divisor rotatorio**
- **Divisor de mesa.**

El cuarteo manual debe realizarse en forma cuidadosa (figura IV.28).



$$A = B = C = D$$

Figura IV.28: Cuarteo manual.

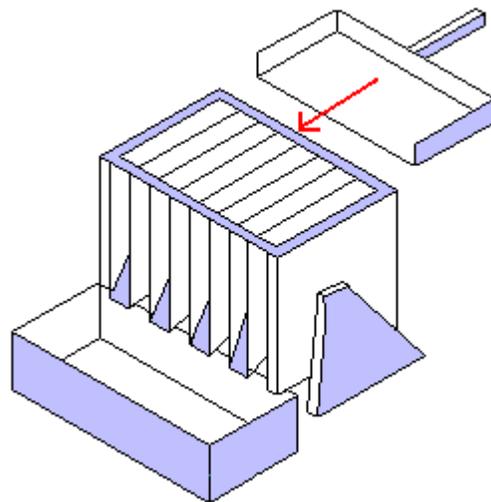


Figura IV.29: El riffle.

La figura IV.29 muestra un riffle y la figura IV.30 muestra la manera adecuada de cargarlo: debe realizarse en el centro, lentamente, con una pala adecuada. Esto asegura que las 2 **submuestras** son aproximadamente iguales (para garantizar la equiprobabilidad).

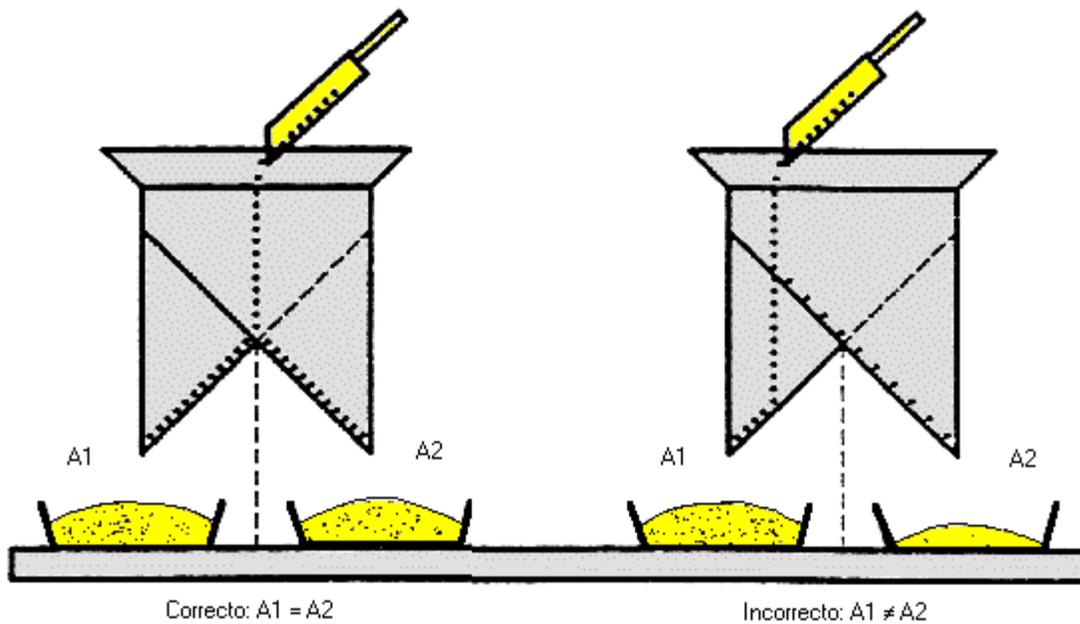


Figura IV.30: forma correcta e incorrecta de cargar un riffle.

Reglas del cortador Riffle.

Para el un riffle, es necesario tener en cuenta las reglas siguientes:

- Al menos 12 canales** (observamos que en las figura IV.29 no se cumple esta regla).
- Número par de canales** (a veces el dispositivo es “hechizo”, se hace “en casa” y no se respeta esta regla evidente).
- Abertura** de canales mayor que 2 veces el diámetro máximo de las partículas (es obvio que no deben quedar partículas retenidas).
- Alimentar** o cargar **lentamente**, desde el **centro**, con el contenedor diseñado (tal como se muestra en las figuras IV.29 y IV.30).

En la figura IV.31 se tiene un **divisor rotatorio** el cual consiste en un alimentador vibratorio y una mesa rotatoria con subdivisiones, las cuales se consideran como submuestras. El único problema de este aparato es que en algunas ocasiones, al terminar la operación, queda un remanente de material fino en el alimentador.

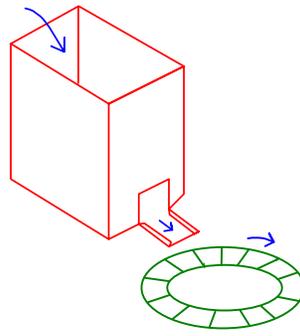


Figura IV.31: Divisor rotatorio.

En la figura IV.32 hemos representado un divisor de mesa. La mesa es vibratoria. Este dispositivo tiene, a veces, el mismo problema que el divisor rotatorio.

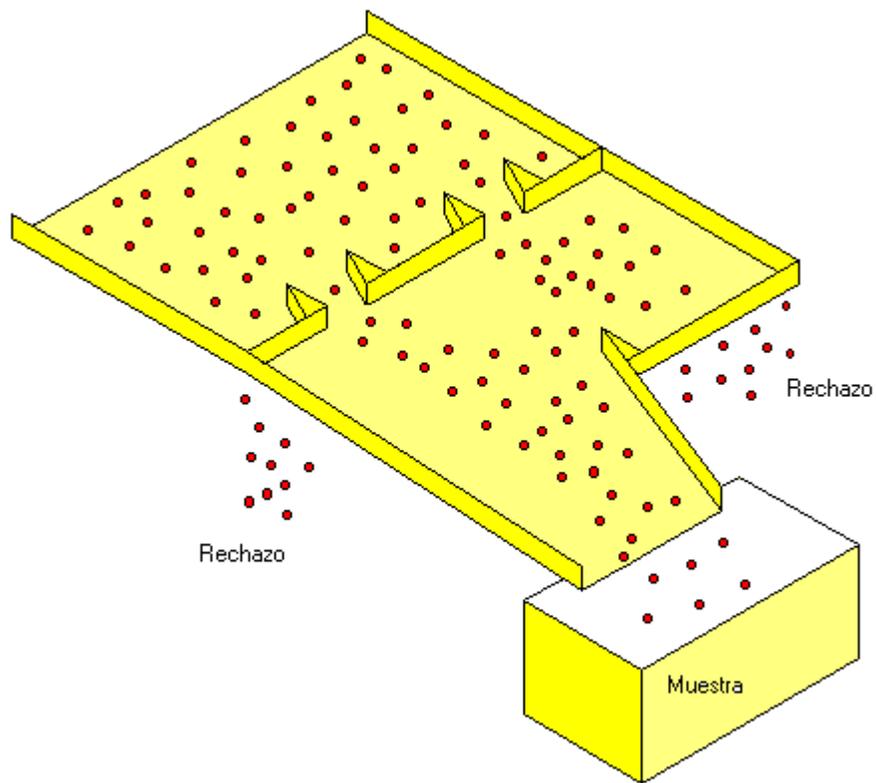


Figura IV.32: Divisor de mesa.

IV.8. Ejercicios y complementos.

1. ¿Qué le parece a usted cuartear tal como en la figura IV.33?

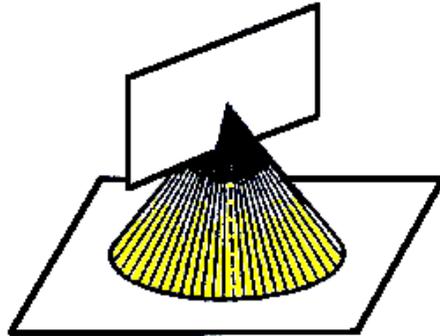


Figura IV.33: Cuarteo manual.

2. ¿Está bien cargado el riffle de la figura?

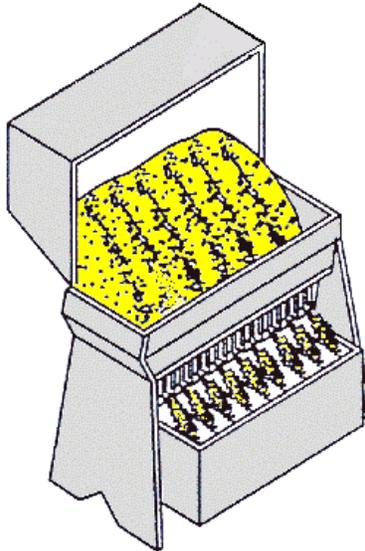


Figura IV.34: Carga de un riffle.

3. Qué comentarios le merece el invento siguiente para dividir muestras en laboratorio.

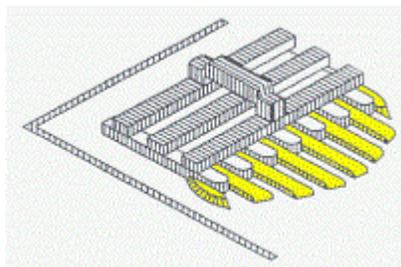


Figura IV.35: Aparato para dividir muestras.

4. Compare los diferentes métodos para dividir muestras (riffle, divisor circular, divisor de mesa) considerando los factores siguientes:
- Peso a reducir (grande o pequeño).
 - Granulometría del material.
 - Humedad del material. ¿Es necesario secar la muestra?
5. Cuando se perfora un pozo de tronadura se produce una segregación de las partículas. Las más livianas se van a la atmósfera. ¿Dónde van las más pesadas? ¿Cuál es la trayectoria de una partícula cualquiera?

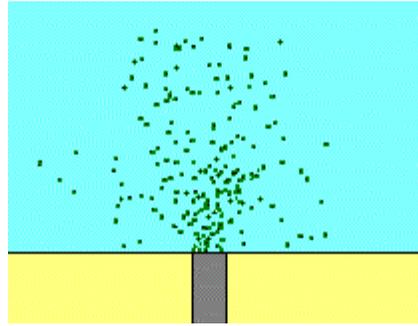


Figura IV.36: Perforación de un pozo.

6. Granulometrías. El estudio de las granulometrías es muy importante dado que a menudo la ley de los finos es significativamente diferente de la ley de los gruesos. Se utilizan tamices como en la figura IV.37(a). Dibujar, aproximadamente el histograma de los diámetros de partícula de la figura IV.37(b) y de la figura IV.2. Dibujar además los histogramas acumulados.



Figura IV.37(a): Tamiz para granulometrías.



Figura IV.37(b): Muestra de piedras.

7. Muestreo por canaletas (rozás) en vetas. En una veta se trata de llevar una galería en el sentido de la misma (figura IV.38). Se toma una canaleta (manual o con una sierra) en dirección ortogonal a la veta, en el techo de la galería. En este caso, ¿está bien delimitada la muestra?

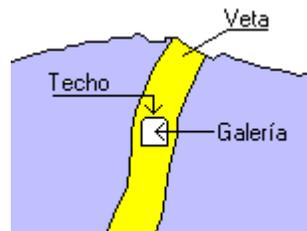


Figura IV.38: Muestreo de vetas

8. Espátulas. ¿Cuál de estos dos diseños preferiría en un laboratorio (figura IV.39)?

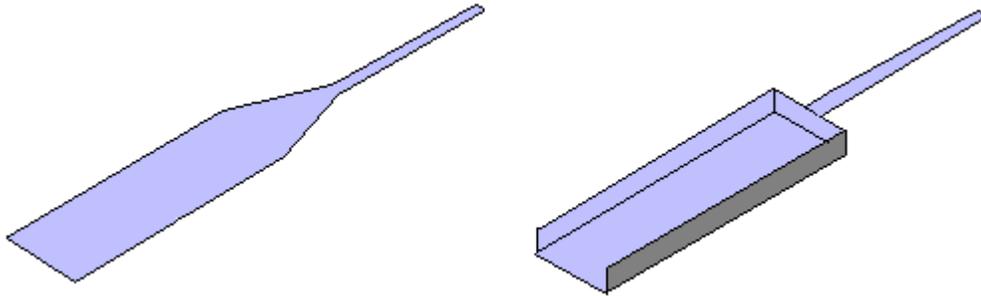


Figura IV.39: Espátulas.

9. Lectura en un equipo de absorción atómica. La figura IV.40 muestra un esquema de la operación. El matraz puede estar varias horas en reposo y los iones de oro, más pesados que el resto, se segregan progresivamente hacia el fondo, lo cual es imperceptible. Las lecturas del instrumento pueden variar de 1 a 2 una vez que se agita el matraz. ¿Qué hay que hacer para muestrear bien?

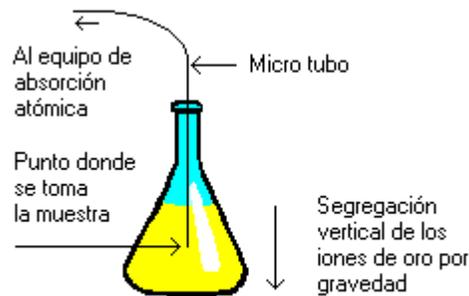


Figura IV.40: Lectura en un equipo de absorción atómica.

10. La "lanza", dispositivo para tomar muestras en pilas de lixiviación tiene el problema que la delimitación de la muestra no es correcta (figura IV.41)

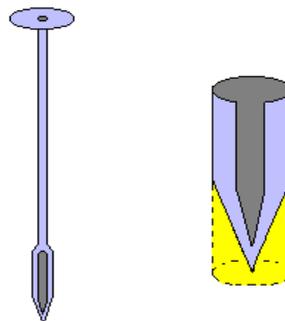


Figura IV.41: La lanza. En la operación se utiliza un martillo percutor.

