

## ASIMOV - ANÁLISIS I PARA EL CBC, Parte 2



# ASIMOV

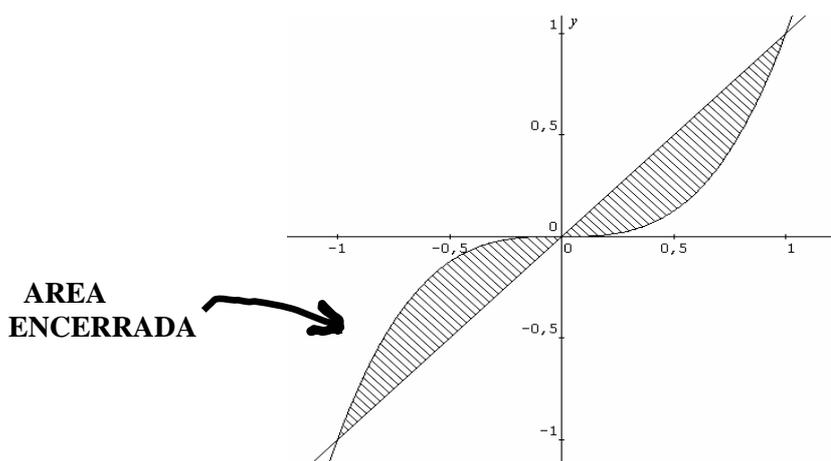
# ANALISIS I

## PARA EL CBC

Ingeniería, Exactas y Económicas

### PARTE 2

- \* INTEGRALES
- \* SUCESIONES
- \* SERIES



Análisis I para el CBC, Parte 2  
- 2ª. edición. - Buenos Aires: Editorial Asimov, 2010

170 p.; 21 x 27 cm.

ISBN: 978-987-23534-3-8

Análisis I para el CBC : parte II - 2a ed. -  
Buenos Aires, Asimov, 2010

v. 1, 170 p. ; 21 x 27 cm.

ISBN 978-987-23534-3-8

1. Análisis. I. Título  
CDD 512

Fecha de catalogación: 20/03/2007

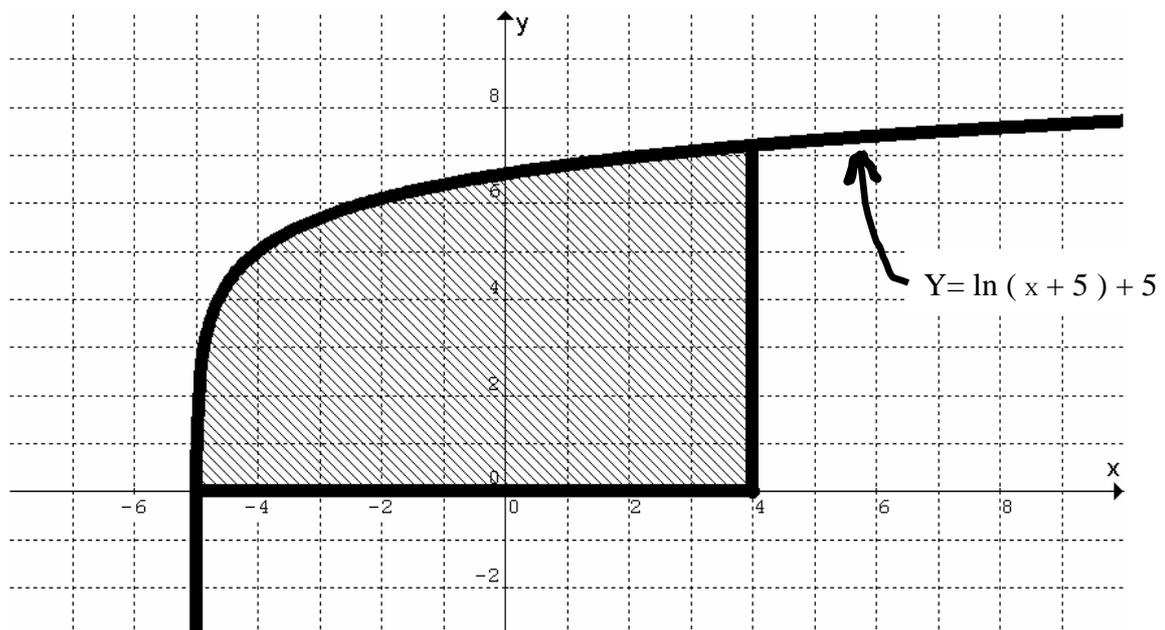
© 2010 Editorial Asimov  
Derechos exclusivos  
Editorial asociada a Cámara del Libro

2ª edición. Tirada: 100 ejemplares.  
Se terminó de imprimir en septiembre de 2010

**HECHO EL DEPÓSITO QUE ESTABLECE LA LEY 11.723**  
Prohibida su reproducción total o parcial  
IMPRESO EN ARGENTINA

¿ Ves algo en este libro que no está bien explicado ?  
¿ Encontraste algún error ?  
¿ La notación que uso yo no es la que usa la cátedra ?  
Mandame un mail y lo corrijo.