11. Muestreo en una cinta transportadora detenida. Se utiliza el equipo de la figura IV.42, el cual produce una delimitación correcta. Sirve para chequear cortadores automáticos.

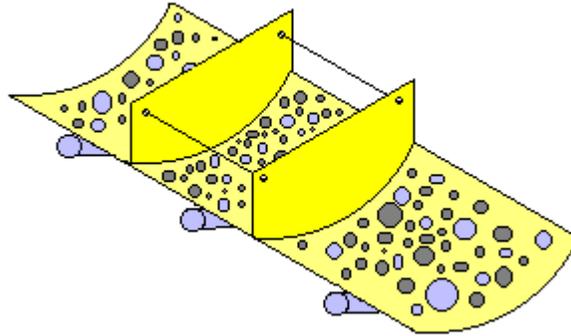


Figura IV.42. Muestreo en cinta detenida. Considere la figura V.2 siguiente para tener una buena delimitación.

12. ¿Qué opinión le merece esta pala para dividir una muestra en tres partes iguales?

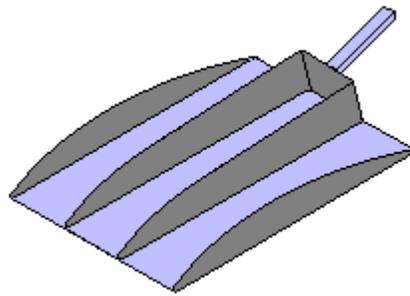


Figura IV.43. Una pala para dividir muestras en tres tercios.

IV.9. Algunas recetas sobre Muestreo de Minerales.

Otras recetas respecto del muestreo de minerales serían las siguientes:

La reducción debe ser verdadera. Para ello se debe utilizar: cuarteo, rifle, divisores. La selección del **respaldo** y del **rechazo** debe ser **aleatoria** (ejemplo: corte de un testigo en dos mediante un instrumento. Se recomienda tirar una moneda al aire y luego elegir el corte que va a análisis, con el fin de eliminar un posible “sesgo técnico”)

Siempre habrá que seguir las reglas siguientes:

- a) **Capacitar** al personal involucrado en el muestreo (señalar la importancia de disponer de una buena muestra).
- b) **Observar y verificar que la muestra es correcta.**
- c) **Evitar** el corte “manual”.
- d) **Fotografiar y/o filmar** las operaciones y equipos de muestreo en funcionamiento y **revisar** los resultados, cuidadosamente, en forma posterior.
- e) Respetar las **reglas** del cortador.
- f) Evitar el uso del “**roleo**” y “**cuarteo**” manual. Es preferible uso de riffle, o bien un divisor rotatorio.

La operación de roleo consiste en poner la muestra en una lona y luego tomar alternadamente la lona por las esquinas opuestas, con el propósito de “mezclar” las partículas (Figura IV.44). A veces se hace primero un roleo y luego un cuarteo manual.

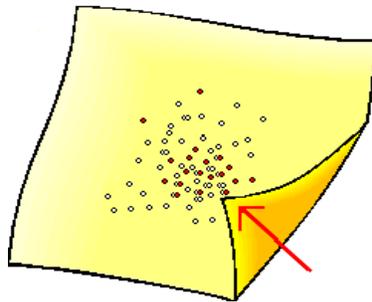


Figura IV.44. El “roleo”. Se ha comprobado que esta técnica no funciona bien.

V. Muestreo de flujos de minerales en movimiento.

Este muestreo se realiza una vez que el mineral ha salido de la mina. Se utilizan “cortadores” de muestras, los cuales deben ser perpendiculares al flujo (figura V.1)

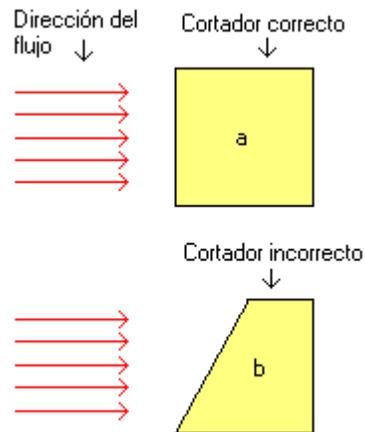


Figura V.1: el cortador incorrecto no es equiprobable.

V.1. Reglas de los cortadores de Muestras.

Los cortadores de muestras que se utilizan en plantas de tratamiento de minerales, en el caso de flujo continuo, deben seguir las reglas siguientes, para garantizar la equiprobabilidad:

- Deben ser **verticales**.
- Las caras deben ser **perpendiculares al flujo**.
- Las caras cortadoras deben estar **centradas** con respecto al flujo y **perpendiculares** al movimiento.
- La **velocidad**, la cual también debe seguir ciertas reglas que no explicitaremos aquí (en todo caso la experiencia indica que debe ser inferior a 0.6 m/s), debe ser **uniforme**.

Para el diseño de estos equipos hay que considerar que el centro de gravedad de la partícula es el que determina si ésta es cortada o no. Luego el diseño de los bordes debe ser afilado (figura V.2).

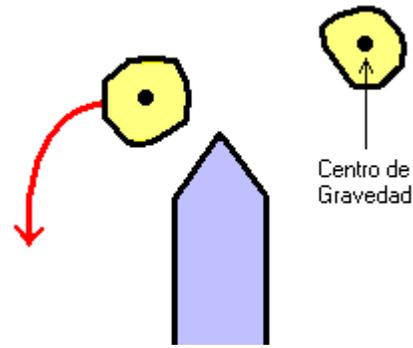


Figura V.2: Cortador.

Por otra parte el ancho del cortador debe considerar el efecto que se muestra en la figura V.3 (efecto de rebote). Para ello se debe utilizar: $d > 3d_M$ (d_M =diámetro de partícula máximo). Para mayor seguridad se recomienda $d > 4d_M$

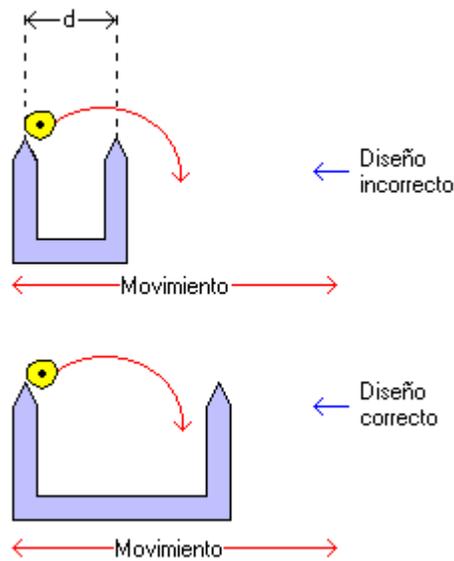


Figura V.3: El diseño del cortador debe considerar los choques de la partícula. Efecto de rebote.

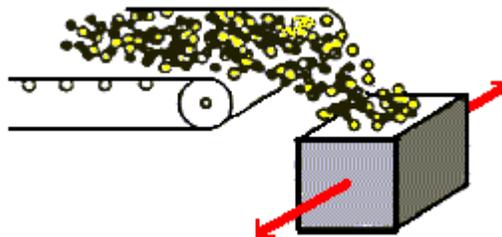


Figura V.4. Un cortador de flujo de minerales. Existen varios tipos.

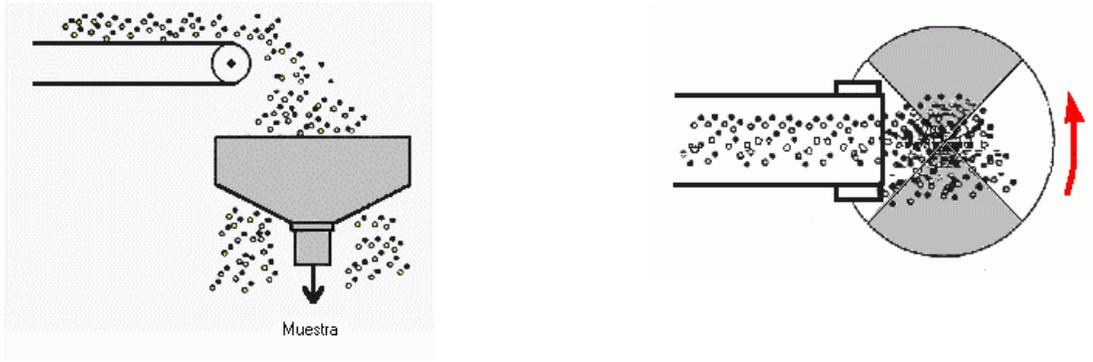


Figura V.5: Muestreador rotatorio.

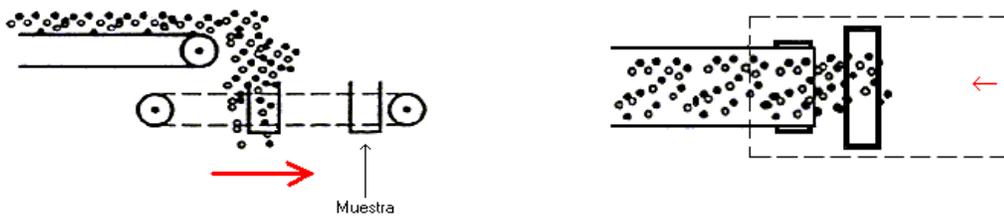


Figura V.6: Muestreador de cadena y tacho.

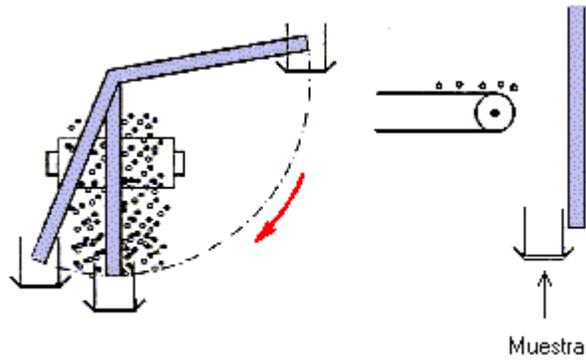


Figura V.7: Muestreador de brazo. Produce, en general, malos resultados.

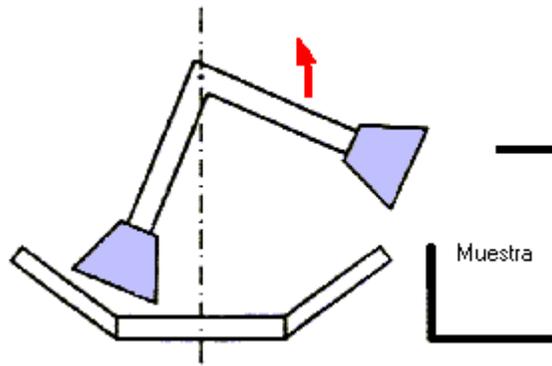


Figura V.8: Muestreador de martillo. Produce, en general, malos resultados.

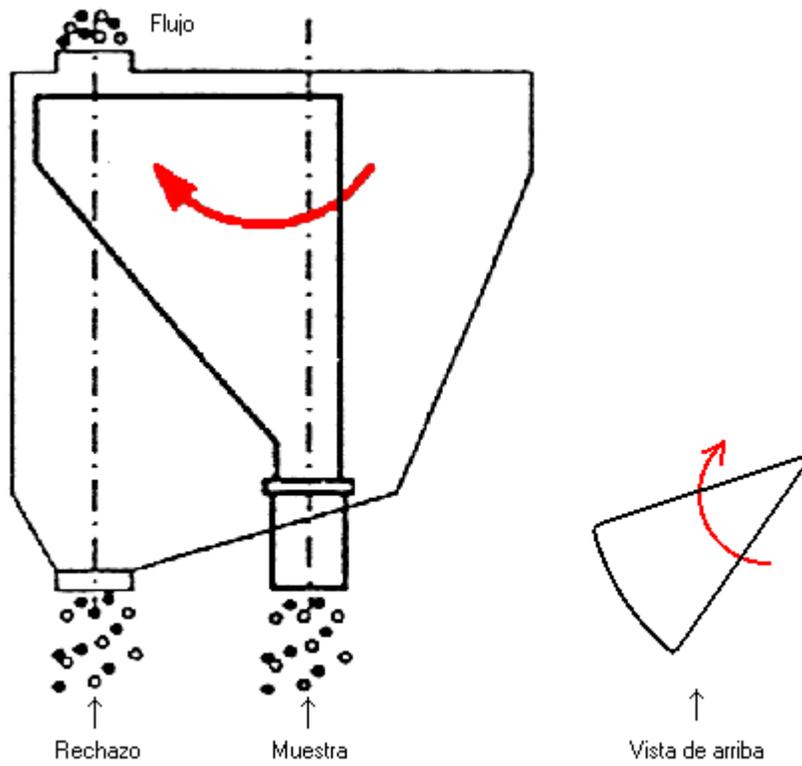


Figura V.9. Muestreador rotativo.

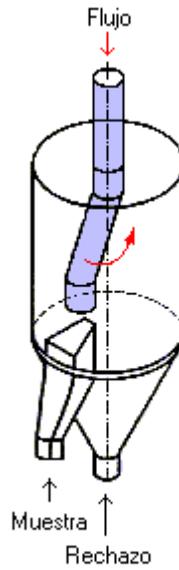


Figura V.10: Otro diseño de muestreador rotativo. En este caso el flujo gira. Produce, en general, malos resultados.

Cuando se corta el flujo de una cinta transportadora, hay que considerar las situaciones de las figuras V.11 y V.12.

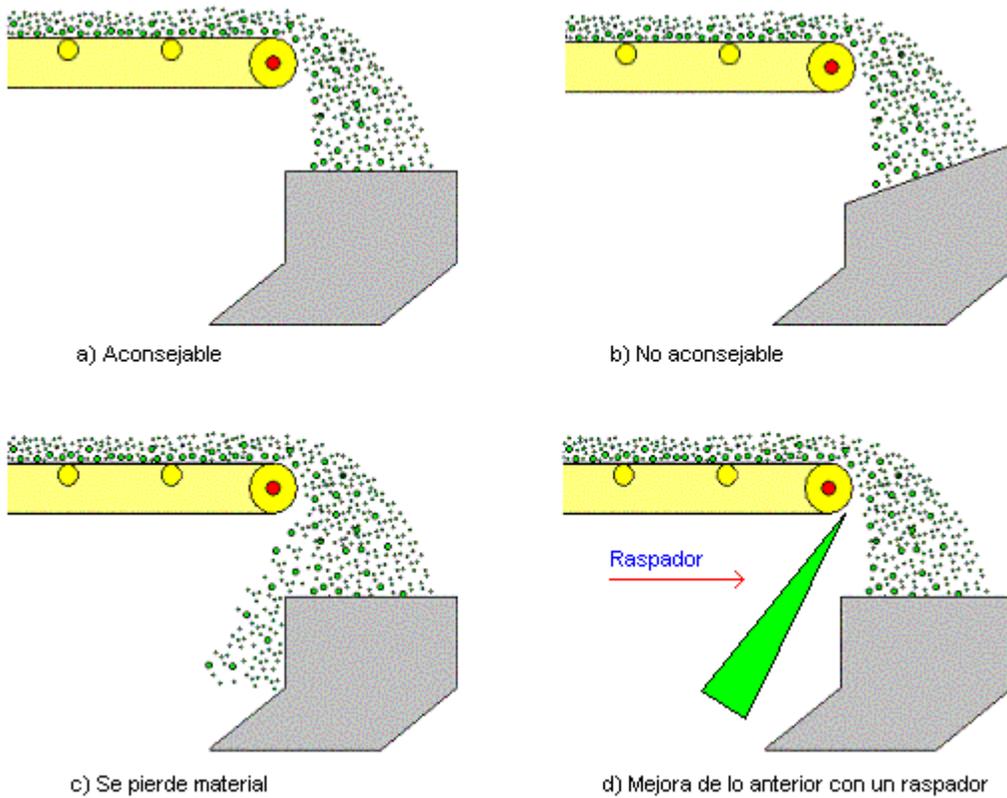


Figura V.11. Corte de muestras en cintas transportadoras.

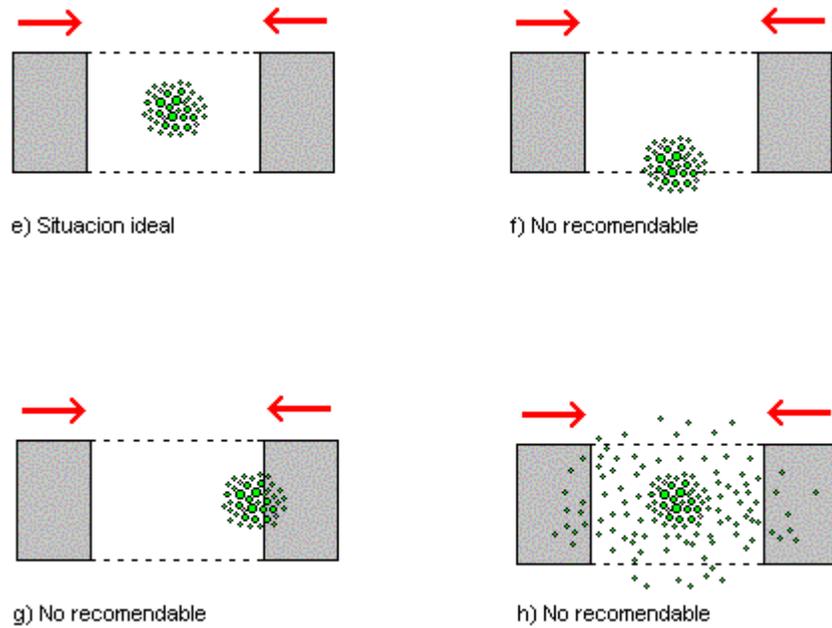


Figura V.12. Corte de un flujo de mineral. Vista de arriba.

Para trayectorias circulares es conveniente utilizar un cortador rotatorio o Vezin, el cual puede operar en forma continua o discontinua. Según Pierre Gy, 1999, es el único método equiprobable para este tipo de flujos (figura V.13)

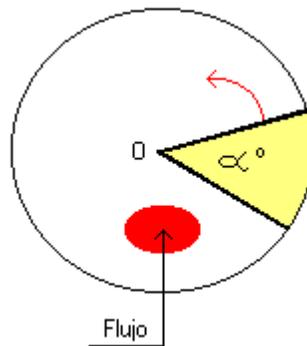


Figura V.13: Cortador Vezin. Vista de arriba.

V.2. Ejercicios y complementos.

1. El divisor de aletas. Este dispositivo es incorrecto porque en la muestra se tiene más material de un lado del flujo (figura V.14).

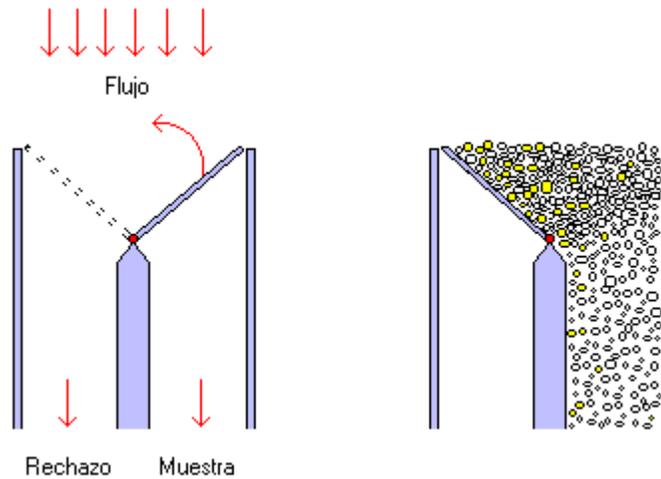


Figura V.14. El divisor de aletas.

2. Explicar porqué es malo el sistema de muestreo de mineroductos de la figura V.15.

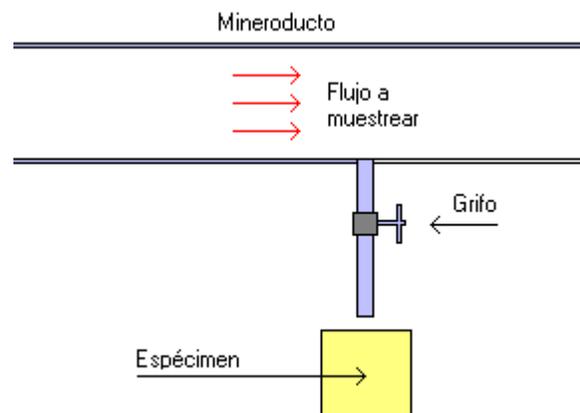


Figura V.15: Muestreo en un mineroducto. ¿Se puede mejorar?

3. Entre los siguientes casos para un Vezin, con flujo circular (figura V.16), solo uno de los diseños siguientes es correcto. ¿Cual?

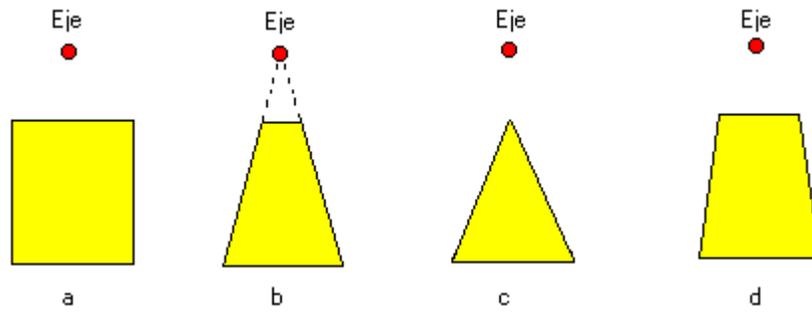


Figura V.16. Diseños correcto e incorrectos.

4. El muestreador siguiente también es incorrecto (figura V.17):

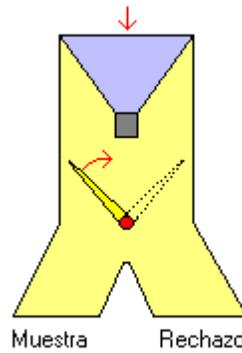


Figura V.17: Una variación del divisor de aletas.

5. ¿Qué le parece el diseño siguiente (figura V.18)?

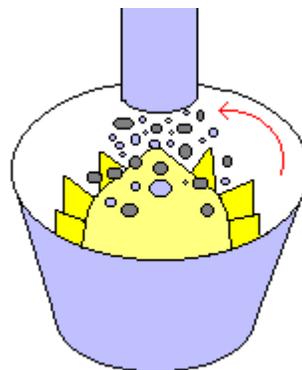


Figura V.18: Cortador de muestras.

6. ¿Porqué es incorrecto el Vezin de figura V.19?

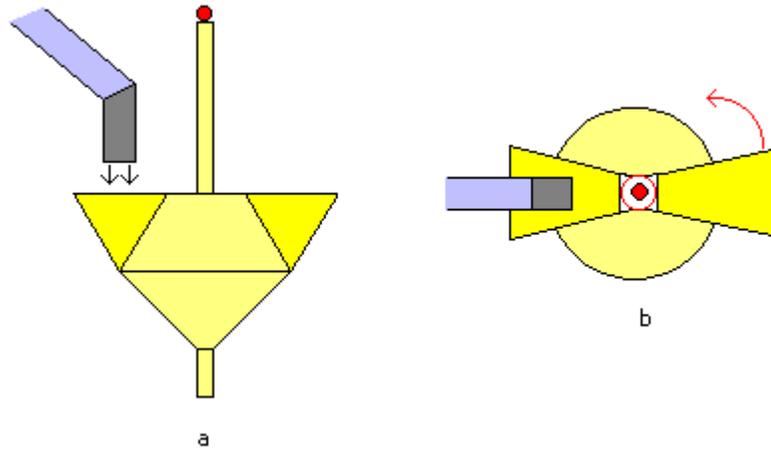


Figura V.19: Vezin incorrecto. a = vista lateral. b = vista de arriba.

7. División de un lote en dos muestras potenciales A y B. ¿Cómo seleccionar la muestra potencial A o B? Aplicar al caso en que se tienen 5 muestras potenciales S_1, S_2, \dots, S_5 .

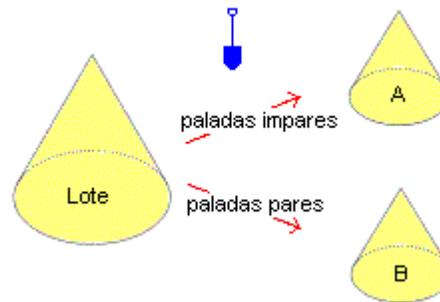


Figura V.20. Muestra potencial ¿A o B?

VI. Tipos especiales de muestreo minero.

Estudiaremos a continuación algunos tipos especiales de muestreo, de gran utilización en **minería**.

VI.1. Muestreo de canaletas.

Las figuras siguientes muestran lo difícil que es realizar un buen muestreo de **canaletas o canales**.

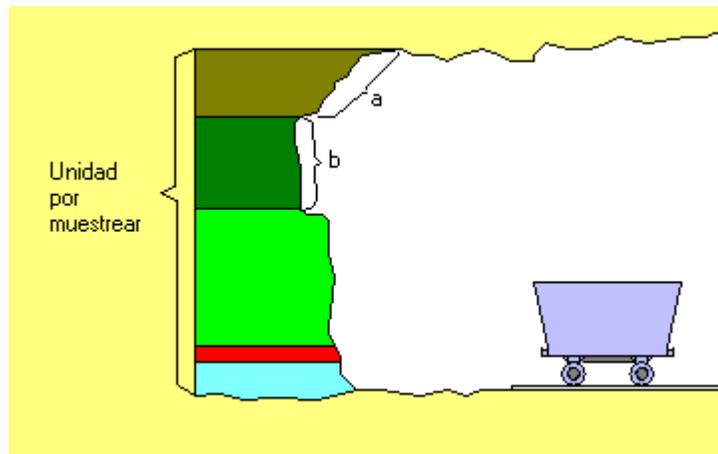


Figura VI.1: Es difícil delimitar bien la muestra en una canaleta. No hay solución operativa.

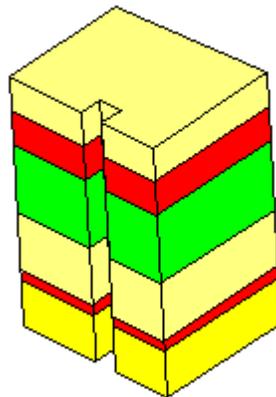


Figura VI.2: Canaleta bien muestreada.

Otros factores que afectan la calidad de la muestra de canal serían los siguientes:

- a) Por lo general son **manuales** y el operador corta (en forma consciente ó inconsciente) las partes más **blandas** de la pared ó partes que tienen una característica común (color), etc.
- b) En ciertas minas las leyes altas se encuentran en **fracturas**. Al construir las galerías, las paredes de éstas corresponden en forma natural a caras de fracturas.

En la gran mayoría de las minas que utilizan canaletas, se ha comprobado que existe un **sesgo**, al comparar las leyes de las canaletas con las leyes de los **sondajes próximos**.

En algunas minas subterráneas se ha abandonado el muestreo por canaletas. En otras se utiliza como alternativa perforaciones de poca profundidad.