[www.asimov.com.ar](http://www.asimov.com.ar)



# INDICE

## Página

2	.....	<b>INTEGRAL INDEFINIDA</b>
3		Primer teorema fundamental del cálculo.
3	.....	Continuidad de la integral indefinida.
4		Función primitiva. Relación con la integral indefinida
6	.....	Integración inmediata.
7		Integración por sustitución.
9	.....	Integración por partes.
10		Integración por fracciones simples.
17	.....	<b>Ejercicios.</b>
35	.....	<b>CÁLCULO INTEGRAL.</b>
40		Integral definida.
46	.....	Propiedades de la integral definida.
50		Regla de Barrow.
52	.....	Integrales impropias.
56		Ejercicios.
71	.....	Ejercicios sacados de parciales
85	.....	<b>SUCESIONES Y SERIES</b>
86		Definición de sucesión. Convergencia.
88	.....	Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas.
89		Teorema del sandwich.
90	.....	Definición de sucesiones por recurrencia.
91		Subsucesiones.
92	.....	Definición de serie. Convergencia.
93		Condición necesaria para la convergencia de una serie.
94	.....	Serie geométrica - Serie armónica.
96		Criterios de converg. para series de términos no negativos
96	.....	Criterio de comparación.
98		Criterio por paso al límite y de la integral

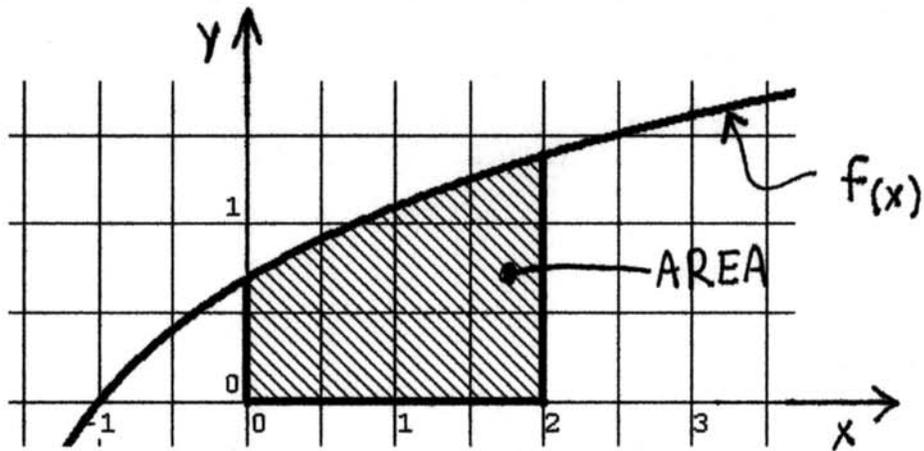
100.....	Criterio de Cauchy y de D'Alembert
102	Series alternadas. Regla de Leibniz.
104.....	Convergencia absoluta y condicional
105	Series de funciones.
106.....	Series de potencias. Radio de convergencia.
108	Propiedades de las funciones representadas por series de potencias.
109 .....	Serie de Taylor generada por una función.
111	Ejercicios
148 .....	Ejercicios sacados de parciales

## **Temas que están en la parte 1:**

Funciones - Continuidad - Derivadas - Taylor



# INTEGRALES



$$\text{Area} = \int_0^2 f(x) dx$$

# INTEGRALES

Integral indefinida y primitivas de una función. Continuidad de la integral indefinida. Técnicas de integración: sustituciones diversas, integración por fracciones simples, integración por partes.

Como ya veremos en el siguiente capítulo, la operación de integración de una función  $f(t)$  entre  $a$  y  $b$ , representa, gráficamente, el área bajo la curva  $f(t)$  entre  $a$  y  $b$ . Esto se pone así:

$$\int_a^b f(t) dt \rightsquigarrow \text{integral de } f(t) \text{ entre } a \text{ y } b.$$

## Integral indefinida:

Suponemos que  $f$  es una función tal que su integral entre " $a$ " y " $b$ " existe para todo " $a$ " y " $b$ " pertenecientes al intervalo  $[c, d]$ . Si tomamos a esta integral como función de " $b$ ", llamándole a ésta " $x$ " (para indicar que ahora es variable) obtenemos:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [c, d]$$

$A(x)$  es una integral indefinida de  $f(t)$ .