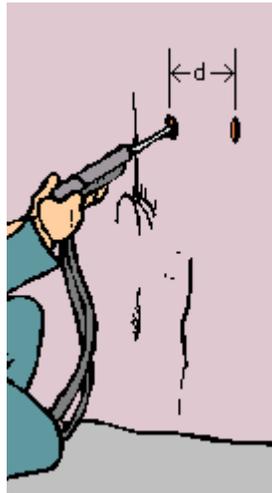


Figura VI.3: Perforaciones para reemplazar canaletas.

VI.2. Muestreo en minas de calizas subterráneas.

En ciertas minas de calizas subterráneas se utilizaban métodos de muestreo no equiprobables tal como muestran las figuras anexas:

- a) El captador **no es** perpendicular al flujo.
- b) El captador **no es** radial.
- c) La reducción de la muestra es **manual**.
- d) Las muestras se introducen en un gran cilindro plástico y se hace un nudo para cada metro de perforación. Se comprobó que esta operación **contaminaba** las **muestras**.

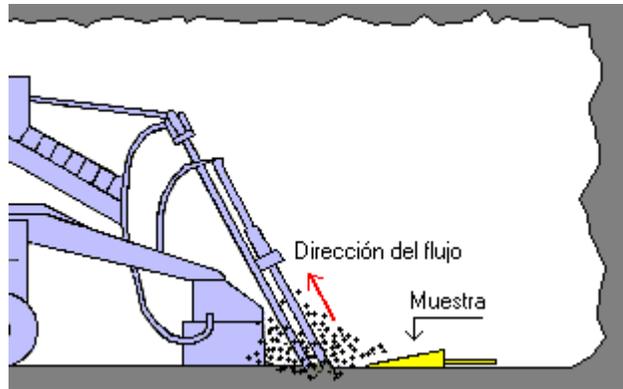


Figura VI.4: El corte de muestra no es perpendicular al flujo.

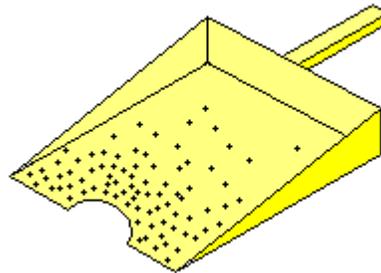


Figura VI.5: El captador no es radial, luego no es equiprobable.

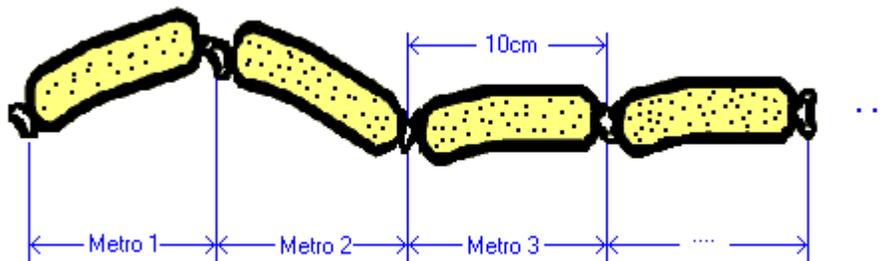


Figura VI.6: Contaminación entre muestras de caliza.

Las minas de caliza tienen, desde el punto de vista del muestreo, una ventaja: sus **leyes son altas** (sobre 65%). Una ley alta es favorable en lo que respecta al error de muestreo (tal como veremos más adelante). Una **ley baja**, por ejemplo de oro (en gr/ton, es decir ppm.), es desfavorable.

VI.3. Muestreos de carros mineros. Camiones.

El muestreo de **carros** mineros y el muestreo de **camiones** mineros (figura VI.7) no es equiprobable debido a que obligatoriamente la muestra es **superficial**.

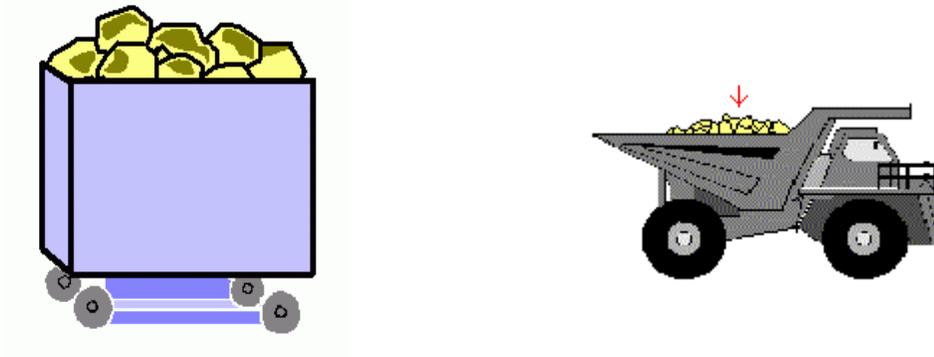


Figura VI.7: Es casi imposible tener una muestra equiprobable de un carro o camión minero.

VI.4. Muestreo en puntos de extracción. Marinas.

El muestreo en puntos de extracción, por ejemplo en una mina explotada por **block-caving**, es difícil, debido a que es **superficial** además de no ser equiprobable debido a la gran variedad de tamaños en el punto (a veces existen bolones de gran diámetro). Lo mismo ocurre con las muestras de **marinas**.

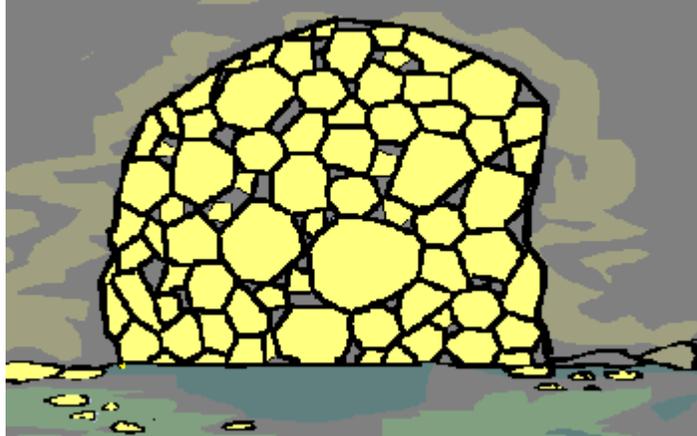


Figura VI.8: Muestreo en un punto de extracción.

Para mejorar la situación existen soluciones de alto costo. Una de ellas es construir un **scoop** muestrador el cual tiene incorporado un chancador. La otra, aplicable al caso de marinas, es utilizar una **torre de muestreo** (figura VI.9) y enviar el avance completo a la torre.

Algunos autores consideran que disponer de una buena torre de muestreo constituye un seguro de vida para la mina.

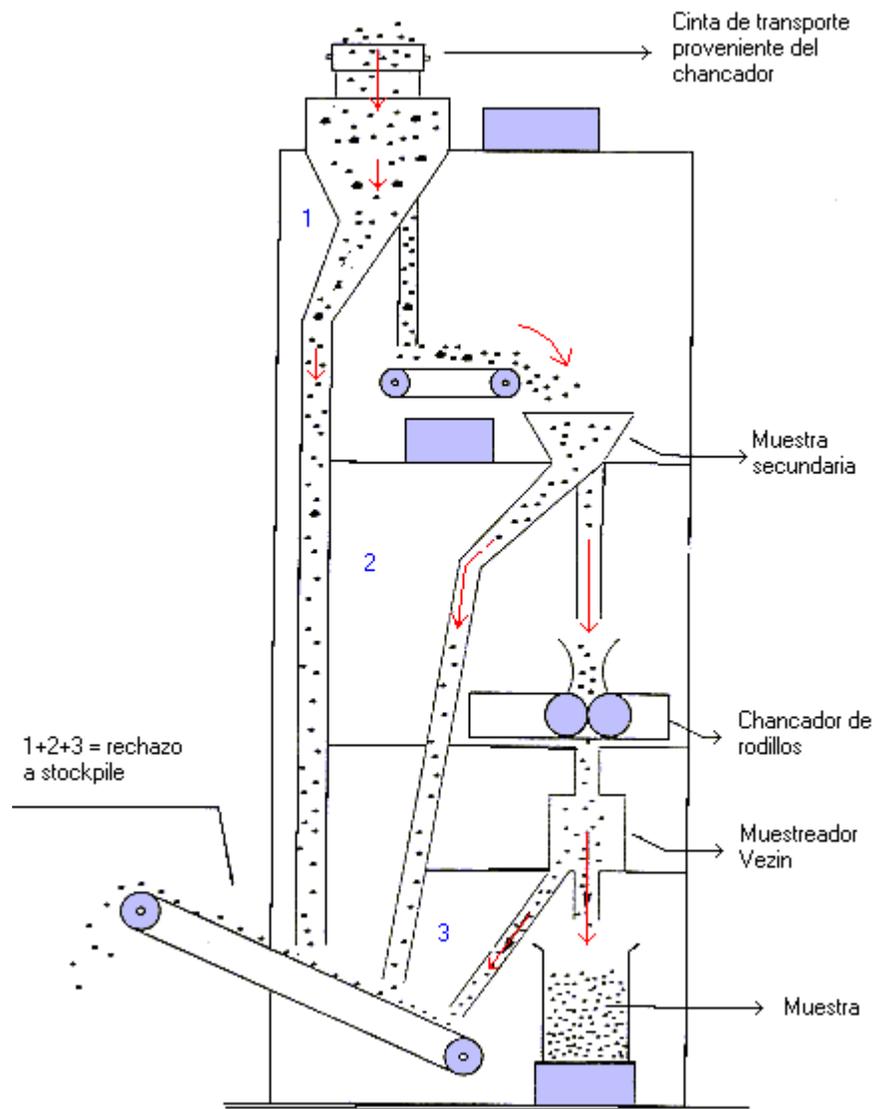


Figura VI.9: Una torre de muestreo.

VI.5. El muestreo de hoyos de tronadura.

En la figura VI.10 aparece un esquema de un hoyo de tronadura y uno de los métodos para tomar una muestra del “cono”: **el tubo muestreador** (figura VI.11).

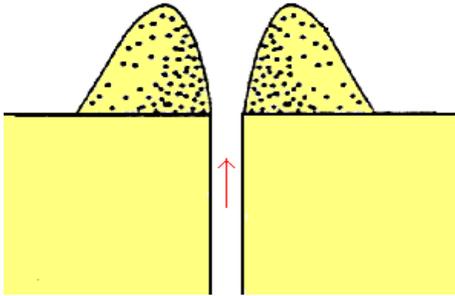


Figura VI.10. Pozo de tronadura

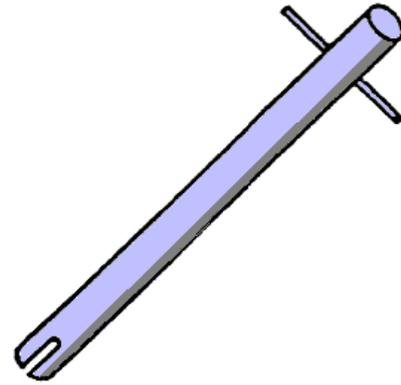


Figura VI.11: El tubo muestreador.

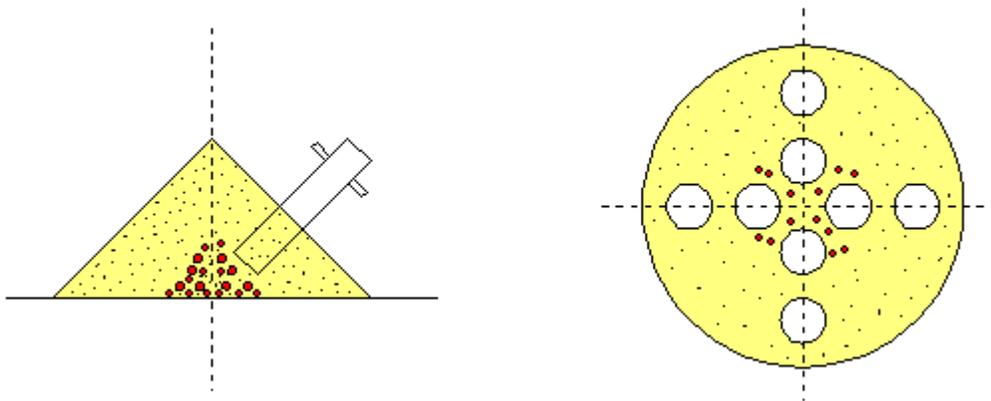


Figura VI.12: Forma de tomar la muestra e incrementos del tubo.

En algunos casos el material acumulado en el **cono** puede ser del orden de una tonelada. Es imprescindible entonces tomar una muestra de unos cuantos kilos.

En la figura VI.13 se demuestra con un ejemplo hipotético que si se utiliza un **captador** de detritus, su diseño debe ser **radial**. Un corte en el cono proporciona un círculo de radio $2r$. Si suponemos, por ejemplo, que los gruesos están en un círculo concéntrico de radio r y los finos en el exterior, entonces la proporción real de finos/gruesos es de 3:1. En este ejemplo, un captador rectangular entrega una proporción de finos/gruesos de aproximadamente 1:1.

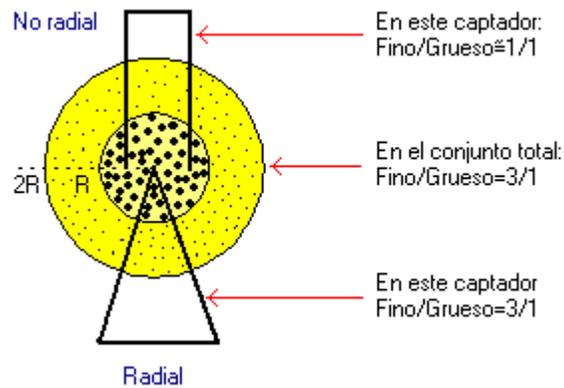


Figura VI.13: Comparación entre captador radial y no radial.