Para cada valor de " $a$ " va a haber una integral

indefinida distinta. La diferencia entre una integral indefinida de  $f(\tau)$  y otra será un valor constante.

### Primer teorema fundamental del cálculo:

Sea  $f$  una función cuya integral entre " $a$ " y " $x$ " existe para todo " $a$ " y " $x$ "  $\in [c, d]$  y sea  $A(x)$  su integral indefinida entre " $a$ " y " $x$ ", entonces, la derivada de  $A(x)$  en cualquier  $x \in (c, d)$  donde  $f$  sea continua será igual a  $f(x)$ .

O sea:

$$A(x) = \int_a^x f(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad A'(x) = f(x)$$

(  $c \leq x \leq d$  ) si  $c \leq x \leq d$  y  $f$  es  
continua en  $x$ .

### Continuidad de la integral indefinida

Sea  $f$  una función cuya integral entre " $a$ " y " $x$ " existe para todo " $a$ " y " $x$ "  $\in [c, d]$ , y sea

$A(x) = \int_c^x f(\tau) d\tau$ . Entonces  $A(x)$  será continua

para todo  $x \in [c, d]$ .

Es decir, si la integral indefinida  $A(x)$  existe, será continua.

Función primitiva: Veamos primero la definición.

Si  $f$  es una función con dominio  $D$ , la función  $F$ , definida con el mismo dominio es una primitiva de  $f$  si y sólo si  $F$  es derivable en  $D$  y su derivada es  $f$ . Es decir:

$$F \text{ es primitiva de } f \text{ en } D \Leftrightarrow \forall x \in D: F'(x) = f(x)$$

Nota: si  $f$  tiene una primitiva, tiene infinitas.

Ejemplo: Tomamos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 4x^3$

Ahora fijate: esa  $f$  es, justamente, la derivada de  $x^4$ . Por lo tanto,  $F(x) = x^4$  es una primitiva de  $f$  (porque  $F'(x) = f(x)$ ).

Además, fijate que cualquier  $F$  del tipo:

$$F(x) = x^4 + C \quad (\text{donde } C \text{ es cualquier constante})$$

tiene como derivada a  $f(x)$ .

Como ves, hay infinitas primitivas, una para cada posible valor de  $C$ .

Relación con la integral indefinida

Como dice la definición de primitiva,  $F$  es primitiva de  $f$  si derivada da  $f$ .

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que  $A(x)$  (integral indefinida de  $x$ ), al derivarse da  $f(x)$ . Por lo tanto  $A(x)$  es una primitiva de  $f$ . Como, además, para cada valor de  $a$  en  $A(x) = \int_a^x f(t) dt$  tenés una  $A(x)$  distinta, llegamos a que hay infinitas primitivas.

Notación de Leibniz: El símbolo:

$\int f(x) dx$  designa una primitiva general de  $f$ .

O sea que abarca todas las posibles primitivas de  $f$ . Estas primitivas se diferencian por una constante aditiva, así que:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$C$ , cualquier constante

donde  $F(x)$  es una de las primitivas.

Entonces, por ejemplo:

$$\int \cos x dx = \underbrace{\sin x + C}$$

si derivás esto, te da  $\cos x$

Ahora vamos a ver distintos métodos para obtener primitivas (a la obtención de primitivas se le llama integración)

Pero antes vamos a ver dos propiedades que vas a necesitar:

$$1) \underbrace{\int [f(x) + g(x)] dx}_{\text{Primitiva de } f+g} = \underbrace{\int f(x) dx}_{\text{Primit. de } f} + \underbrace{\int g(x) dx}_{\text{Primit. de } g}$$

$$2) \underbrace{\int c f(x) dx}_{\text{Primit. de } c \cdot f} = c \underbrace{\int f(x) dx}_{\text{C. Primit. de } f}$$

Integración inmediata: Si sabemos que:

$F'(x) = f(x)$  y nos piden obtener las primitivas de  $f(x)$  la solución es " $F(x) + C$ "

Ejemplo: Sabemos que  $(x^m)' = m x^{m-1}$ , por lo

TANTO:  $\int m x^{m-1} dx = x^m + C$

Y, usando la propiedad 2) con  $c = 1/m$  y  $f(x) = m x^{m-1}$

$$\Rightarrow \int x^{m-1} dx = \frac{1}{m} x^m + C \quad \text{si } m \neq 0$$

Otro ejemplo: Buscamos  $\int [3x^{-2} + x^{-1}] dx$ .