En la figura VI.14 se demuestra con un ejemplo hipotético que el **tubo de muestreo no es equiprobable**. Asumiendo un ángulo de reposo de 45 grados, se tiene una proporción real de finos/gruesos de 7:1, mientras que el tubo entrega una proporción de aproximadamente 1:1.

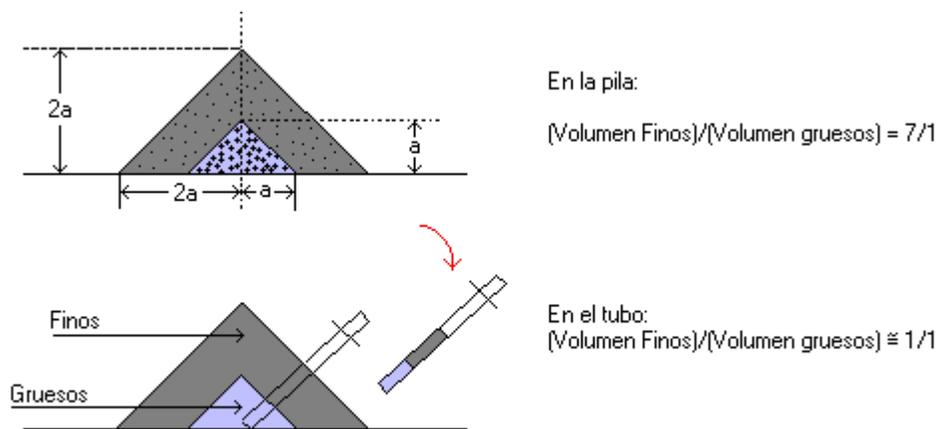


Figura VI.14: Esquema para probar que el tubo no es equiprobable.

Se concluye entonces que uno de los mejores métodos prácticos debería ser un **captador radial**. Sin embargo esta solución es muy difícil de implementar en minas grandes, debido a la gran cantidad de material que cae en el captador. Por esta razón, en minas grandes, se utiliza aún el método del tubo muestreador.

El tubo presenta otros problemas debido a que, en algunas minas, en el invierno, no se puede utilizar (se congela el cono) y existe muestreo de verano (realizado con un tubo) diferente del muestreo del invierno (realizado con una pala). Otro problema asociado es que a veces se remueve, en forma **empírica** la pasadura en la superficie del cono.

Ejemplos de captadores.

Hace unos años, el autor de este libro realizó una encuesta en minas chilenas, obteniendo los diseños, con sus dimensiones correspondientes. Se conocen como el “cajón”, el “molde” y la “cuña”.

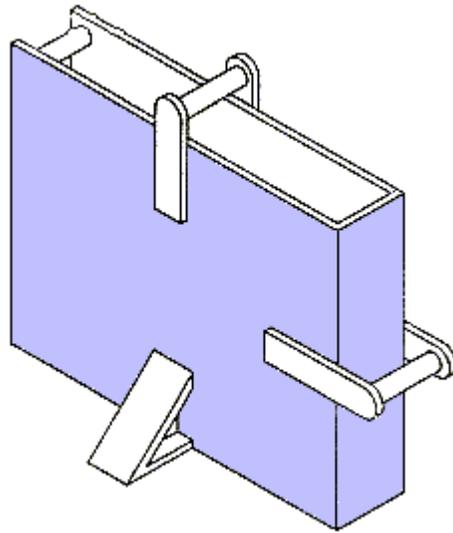


Figura VI.15: El cajón captador de muestra. No es radial.

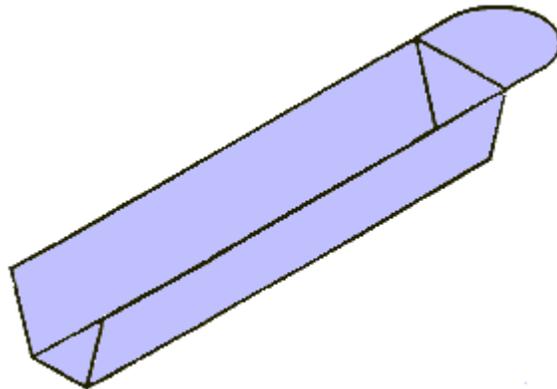


Figura VI.16: El molde captador de muestra. No es radial.

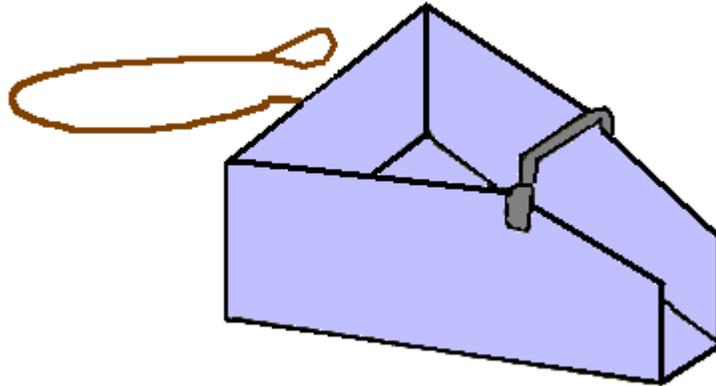


Figura VI.17: La cuña captadora de muestra. Es radial. En ciertas minas se pone una cuerda para retirar el dispositivo al llegar a la pasadura.

Resultados para el “cajón”.

El autor realizó experiencias, en una mina, en la zona de óxidos, con el cajón, tomando en 40 hoyos la muestra total (la cual se redujo y preparó en un local cerrado para mayor confiabilidad) y la muestra del captador. Se observa que las **granulometrías de la muestra y del lote** no son iguales (figura VI.18).

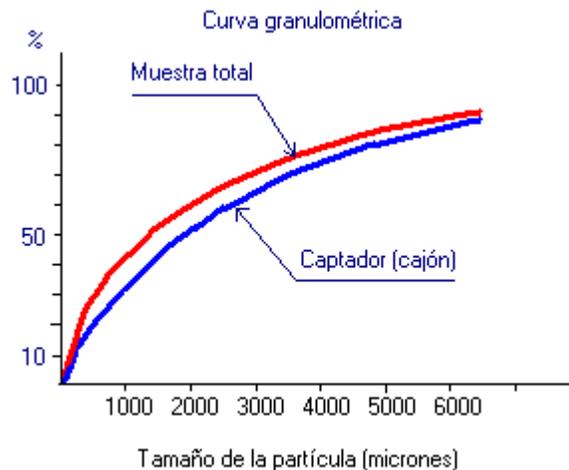


Figura VI.18: curva granulométrica de la muestra y el lote. La muestra tiene menos finos que el lote.

Se comprobó además que la ley del lote era diferente de la ley de la muestra. Se comprobó también que la ley de los finos es superior a la ley de los gruesos, tal como muestra la figura VI.19.

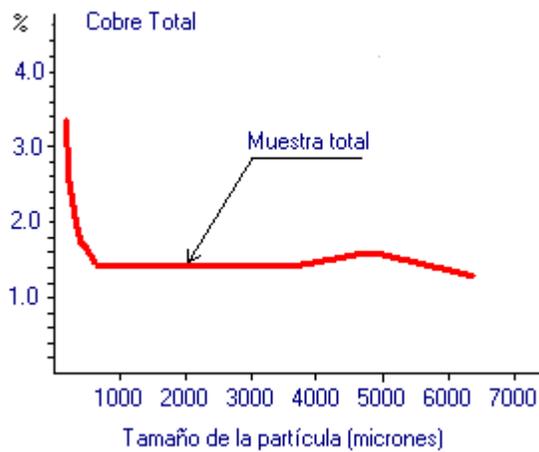


Figura VI.19: La ley de los finos es significativamente superior a la de los gruesos.

VI.6. El captador de “lodos”.

Se utiliza en algunas minas subterráneas. La perforación es con agua y la muestra es de “lodo” o barro. La **recuperación**, por lo general no es buena, produciendo una muestra de dudosa calidad. En varias minas se ha comprobado que el muestreo de lodos produce **sesgos**.

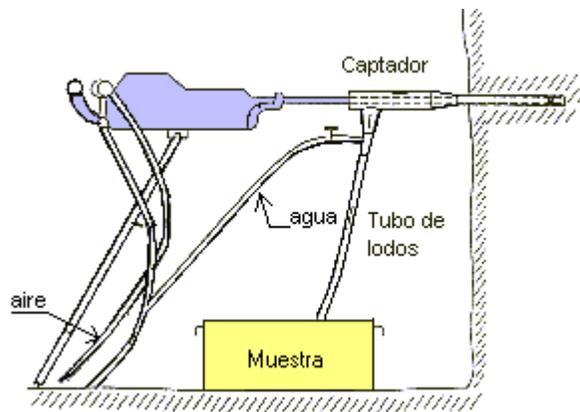


Figura VI.20: El captador de lodos en minería subterránea.

VI.7. Conclusiones.

Los ejemplos analizados muestran que en minería es muy difícil obtener una muestra equiprobable a un costo y condiciones operacionales razonables. Cuando por definición la muestra no cumple con la condición de equiprobabilidad

(espécimen), se deben hacer estudios acerca de la existencia de sesgos y el posible cambio del sistema.

Mencionemos además que es fácil demostrar que un dispositivo de muestreo es incorrecto pero es muy difícil demostrar que un cierto dispositivo es correcto.

VI.8. Ejercicios y complementos.

1. A continuación se presenta como se muestrean los hoyos de tronadura en minas norteamericanas (Canadá y USA). ¿Cuáles proporcionan especímenes?

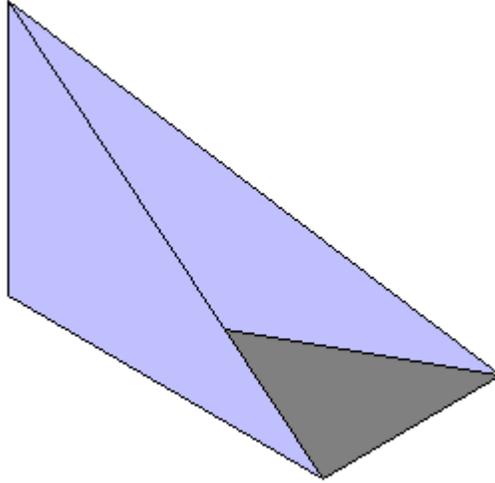


Figura VI.21. Mina 1.

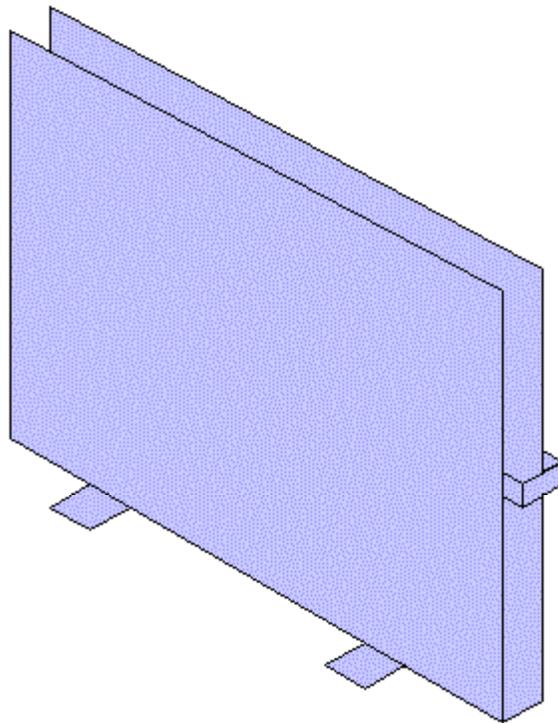


Figura VI.22: Mina 2.

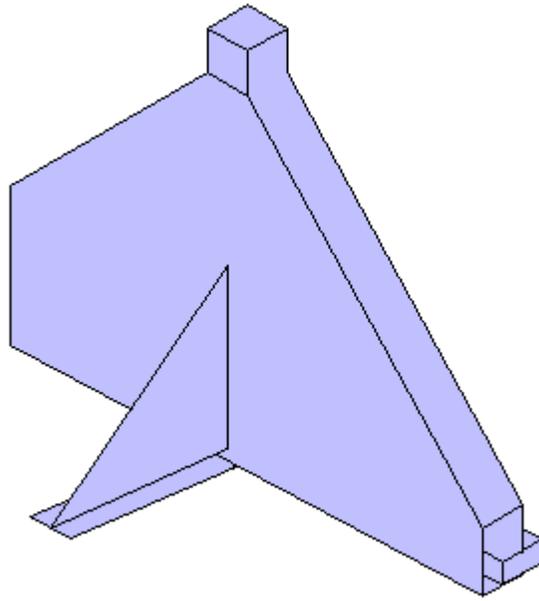


Figura VI.23: Mina 3.

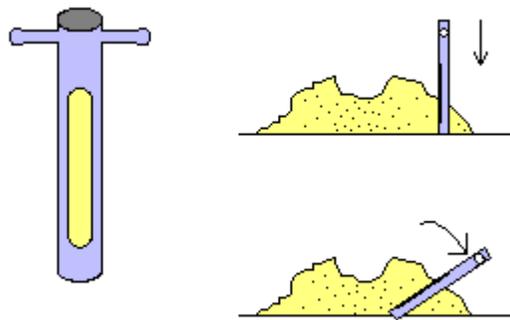


Figura VI.24: Mina 4. Una variación del tubo.