Usando el ej. anterior y que  $(\ln x)' = 1/x$ :

$$\int [3x^{-2} + x^{-1}] dx \stackrel{\text{prop 1}}{=} \int 3x^{-2} dx + \int 1/x dx$$

$$\stackrel{\text{prop 2}}{=} 3 \int x^{-2} dx + \ln x + C$$

con  $m = -1$   
en  $\otimes$   $\rightarrow = 3 \cdot \frac{1}{(-1)} x^{-1} + \ln x + C = \boxed{-3/x + \ln x + C}$

Integración por sustitución:

Se usa la regla de la cadena. Como sabemos:

$$Q(x) = F(g(x)) \Rightarrow Q'(x) = F'(g(x)) g'(x)$$

con  $F'(x) = F'(x)$

O sea que:

$$\int F(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad \text{con } F'(x) = f(x)$$

$F$  es primitiva de  $f$

Vamos a ver algunos ejemplos:

1)  $\int \cos(\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) dx = \sin(\ln x) + C$

$\swarrow$   $F(x)$        $\swarrow$   $g(x)$        $\swarrow$   $g'(x)$

$F(x) = \sin(x)$

2)  $\int [\sin(x^5) \cdot x^4] dx = \frac{1}{5} \int [\sin(x^5) \cdot 5x^4] dx$

$\swarrow$   $F(x)$        $\swarrow$   $g(x)$

$F(x) = -\cos(x)$

esto no es  $g'(x)$ , falta la constante

agregamos el 5 arriba y abajo

Ahora sí,  $5x^4$  es  $g'(x)$  y podemos integrar:

$$= \frac{1}{5} [-\cos(x^5)] + C = \boxed{-\frac{1}{5} \cos(x^5) + C}$$

Podés verificar el resultado derivándolo (por la regla de la cadena) y viendo que da  $\sin(x^5) \cdot x^4$ .

Para usar integración por sustitución la condición es que el integrando sea del tipo " $f(g(x)) \cdot g'(x)$ ", o sea, el producto de dos funciones, una debe ser una función compuesta y la otra, la derivada de la función interior.

Preguntarás porque se llama "por sustitución" este método... Bueno, porque hay una forma práctica de implementarlo que es haciendo un cambio de variable, sustituyendo  $g(x)$  por  $\tau$  y  $\boxed{g'(x) \cdot dx}$  por  $\boxed{d\tau}$ . Lo vemos en el ejemplo anterior:

$$\int \sin(x^5) \cdot x^4 dx = \int \sin(\tau) \frac{d\tau}{5}$$

$$\hookrightarrow \tau = x^5 \Rightarrow d\tau = \underbrace{5x^4 dx}_{\substack{\text{tengo esto} \\ \text{en el integrando,} \\ \text{lo despejo}}} \Rightarrow \frac{d\tau}{5} = x^4 dx$$

O sea, reemplazás  $\sin(x^5)$  por  $\sin(\tau)$  y  $x^4 dx$  por  $\frac{d\tau}{5}$ . Después integrás:

$$\int \sin(\tau) \frac{d\tau}{5} = \frac{1}{5} [-\cos(\tau)] + C = \boxed{\frac{-1}{5} \cos(x^5) + C}$$

Volviendo a  $x$  ( $\tau = x^5$ )

Otro ejemplo:

$$3) \int \frac{x^4 + 2x}{x^5 + 5x^2} dx \quad \rightsquigarrow \quad \text{Usamos } \tau = x^5 + 5x^2$$

$$d\tau = (5x^4 + 10x) dx$$

Lo que tenemos en el integrando es  $(x^4 + 2x) dx$ .  
Trato de obtener eso en el miembro derecho de  $dT$ .

$$dT = 5(x^4 + 2x) dx \Rightarrow \frac{dT}{5} = (x^4 + 2x) dx$$

Listo, cambiando de variable en la integral:

$$\int \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{5} = \frac{1}{5} \ln T + C = \boxed{\frac{1}{5} \ln(x^5 + 5x^2) + C}$$

$\tau = x^5 + 5x^2$

### Integración por partes:

En este caso el integrando también debe ser producto de dos funciones, pero ahora del tipo:  $f'(x) \cdot g(x)$ .