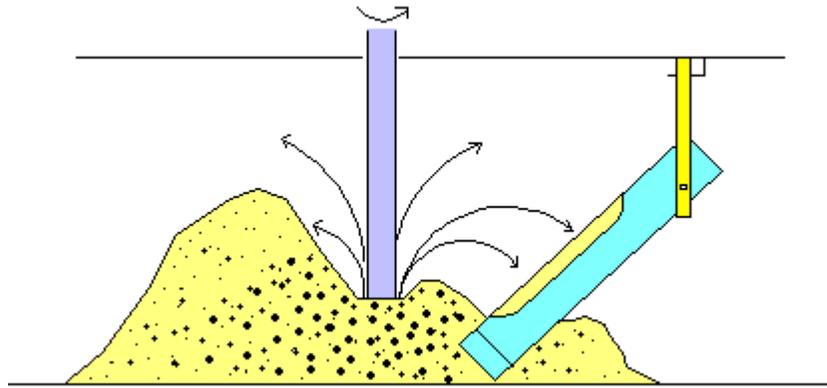


Figura VI.25. Mina 5.

3. ¿Qué le parece el equipo de muestreo siguiente, correspondiente a una mina española?

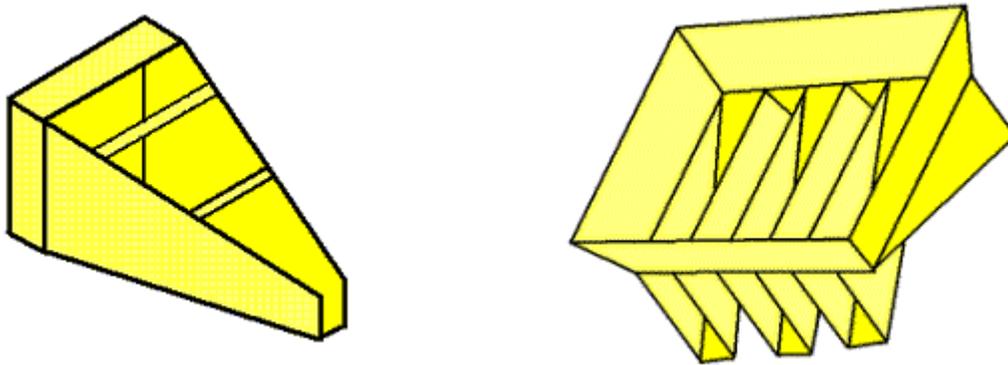


Figura VI.26. Equipo de muestreo de pozos de tiro.

4. Para muestrear pozos de manera automática, existen inventos (radiales) que se ponen en la plataforma de la perforadora. Comentarios.

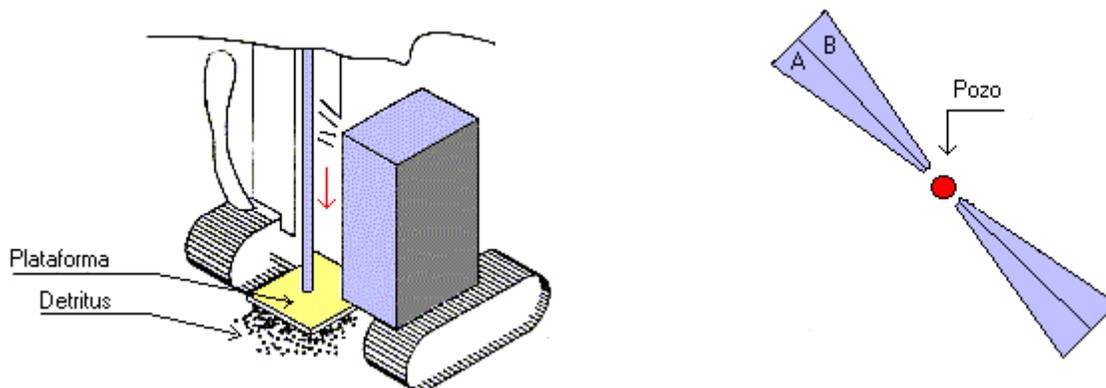


Figura VI.27. Muestreador automático. A y B son puertas que se abren y cierran.

5. El conocimiento geológico del depósito es fundamental para detectar errores en el muestreo. Ejemplo: en una mina de óxidos de cobre es importante la ley de carbonato CaCO_3 . En una cierta mina se detectó que había valores anómalos que no correspondían con los valores normales dentro de una unidad geológica. Se comprobó que el problema estaba en la perforación de los pozos: la muestra se contaminaba con aceite (el cual contiene carbono).

6. Comprobación que la ley de los finos es mayor que la de los gruesos. En una mina de óxidos de cobre se tomó como muestra el pozo completo sobre una altura de banco de 10m. Se utilizaron harneros y tamices para separar los diferentes tamaños (en una muestra del orden de 700K). La tabla 2 resume los resultados para el cobre total y el carbonato (100# = 0.149mm)

Tabla 2

Fracción	Granulometría en %	CuT %	CaCO_3 %
3/8"	4.5	0.25	0.31
1/4"	7.7	0.30	0.24
4#	7.8	0.30	0.24
14#	30.6	0.34	0.24
35#	19.6	0.48	0.33
100#	14.3	0.58	0.36
150#	5.2	0.70	0.46
-150#	10.3	3.24	2.40
Total	100.0	0.71	0.51

Se observa entonces que es fundamental que una muestra respete la granulometría del lote, luego debe ser equiprobable. ¿Qué pasaría si usara una poruña con hoyos (figura IV.2)?

7. Muestreo de marinas. Se utiliza en minería subterránea. En la pila de la tronadura esponjada se pone un cordón (real o imaginario) y se toman incrementos en los puntos de la figura VI.28. ¿Está bien delimitada la muestra?

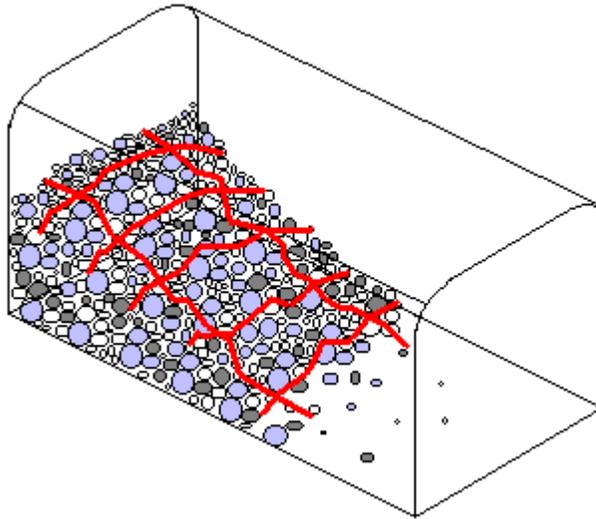


Figura VI.28: Muestreo de marinas. Método del cordón.

VII. El Error Fundamental del Muestreo. Teoría de Pierre Gy.

Antes de estudiar la teoría de Pierre Gy, veremos un experimento diseñado por Dominique Francois-Bongarcon:

VII.1. Un experimento de muestreo.

Este experimento se puede realizar fácilmente y consiste en lo siguiente:

En un recipiente se ponen 20 kilos de arroz, los cuales corresponden aproximadamente a 1,000,000 de granos. Se toman 10 granos, se pintan de color rojo, se introducen en el recipiente y se revuelve (observamos que lo anterior corresponde a un lote que podría ser de oro con una ley “alta” de 10 gr/ton; además está “liberado”).



Figura VII.1. Un experimento de muestreo.

Luego, con una pala adecuada se toma una muestra de unos 250 gramos. La experiencia se repite un cierto número de veces.

Se observa en este experimento:

1. Que es complicado tomar muestras en el caso de leyes bajas (10 ppm.). Cuando la ley es más alta, por ejemplo pintar 10,000 granos (caso de una ley de cobre de 1%), la situación es más favorable.
2. En cada repetición resulta una ley (granos rojos/total de granos) diferente, a pesar de que la muestra es equiprobable.
3. Las diferencias entre las leyes observadas y la ley real de 10 ppm. corresponden al error de muestreo, el cual se llama **error fundamental del muestreo**. Este error es inevitable en las condiciones del enunciado y no se puede reducir.
4. La media de las diferencias anteriores es nula, debido a que la muestra es equiprobable.
5. La varianza de las diferencias se llama **varianza del error fundamental** del muestreo.

6. El experimento se puede enriquecer al reemplazar los 10 granos rojos por 10 granos de metal (efecto de segregación). Se comprueba que la varianza del error fundamental aumenta.
7. Se comprueba además que, si hay segregación, una manera de reducir la varianza del error fundamental es realizando incrementos, es decir tomar, por ejemplo, 5 submuestras de 50 gramos para constituir la muestra primaria.

Este experimento, muy instructivo, se puede enriquecer aún más al utilizar una mezcla de porotos, lentejas y garbanzos...

VII.2. La formula de Pierre Gy.

La formula de Pierre Gy proporciona, en el caso de **material quebrado**, la **varianza relativa del error fundamental del muestreo** (la varianza relativa corresponde a la varianza del error fundamental dividida por la ley media del lote elevada al cuadrado, luego es una varianza sin dimensión).

La Teoría fue desarrollada por el Dr. Pierre Gy, Ingeniero Civil Químico francés (ver Anexo 2).

Antes de presentar la fórmula de Gy, es necesario hacer una observación: se trata de una **fórmula aproximada** cuya demostración es difícil. En la figura VI.2 se puede ver un extracto de la demostración, realizada por el geomatemático francés **Georges Matheron**, ¡la cual ocupa 11 hojas!).

$$\Phi(\lambda) = 1 + \lambda^2 \sigma^2 / 2! + \dots + (-1)^k \lambda^k \mu_k / k! + R_k(\lambda)$$

Le reste $R_k(\lambda)$ de ce developpement est:

$$R_k(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda x - m^2} - 1 - \lambda^2 (x-m)^2 / 2! - \dots - (-1)^k \lambda^k (x-m)^k / k! \right] f(x) dx$$

Portant dans (5) l'expression de $\Phi(\lambda)$, nous obtendrons:

$$E\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{m} + \frac{\sigma^2}{m^2} + \dots + (-1)^k \frac{\mu_k}{m^{k+1}} + R'_k$$

Le reste R'_k etant donne par:

$$R'_k = \int_0^{\frac{m}{2}} e^{-\lambda z} R_k(\lambda) d\lambda = \int_0^{\frac{m}{2}} \frac{l}{z} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^{k+l} f(z) dz$$

Pour majorer ce reste, prenons un nombre $a > 1$

Figura VII.2. Extracto de la demostración de la fórmula de Gy, por Georges Matheron.

Esta fórmula ha mostrado debilidades en el caso de minerales de baja ley (ppm.).

La fórmula de Gy.

La **varianza relativa del error fundamental de muestreo** está dada por:

$$S^2 = K d^3 (1 / M_S - 1 / M_L) \quad (\text{VII.1})$$

(Observar la estrecha analogía entre esta fórmula y la del muestreo aleatorio simple).

Significado de los términos de la fórmula de Gy:

M_L = masa del lote en gramos

M_S = masa de la muestra en gramos

d = diámetro máximo de partículas en cm. (en la práctica se utiliza el valor **d₉₅** correspondiente al diámetro que verifica que el 95% de los diámetros son menores que **d₉₅**)
d también se llama diámetro nominal.

La constante **K** (en estricto rigor no es una constante) se mide en **gr/cm³** y tiene la expresión siguiente:

$$K = c g f l$$

En que:

c = factor de composición mineralógica (**gr/cm³**)

g = factor de distribución de tamaño (sin dimensión)

f = factor de forma de las partículas (sin dimensión)

l = factor de liberación ($0 < l < 1$, sin dimensión)

Estudiaremos ahora, por separado, los factores **c**, **g**, **f**, **l**.

El factor de composición mineralógica **c**.

Tiene la expresión siguiente:

$$c = ((1 - a_L) / a_L) ((1 - a_L) g_1 + a_L g_2)$$

valor aproximadamente igual a **g₁/a_L** si **a_L** es pequeño.

a_L = proporción en peso del componente crítico o con valor comercial (mena)

g_1 = peso específico del componente crítico (mena)

g_2 = peso específico de la ganga

El factor de distribución de tamaño g.

Depende de d y de d' . Se utiliza lo siguiente:

$2 < d/d' < 4$ $g = 0.50$

$1 < d/d' < 2$ $g = 0.75$

$d/d' = 1$ $g = 1.00$

$d/d' > 4$ $g = 0.25$

d' es el diámetro de las partículas mínimas, medido en cms. (en la práctica se utiliza d_{05}).

El **valor más utilizado es $g=0.25$** que corresponde a una situación bastante general (el diámetro de la partícula máxima es superior a 4 veces el diámetro de la partícula mínima).

El factor de forma de las partículas.

Está definido por:

$$f = (\text{volumen de la partícula}) / d^3$$

Si se supone que las partículas son aproximadamente esféricas, entonces $f = 3.14159 / 6 = 0.52$. Se recomienda entonces utilizar el factor:

$$f = 0.5$$

El factor de liberación I.

Sean:

d = tamaño máximo de partícula

d_l = tamaño de liberación del componente crítico

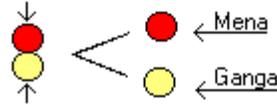


Figura VII.3: El diámetro de liberación corresponde al diámetro que hay que moler para que la mena se “libere” de la ganga.

Se recomienda utilizar:

$$I = 1 \quad \text{si } d_l > d$$

$$I = (d_l / d)^b \quad \text{si } d_l < d$$

Se recomienda utilizar $b=1.2$ para minerales de cobre y $b=1.5$ para el oro.

El factor de liberación constituye una de las **debilidades** de la Teoría debido a que **no representa bien el caso de leyes bajas** (leyes medidas en ppm.).