Para integrar eso se va a usar la regla de derivación del producto:  $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x) dx = \int (f(x)g(x))' dx - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx + C}$$

Agregando la constante e integrando el 1º sumando

La condición, entonces, es que uno de los factores ( $f'(x)$ ) tenga primitiva. Es decir, que se pueda encontrar  $f(x)$ . El otro factor sólo deberá derivarse.

Vamos a ver ejemplos:

$$1) \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx + C$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x \\ \Downarrow \\ f(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(x) = \ln x \\ \Downarrow \\ g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Elegimos como  $f'$  a " $x$ " porque se puede integrar. Si tomáramos a  $\ln x$  como  $f'$  no íbamos a poder encontrar  $f$  fácilmente

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx + C = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

$$2) \int e^x \cdot x \, dx$$

En este caso, tanto  $e^x$  como  $x$  tienen integrales directas. Sin embargo, en casos como este conviene elegir como  $f'$  al factor que al integrarse se "complica" menos. Como  $e^x$  al integrarse queda igual, pero  $x$  sube su exponente, elegimos:

$$\begin{array}{l} f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{array}$$

$$\int e^x x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx + C = \boxed{x e^x - e^x + C}$$

### Integración por fracciones simples

Este método sirve únicamente cuando el integrando es cociente de polinomios, o sea, una "función racional".

El integrando será del tipo  $\frac{F(x)}{g(x)}$ , con  $f$  y  $g$  polinomios.

- Si el grado de  $f$  es mayor que el de  $g$ , se debe efectuar la división de los polinomios:

$$\frac{F(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{resto} \\ \searrow \text{resulta, al dividir, que el} \\ \text{grado de } r \text{ es menor q' el de } g. \end{array}$$

$q$ , cociente, será un polinomio, se integra de forma inmediata (suma de términos  $x^n$ )

Ejemplo: (para que recuerdes cómo se divide).

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx \Rightarrow \underline{\text{divido}}: \begin{array}{r} \textcircled{1} x \cdot (x+1) \rightarrow \begin{array}{r} -x^2 + 0x + 0 \\ \underline{x^2 + x} \\ -x \end{array} \quad \begin{array}{r} |x+1 \\ x-1 \\ \hline \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \hline q(x) = x-1 \end{array} \\ \text{resta} \rightarrow -x \\ \textcircled{2} (-1) \cdot (x+1) \rightarrow \begin{array}{r} -x - 1 \\ \underline{-x - 1} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

De la división resulta:

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x-1}{g(x)} + \frac{1}{x+1} \quad \begin{array}{l} \nwarrow r(x) \\ \nearrow r(x) = 1 \end{array}$$

Integrar esto es fácil:

$$\int (x-1 + \frac{1}{x+1}) dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{1}{t} dt$$

↳ para este término hago sustitución:  $t = x+1$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C}$$

- Entonces, el término  $q(x)$  se integra de inmediato, pero  $\frac{r(x)}{g(x)}$  no (salvo en casos como el de recién). porque queda otra función racional.

Vamos a ver, entonces, que podemos descomponer  $r(x)/g(x)$  en suma de términos que tendrán las siguientes formas:  $\frac{1}{(x+a)^m}$ ;  $\frac{1}{(x^2+a^2)^m}$ ;  $\frac{x}{(x^2+a^2)^m}$  y cuyas primitivas son:

a) $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln x+a $	b) $\int \frac{1}{(x+a)^m} dx = \frac{-1}{(m-1)(x+a)^{m-1}}$
c) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right)$	
d) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^m} dx = \frac{x}{2a^2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)} \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}} dx$	
e) $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln x^2+a^2 $	f) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^m} dx = \frac{-1/2}{(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}}$

Notas: A todas les falta la constante aditiva C.

La d) se obtiene de las tablas de integrales. Esta fórmula se aplica reiteradas veces hasta que la integral del segundo término se reduce al caso c).

Sólo falta saber cómo descomponer  $r(x)/g(x)$  en sumas de términos como esos. Se plantean 4 casos distintos según las raíces de  $g(x)$ .

1]  $g(x)$  tiene raíces reales y simples (no hay dos raíces iguales). En este caso  $g(x)$  se puede escribir:

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 = a_m (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son las raíces de  $g(x)$ . Y podemos

escribir: 
$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m}$$

Para obtener  $A_1, A_2, A_m$  se eliminan los denominadores en esa ecuación y se evalúan ambos miembros en las raíces de  $g(x)$ , de ahí se despejan las  $A_i$ .

Ejemplo: 
$$\int \frac{x+1}{x^2-2x} dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)} dx$$
 No hace falta dividir, el grado de arriba es menor al grado de abajo.

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} \Rightarrow x+1 = A_1(x-2) + A_2 x$$

Evaluando en las  $x_i$ : multiplicando ambos miembros por  $x(x-2)$  para eliminar el denominador

$$x=0 \Rightarrow 1 = A_1(-2) \Rightarrow A_1 = -1/2$$

$$x=2 \Rightarrow 2+1 = A_2 \cdot 2 \Rightarrow A_2 = 3/2$$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x} dx = \int \left[ \frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x-2} \right] dx = \frac{-1}{2} \ln x + \frac{3}{2} \ln(x-2) + C$$

Usando la fórmula a) de integración

O sea, halladas las  $A_i$ , se integra cada término por separado, quedando una suma de logaritmos. en este caso.

2]  $g(x)$  tiene raíces reales, algunas múltiples. (dos o más raíces iguales).

Supongamos que  $x_i$  es raíz de grado  $m$  de  $g(x)$

(m raíces iguales a  $x_1$ ). En ese caso, en la descomposición en raíces simples deben ponerse los siguientes términos:

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^m} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x-x_1)}$$

Para obtener las  $A_i$  en este caso se hace como antes, pero no alcanza con evaluar en las raíces, hay que evaluar en algunos otros valores de  $x$  hasta tener tantas ecuaciones como incógnitas.

Ejemplo:  $\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)} dx$  ( $x_1=1$ , raíz de grado 2)   
  $\leftarrow$  ponemos  $g(x)$  ya factorado.

$$\Rightarrow \left[ \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2} \right] \cdot (x-1)^2(x-2) \quad \leftarrow \text{multip. por } g(x)$$

$$\Rightarrow x^2-x+4 = A_1(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)^2$$

$$x=1 \Rightarrow 1^2-1+4 = A_1(-1) \Rightarrow A_1 = -4$$

$$x=2 \Rightarrow 2^2-2+4 = A_3(2-1)^2 \Rightarrow A_3 = 6$$

$$x=0 \Rightarrow 4 = -2A_1 + 2A_2 + A_3 \Rightarrow A_2 = \frac{4 + 2A_1 - A_3}{2}$$

$\leftarrow$  Otro  $x$  cualquiera (con 0 es fácil)

$$A_2 = -5$$

Entonces:

$$\int \left[ \frac{-4}{(x-1)^2} + \frac{-5}{x-1} + \frac{6}{x-2} \right] dx = 4 \frac{1}{(x-1)} - 5 \ln(x-1) + 6 \ln(x-2) + C$$

fórmulas a) y b).

3]  $g(x)$  tiene raíces complejas y simples.

Habrá, entonces, en  $g(x)$ , algún factor del tipo:

$x^2 + bx + c$ . Por cada uno de esos factores, en   
  $\leftarrow$  si tiene raíces complejas, no se puede reducir más

La descomposición se pondrá el término:  $\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + bx + c}$

Para integrar ese tipo de términos se hace lo siguiente: se completan cuadrados en el denominador y se usan las fórmulas c) y e).

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = u^2 + a^2$$

completando cuadrados.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \\ u &= x + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Poniendo todo en función de  $u$

$$\int \frac{A_1 \overset{x}{(u - b/2)} + B_1}{u^2 + a^2} du = A_1 \underbrace{\int \frac{u}{u^2 + a^2} du}_{\text{fórmula e)}} + \left(-\frac{b}{2} A_1 + B_1\right) \underbrace{\int \frac{1}{u^2 + a^2} du}_{\text{fórmula c)}}$$

Ejemplo:  $\int \frac{x+2}{x^3-1} dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

Se descompone en:  $\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2+x+1} = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$\Rightarrow A_1(x^2+x+1) + (A_2 x + B_2)(x-1) = x+2$$

$$x=1 \Rightarrow A_1(1^2+1+1) = 3 \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow A_1 - B_2 = 2 \Rightarrow \boxed{B_2 = -1} \\ x=-1 &\Rightarrow A_1 + 2A_2 - 2B_2 = 1 \Rightarrow \boxed{A_2 = -1} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow A_1 - B_2 = 2 \Rightarrow \boxed{B_2 = -1} \\ x=-1 &\Rightarrow A_1 + 2A_2 - 2B_2 = 1 \Rightarrow \boxed{A_2 = -1} \end{aligned} \right.$$

dos valores cualesquiera

$$\int \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{x^2+x+1} \right] dx = \ln|x-1| + (-1) \int \frac{\overset{u}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$\hookrightarrow = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow u = x + \frac{1}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \ln|x-1| - \left[ \int \frac{u}{u^2+a^2} du + \int \frac{1/2}{u^2+a^2} du \right]$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln\left(\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{u^2} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{a^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C$$

Bueno, sí, se complica, pero con la práctica te vas a acostumbrar.