Ejemplo: Puntos de extracción en mina explotada por el método de block-caving. En la explotación subterránea de una mina chilena, en la cual la mena es calcopirita, se extraen $M_L = 32,000$ toneladas = 32,000,000,000 gramos, cada día. Se muestrean, cada día, 50 puntos de extracción, tomando 5 kilos en cada punto, luego $M_S = 50 * 5000 = 250,000$ gramos.

$$M_L = 32 * 10^9$$

$$M_S = 25 * 10^4$$

$$d_{95} = 15 \text{ cm}$$

$$d' = d_{05} = 0.021 \text{ cm}$$

$$a_L = \text{porcentaje de la calcopirita en peso} = 4\% = 0.04$$

$$g_1 = \text{peso específico de la calcopirita} = 4.2 \text{ gr/cm}^3$$

$$g_2 = \text{peso específico de la ganga} = 2.8 \text{ gr/cm}^3$$

$$d_l = \text{tamaño de liberación de la calcopirita (50 micrones)} = 0.005 \text{ cm}$$

$$c = \text{factor mineralógico} = ((1-a_L)/a_L)((1-a_L)g_1 + a_L g_2) = 100$$

$$I = \text{factor de liberación} = (d_l/d)^{1.2} = 6.72 * 10^{-5}$$

f = factor de forma = 0.5

g = factor de distribución de tamaño = 0.25 (d/d' = 714 >> 4)

Al aplicar la fórmula se obtiene la varianza relativa:

$$S^2 = c g f l d^3 (1 / M_S - 1 / M_L) = 1.128 * 10^{-5}$$

$$2S = 0.007 = 0.7\%$$

Con un 95% de confianza el error relativo es del 0.7% (bastante bueno)

Observación: en la práctica se tiene que $M_L \gg M_S$, luego, se puede despreciar el termino $1 / M_L$ y la fórmula de Gy queda:

$$S^2 = c g f l d^3 / M_S$$

Se puede fijar el error deseado 2S (luego S es conocido) para encontrar el **tamaño mínimo de la muestra:**

$$M_S = c g f l d^3 / S^2$$

VII.3. El Factor de Liberación.

Como introducción estudiemos un ejemplo:

Se tiene una pila de 400 kilos, correspondiente a un hoyo de tronadura en una mina de oro.

El diámetro nominal de las partículas es $d = 1$ cm

El peso específico del oro es 19 gr/cm^3 .

El diámetro de liberación del oro es de 10 micrones = 0.001 cm

$$d_{95} = 1.0$$

$$f = 0.5$$

$$g = 0.25$$

$$c = g_1 / a_L = 19,000,000 \text{ (suponiendo } a_L = 1 \text{ gr/ton} = 1 * 10^{-6} \text{)}$$

Sea:

$I = (d_l / d)^{0.5} = 0.0316$. Formula **errónea** publicada por P. Gy, considerada hoy día como arbitraria en casos particulares.

Si $S = 0.1$, se obtiene un valor M_S igual a:

$$M_S = 7.5 \text{ toneladas!}$$

El problema, descubierto por el Dr. D. F. Bongarcon, radica en el factor de liberación I, el cual se puede expresar más generalmente como:

$$I = (d_i / d)^b$$

La determinación del coeficiente b requiere experimentos de muestreo y no puede ser reducida a la aplicación de una fórmula arbitraria tal como $I=(d_i/d)^{0.5}$ la cual no es soportada ni por la teoría ni por experimentos. En el caso del oro, se observa empíricamente que a menudo $b \sim 1.5$; en el caso del cobre, $b \sim 0.5$. Si aplicamos ahora la fórmula de Gy, obtenemos:

$$M_S = 7.51 \text{ kilos}$$

Resultado bastante más razonable que el anterior.

VII.4. Los Protocolos de Muestreo.

Las operaciones que conciernen al tratamiento de las muestras (chancado, mezcla, reducción, etc.) deben quedar claramente establecidas, desde un peso inicial Q (de varios kilos) hasta la muestra de laboratorio q (de algunos gramos).

Ejemplo: testigos en una mina de oro:

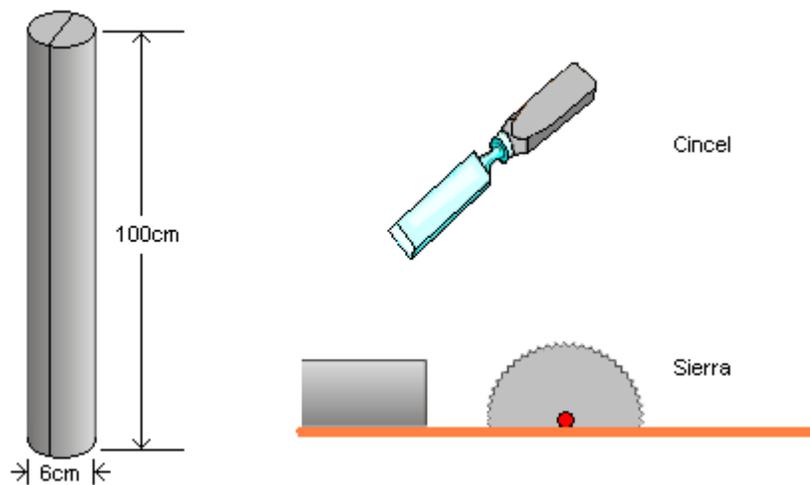


Figura VII.4. Testigo (izquierda) métodos para cortarlo (derecha)

- cortar el testigo por la mitad $d = 6$ cm, peso = 8 kilos
- moler 100% mediante chancador primario a un tamaño de 1 cm
- reducir la muestra a 4 kilos utilizando riffle
- moler 100% mediante molino de rodillos a un tamaño de 0.2 cm
- seleccionar, por medio de riffle 400 gramos de mineral
- pulverizar los 400 gramos a $-150\#$.

En la figura VII.5 se tiene un protocolo bastante riguroso.

Ejemplo de protocolo de muestreo

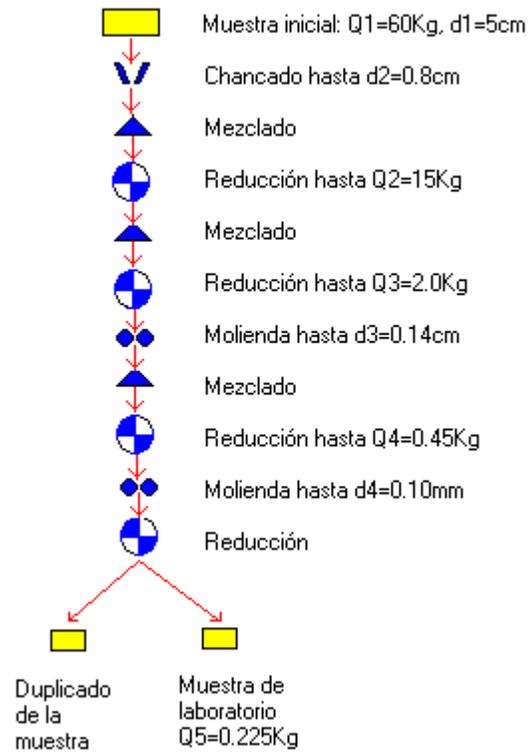


Figura VII.5: Protocolo de muestreo para mineral de oro.

Las diferentes operaciones se pueden llevar a un gráfico log-log (figura VII.6). La operación no debe pasar la línea de seguridad de Gy (ver ejercicio 3 siguiente).

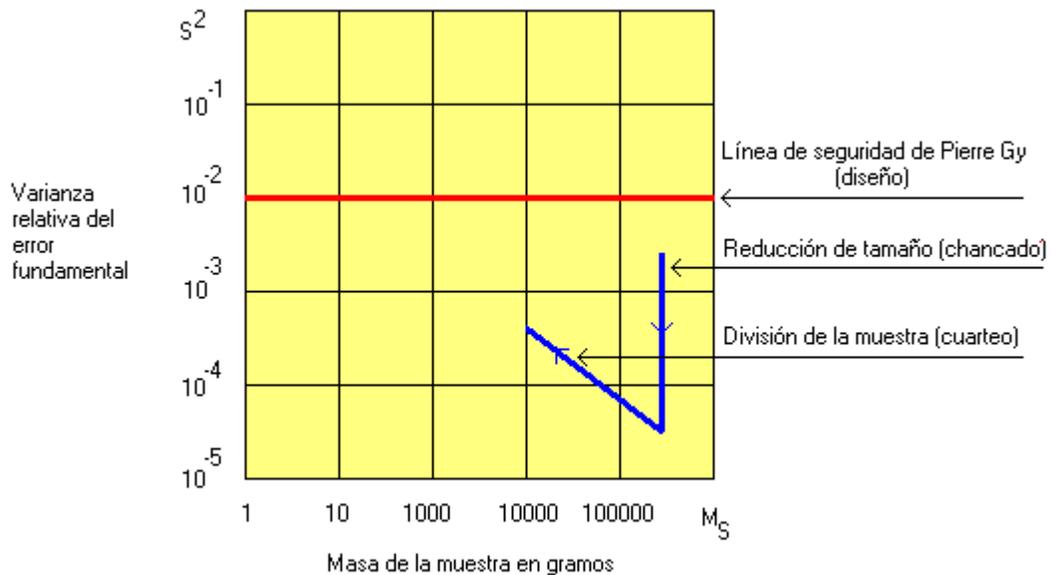


Figura VII.6: Gráfico log-log.

VII.5. Ejercicios y complementos.

1. Otro ejemplo para comprobar que la formula $I=(d_1/d)^{0.5}$ es errónea es el siguiente:
 Sean fragmentos iguales ($g=1$) cúbicos de oro ($f=1$), $g_1=20$. Se toma una muestra de 2000 gramos.
 Se desea una precisión $S=0.01$. Se pide calcular el diámetro de liberación.
 Solución:

$$d_l = \left[\frac{M_s S^2 \sqrt{d}}{d^3 c f g} \right]^2$$

Se obtiene $d_l=10^{-12}$ cm=0.0001Amstrong!
 Pero 1 átomo de oro = 1.5 Amstrong.

2. Bolones en muestreo de canaletas. En las minas de oro en vetas se hacen canaletas y se reduce la muestra por cuarteo manual. Cuando el trabajador encuentra un bolón, lo parte con un combo y luego procede a dividir la muestra. Explicar esta operación basándose en la formula de Gy.



Figura VII.7: Reducción del diámetro máximo de la muestra antes de cuartear. Siempre conviene reducir el diámetro nominal antes de dividir la muestra.

3. Probar que la formula de Gy se puede escribir como:

$$S^2 = \frac{C d^{3-b}}{M_s}$$

Al tomar logaritmos, esta ecuación se transforma en:

$$\log(S^2) = \log(C) + (3 - b) \log(d) - \log(M_s)$$

Sea $x=\log(S^2)$, $y=\log(M_s)$; entonces se tiene la ecuación:

$$x + y = \log(C) + (3 - b) \log(d)$$

Que es la ecuación de una recta de pendiente -1 en coordenadas logarítmicas (ver figura VII.5). Las formulas anteriores se pueden programar fácilmente en un computador. En el pasado se utilizaba una regla de calculo, diseñada por P. Gy.



Figura VII.7: Sampling slide rule, regla de calculo para muestreo.

4. La formula de Gy coincide con la formula del muestreo estadístico cuando se tiene material liberado. Consideremos la figura III.1. Se tienen N partículas esféricas de igual diámetro y de igual densidad. Supongamos que K de estas partículas son de color negro. La ley del material negro es $a=K/N$. Supongamos que se toma una muestra de n partículas del recipiente ($K, n < N$).

- a) Probar que la varianza s^2 de la formula III.1 es aproximadamente igual a $a(1-a)$ cuando n es grande.
- b) Probar que la varianza relativa III.1 del error tiene la expresión: $S^2 = ((1-a)/a)(1/n - 1/N)$
- c) Al aplicar la formula de Gy a la situación anterior, probar que: $f = \pi/6$, $l = 1$, $g = 1$ ($\pi = 3.1416$) El factor c es igual a: $c = ((1-a)/a)g$ en que g es el peso específico de las partículas, luego la varianza relativa del error está dada por $S^2 = ((1-a)/a)(1/n - 1/N)$ por consiguiente, en este caso, ambas teorías coinciden.

5. Un experimento de muestreo. Utilizar un frasco transparente y poner cantidades iguales de aceite y agua tal como en la figura VII.8. Conviene teñir previamente el agua con tinta. El problema consiste en extraer una muestra representativa de este lote.

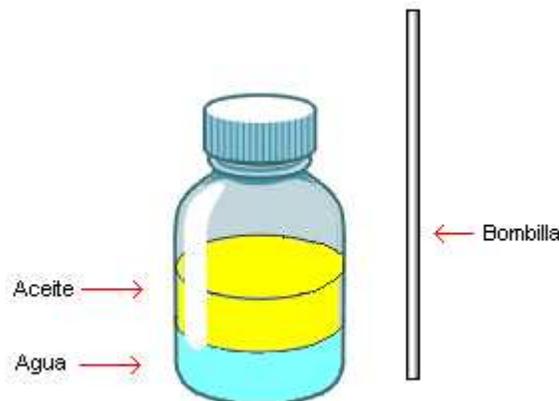
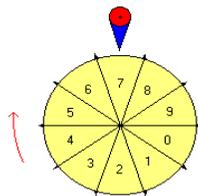


Figura VII.8. Un experimento de muestreo.

Se puede comprobar que una pipeta (bombilla) no funciona bien. Tampoco resulta mejor agitar la mezcla. ¿Qué hacer?

VIII. Bibliografía.

- M. Alfaro, 1998.** **Estadística.** Tecniterrae, Santiago, Chile.
- D.F. Bongarcon, 1996** **Muestreo de Minerales y Comparación de leyes mina-planta.** Tecniterrae, Santiago, Chile.
- P. Gy, 1982.** **Sampling of Particulate Materials.** Elsevier, Amsterdam, Holanda.
- P.Gy y D. F. Bongarcon, 1999** **Seminario de Muestreo de Minerales.** Tecniterrae, Santiago, Chile.
- P.Gy y D. F. Bongarcon, 2000** **El error más común en la aplicación de la teoría del muestreo de minerales de P. Gy.** Revista "Minerales". Instituto de Ingenieros de Minas de Chile.
- P. Gy, 2000.** **Sampling for Analytical Purposes.** Wiley, New York.
- W. Cochran, 1977** **Sampling Techniques,** J. Wiley, New York.
- M. Kreiter, 1978** **Investigación y Prospección Geológica.** Paraninfo, Madrid.