4)  $g(x)$  tiene raíces complejas y múltiples.

Q sea que habrá términos del tipo:  $(x^2+bx+c)^m$   
Por cada uno de ellos en la descomposición se pondrán los términos:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)^m} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^{m-1}} + \dots + \frac{A_mx+B_m}{x^2+bx+c}$$

En este caso el procedimiento es similar al del caso 3), sólo que acá tenés que usar también las fórmulas d) y f).

Tabla de integrales:

Existen tablas donde hay un montón de integrales ya resueltas en función de los parámetros de la función. Por ejemplo, la fórmula d) fue sacada de una tabla de integrales.

Simplemente, dada una función que no podés resolver por ninguno de los casos anteriores, la buscás en la tabla, reemplazás los valores de los parámetros y listo.

# EJERCICIOS

1) Demuestre que:

a)  $\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$

Como vimos en la parte teórica:  $\int f(x) dx = F(x) + c$   
donde  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  y, por lo tanto: debe cumplirse:  $F'(x) = f(x)$

Entonces ya está; mirá:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [F(x) + c] = F'(x) = f(x)$$

usando esto

$$\frac{d}{dx} F(x) = F'(x) \text{ y } \frac{d}{dx} c = 0$$

b)  $\int df(x) = f(x) + c$

$df(x)$  es el diferencial de la función  $f(x)$  y es, simplemente:

$$\boxed{df(x) = f'(x) dx}$$

Entonces:  $\int df(x) = \int f'(x) dx =$  una primitiva de  $f'(x) + c$

La primitiva  $F(x)$  de  $f'(x)$  debe cumplir:

$$F'(x) = f'(x)$$

Por lo tanto, tomando  $F(x) = f(x)$  tenemos una

primitiva de  $f'(x)$ . Otras primitivas podrían ser  $f(x) + 1$ ;  $f(x) - 2, 3$ ; etc. Todas esas, derivadas, dan  $f'(x)$ .

Así que ya demostramos que:  $\int df(x) = f(x) + C$

c) Si  $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$   
con  $a \neq 0$

La hipótesis es que  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , o sea:  $F'(x) = f(x)$ .

Tenemos que demostrar que  $\frac{1}{a} F(ax+b)$  es una primitiva de  $f(ax+b)$ . Fácil, la derivamos y vemos:

$$\left(\frac{1}{a} F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) = \frac{1}{a} (ax+b)' \cdot f(ax+b)$$

↓  
Por regla de la cadena

$$= \frac{1}{a} a \cdot f(ax+b) = f(ax+b) \rightsquigarrow \text{Listo!}$$

Nota: La condición  $a \neq 0$  es necesaria porque si  $a$  fuera 0  $\Rightarrow f(ax+b) = f(b)$  sería una constante.

En ese caso:  $\int f(b) dx = f(b) \cdot \int dx = f(b) \cdot x + C$

y la fórmula del enunciado con  $a$  dividiendo deja de servir.  
una primitiva de "1" es  $x$ .

---

**2** Simplifique las siguientes expresiones usando propiedades de la integral indefinida, suponiendo que  $f(x)$

es "suficientemente derivable" en cada caso.

$$a) \int 2 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 f(x)) dx$$

Como sabemos de la teoría, el 2 lo podemos sacar de la integral:  $2 \int \frac{d}{dx} (x^2 f(x)) dx$

$$\text{Llamando } g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} (x^2 f(x)) = \frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$$

Y, entonces:

$$\int 2 \frac{d}{dx} (x^2 f(x)) dx = 2 \int g'(x) dx = 2 \cdot g(x) + C$$

como en el ej 1) b)

$$= \boxed{2 \cdot x^2 f(x) + C}$$

$$b) \int \left[ \frac{d^2}{dx^2} (x f(x)) + x f'(x) + f(x) \right] dx$$

Como vimos, esta integral la podemos convertir en suma de tres integrales (ver teoría):

$$\int \frac{d^2}{dx^2} (x f(x)) dx + \int x f'(x) dx + \int f(x) dx$$

Resolvemos de a una:

$$\bullet \int \frac{d^2}{dx^2} (x f(x)) dx = \frac{d}{dx} (x f(x)) + C$$

La primitiva, como siempre, es una función tal que, derivada, da  $\frac{d^2}{dx^2} (x f(x))$