Anexo 1. Tabla de números al azar.

14159	26535	89793	23846
26433	83279	50288	41971
69399	37510	58209	74944
59230	78164	06286	20899
86280	34825	84211	70679
82148	08651	32823	06647
09384	46095	50582	23172
53594	08128	48111	74502
84102	70193	85211	05559
64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461
28475	64823	37867	83165
27120	19091	45648	56692
34603	48610	45432	66482
13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817
48815	20920	96282	92540
91715	36436	78925	90360
01133	05305	48820	46652
13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953
09218	61173	81932	61179
31051	18548	07446	23799
62749	56735	18857	52724
89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430
86021	39494	63952	24737
19070	21798	60943	70277
05392	17176	29317	67523
84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082
77857	71342	75778	71342
75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301
46549	58537	10507	92279
68925	89235	42019	95611
21290	21960	86403	44181
59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837
29780	49951	05973	17328
16096	31859	50244	59455
34690	83026	42522	30825
33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886
58753	32083	81420	61717
76691	47303	59825	34904
28755	46873	11595	62863
88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066
13001	92787	66111	95909

Observación: en estricto rigor no se trata de números aleatorios sino más bien los decimales del número $\pi = 3.141592653\dots$ Pero se comportan muy bien como números al azar. El autor ha utilizado estos dígitos con éxito en sus cursos de simulación.

Anexo 2: El Profesor Pierre Maurice Gy.



El Dr. Pierre Gy obtuvo el título de Ingeniero Civil Químico, en la Escuela de Física y Química de París en 1946. Doctor de Estado en Física en 1960. Doctor de Estado en Matemáticas en 1975. Es autor de varios libros. Obtuvo dos medallas de oro de la Société de l'Industrie Minérale, Francia, 1963 y 1976. Medalla Lavoisier 1975, Medalla del Mining Metallurgy Institute de Japón, 1958.

La historia del muestreo de minerales comienza cuando Pierre se iniciaba como ingeniero en una mina de Africa, en el Congo. Su jefe le solicitó calcular la ley y el tonelaje de un stock de mineral de plomo, recomendándole ir a la biblioteca para encontrar el procedimiento adecuado. Pero en la biblioteca de la mina no había nada sobre muestreo de minerales. Entonces su jefe le dio la libertad de hacer lo que él considerara adecuado. Utilizando el buen sentido, Pierre tomó muestras y estimó la ley y el tonelaje, pero le quedó una gran inquietud y una tarea para el futuro: desarrollar una teoría para el muestreo de minerales. Esto lo consiguió en investigaciones posteriores, algunas de ellas a su propio costo.

Anexo 3. Sesgos generados por muestreo y análisis.

Según Pierre Gy (ver P. Gy y D. Francois-Bongarcon, 1999) los ordenes de magnitud de los errores pueden ser como los de la Tabla 3:

Tabla 3.

Muestreo	Error relativo en %
Muestreo primario (no equiprobable)	Hasta 1000 %
Muestreo secundario (no equiprobable)	Hasta 50%
Análisis	0.1 hasta 1%

Estos sesgos son **aditivos**.

Anexo 4. Ejemplos de errores de muestreo importantes.

Esta información fue tomada de Pierre Gy (loc. cit.)

- 1. Planta de procesamiento de minerales:** diseñada según torre de muestreo sesgada. Pérdida 10 millones de dólares por año.
- 2. Mina:** dilución de mineral de Cu y Au de 2% que se va a lastre. Pérdida de 8 millones de dólares por año. Costo de un sistema de muestreo correcto: 90,000 dólares.
- 3. Comercialización de minerales:** un sistema de muestreo manual sesgado de concentrados de Sn le costaba al productor 7 millones de dólares cada tres años, es decir un 9 % de la producción. Costo de un sistema correcto: 100,000 dólares.
- 4. Costo adicional de un sistema de muestreo correcto:** siempre es despreciable. Los sistemas de muestreo correcto se amortizan rápidamente.
- 5. Existen en nuestras minas, plantas, laboratorios, catálogos** de fabricantes, una gran cantidad de dispositivos de muestreo incorrectos (no equiprobables)

Lo anterior se debe a la ignorancia de las reglas simples de un muestreo correcto.

Anexo 5. ¿Porqué los errores aleatorios son gaussianos?

Trataremos de proporcionar una explicación simple e intuitiva basada en el experimento de **Galton** (la demostración matemática se basa en el Teorema del Límite Central, uno de los teoremas más importantes de la Estadística)

La plancha de Galton o “**quincunx**” consiste en una tabla, con un recipiente el cual contiene bolillas coloreadas (en la parte superior) y tubos transparentes (en la parte inferior) para recolectar las bolillas.

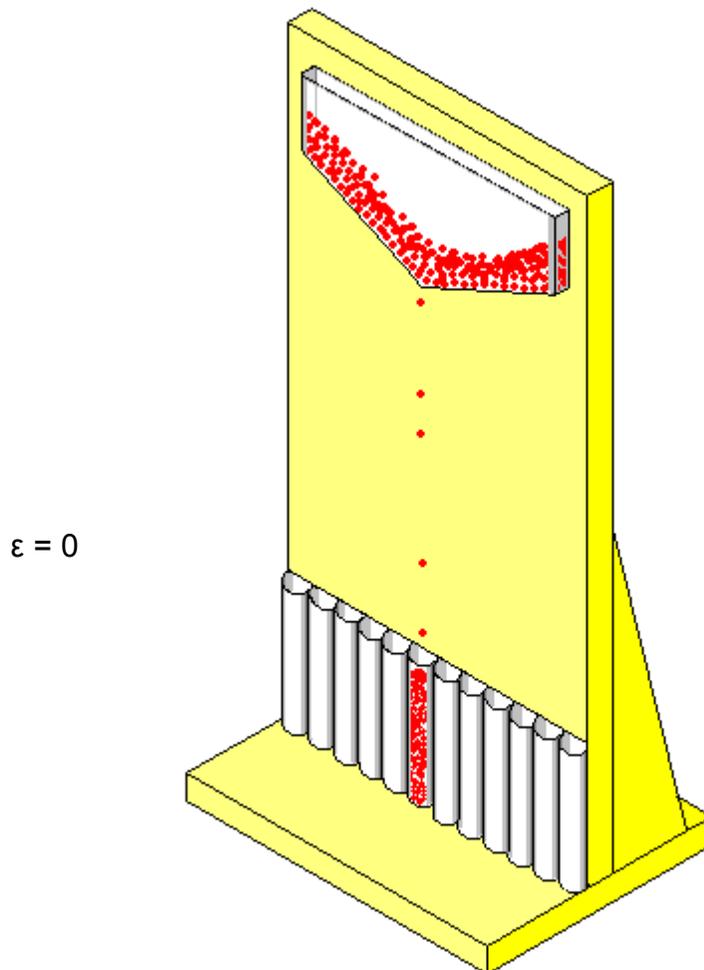


Figura A.4.1: El quincunx.

Existe un orificio que deja caer las bolillas una a una.

En ausencia de error ($\epsilon = 0$), todas las bolillas caen en el tubo central, tal como se muestra en la figura A.4.1.

Supongamos ahora que se tiene un error aleatorio ε debido a la suma de varios errores también aleatorios:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

(El error cometido al determinar la ley de mineral de una muestra es de este tipo: en efecto, este error corresponde a una suma de errores aleatorios que son: error inicial de tomar la muestra, error de delimitación, errores de manipulación, errores de preparación, error fundamental, etc. hasta llegar al error de análisis químico)

Para reproducir el efecto de una suma de errores, se ponen, en el quincunx varias corridas de clavos y se dejan caer las bolillas, las cuales se desvían al azar, tal como se ve en la figura A.4.2:

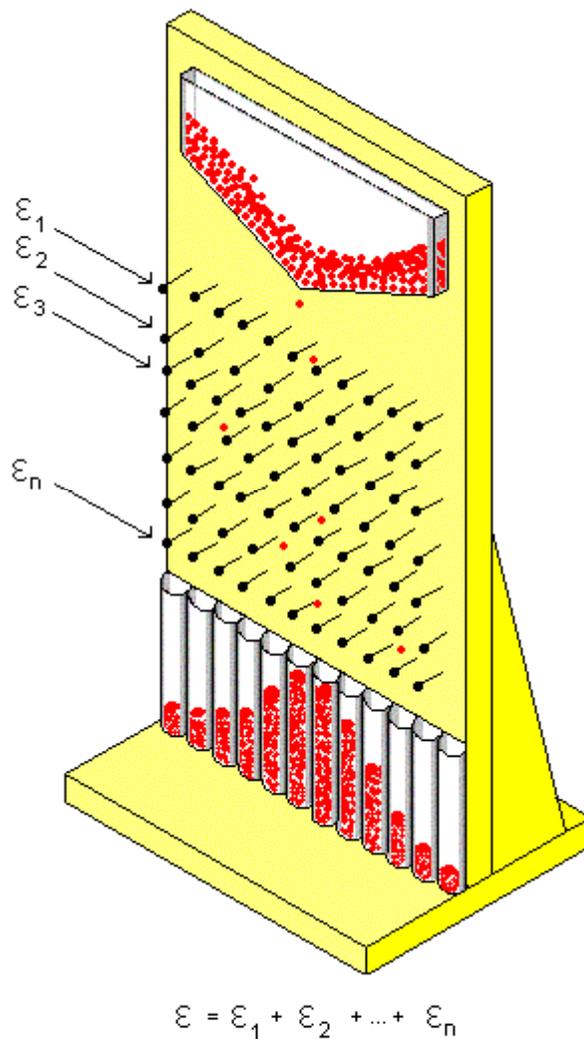


Figura A.4.2. El quincunx en acción.

Cada corrida de clavos simboliza una causa ε_i del error total ε

Después de un cierto tiempo se observa que las bolillas se distribuyen en los tubos como una campana, la famosa **campana de Gauss**. Esta campana es simétrica respecto al punto central.

Si no existe sesgo, entonces la esperanza matemática, es decir el promedio teórico del error total ε es igual a 0. Sea σ^2 la varianza del error ε . Se puede demostrar que si el error ε es gaussiano, entonces se cumple la relación siguiente:

$$P[-2\sigma \leq \varepsilon \leq 2\sigma] = 0.95$$

Es decir el error está entre -2σ y $+2\sigma$ con 95% de probabilidad (ver la figura A.4.3) σ es la desviación estándar del error ε (la raíz cuadrada de la varianza σ^2)

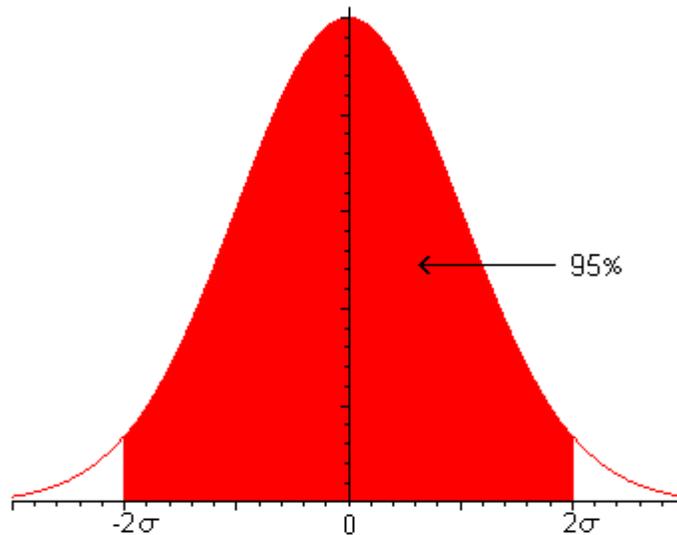


Figura A.4.3: La ley de Gauss o ley normal de probabilidades, σ es la desviación estándar del error (o desviación típica del error)

Se puede afirmar entonces que el error verifica:

$$-2\sigma \leq \varepsilon \leq 2\sigma$$

con 95% de confianza.

A veces se dice que: $\varepsilon = \pm 2\sigma$, con 95% de confianza.

¿Porqué un 95% de confianza?. Corresponde a un compromiso estadístico. Se acepta un riesgo de equivocarse del 5%.

Límites de confianza.

Lo anterior se conoce en Estadística como estimación por intervalos de confianza. Se pueden utilizar otros valores para los límites de confianza como los que se proporcionan a continuación:

$\varepsilon = \pm \sigma$	con 68% de confianza.
$\varepsilon = \pm 1.645\sigma$	con 90% de confianza.
$\varepsilon = \pm 2\sigma$	con 95% de confianza.
$\varepsilon = \pm 3\sigma$	con 99.7% de confianza.

Observamos que a medida que aumenta la confianza, el error aumenta.

Una explicación intuitiva podría ser el ejemplo siguiente: supongamos que nos preguntan la edad **a** (la cual no conocemos) de una persona. En primer lugar hacemos una estimación puntual, por ejemplo **a=30** años y luego realizamos afirmaciones como las de la Tabla 4:

Tabla 4

Confianza o seguridad	Intervalo de confianza	Error en años
Creo que la edad verifica	$29 \leq a \leq 31$	1
Estoy más seguro que	$25 \leq a \leq 35$	5
Estoy casi seguro que	$20 \leq a \leq 40$	10

La confianza o seguridad absoluta (100%) hace que el error sea impracticablemente grande, esta es la razón por la cual se admite como compromiso una confianza del 95%.