$$= f(x) + x f'(x) + C$$

↙  
derivando el producto

$$\bullet \int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx + C$$

↙  
integrando por partes con:  $g(x) = x$  (ver teoría)  
 $g'(x) = 1$

Juntando todo; sumando los 3 términos y uniendo las constantes en una sola:

$$\underbrace{f(x) + x f'(x)}_{1^\circ \text{ integ.}} + \underbrace{x f(x) - \int f(x) dx}_{2^\circ \text{ integ.}} + \int f(x) dx + C'$$

$$= \boxed{f(x) + x f'(x) + x f(x) + C}$$

3 Hallar  $h(x)$  para que se verifique la siguiente igualdad.

$$\int \cos x \cdot h(x) \cdot dx = \arctg(\text{sen}(x)) + C$$

Es fácil, la derivada de  $\arctg(\text{sen}(x))$  debe ser igual a  $\cos(x) \cdot h(x)$ , de ahí despejamos  $h(x)$ :

$$(\arctg(\text{sen}(x)))' = \frac{1}{1 + (\text{sen}(x))^2} \cdot \cos(x) = h(x) \cdot \cos(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) = \frac{1}{1 + (\text{sen}(x))^2}}$$
 para q' se cumpla la igualdad.

4) Encuentre las primitivas de las siguientes  $f(x)$ :

a)  $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt[3]{2+4x-x^2}}$

Esta la podemos solucionar por sustitución, tomando

$$t = 2+4x-x^2. \text{ Entonces: } dt = (4-2x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow dt = 2(2-x) dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = (2-x) dx$$

$$\int \frac{2-x}{\sqrt[3]{2+4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{1/3}} dt$$

Reemplazando  $t = 2+4x-x^2$  y  $\frac{dt}{2} = (2-x) dx$

Usando  $\int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{m+1} + C$  :

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{1/3}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-1/3} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{4} t^{2/3} + C$$

$m = -\frac{1}{3}$

$$= \boxed{\frac{3}{4} (2+4x-x^2)^{2/3} + C}$$

b)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

Aca no podemos usar sustitución, así que probamos "por partes".

El  $\ln$  no lo sabemos integrar, así que lo tomamos igual  $g(x)$  y a  $f'(x)$  igual al resto. O sea:

$$g(x) = \ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{-1}{x+1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx &= \frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \int \left( \frac{1}{x+1} \right) \left( \frac{-1}{x+1} \right) dx + c \\ &= \frac{-\ln(x+1)}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + c \\ &= \boxed{\frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} + c} \end{aligned}$$

$$c) f(x) = \frac{4e^{4x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2}$$

Acá tenemos que usar dos métodos seguidos. Primero sustitución y después fracciones simples.

Para la sustitución usamos  $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx$  (ya vas a ver porqué)

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{4e^{4x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2} dx &= \int \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{dt}}{e^{4x} - e^{2x} - 2} dx \\ &= \int \frac{2t}{t^2 - t - 2} dt \end{aligned}$$

Ahora tiene la forma adecuada para usar fracciones simples, ¿ves? Por eso elegimos  $t = e^{2x}$ , para que quede así.

Entonces factorizamos el denominador:

$$t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

y buscamos la descomposición en fracciones simples

$$\left[ \frac{2t}{t^2 - t - 2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-2} \right] \cdot (t+1)(t-2)$$

$$2t = A(t-2) + B(t+1)$$

$$\begin{cases} t=2 \Rightarrow 4 = B \cdot 3 \Rightarrow \boxed{B = 4/3} \\ t=-1 \Rightarrow -2 = A(-3) \Rightarrow \boxed{A = 2/3} \end{cases}$$

Llegamos así a:

$$\begin{aligned} \int \frac{2t}{t^2 - t - 2} dt &= \int \frac{2/3}{t+1} dt + \int \frac{4/3}{t-2} dt \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{4}{3} \int \frac{1}{t-2} dt \\ &= \boxed{\frac{2}{3} \ln(|t+1|) + \frac{4}{3} \ln(|t-2|) + C} \end{aligned}$$

Ahora hay que volver a la variable original; usando  $t = e^{2x}$ :

$$\int \frac{4e^{4x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2} dx = \boxed{\frac{2}{3} \ln(|e^{2x} + 1|) + \frac{4}{3} \ln(|e^{2x} - 2|) + C}$$

d)  $f(x) = \ln(1+x^2)$

Esta parece inofensiva ... pero se las trae ...

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx + C$$

Usamos partes con:  $f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$

$$g(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Para integrar  $\frac{2x^2}{1+x^2}$  primero hay que hacer la división:

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad | \quad x^2+1 \\ \underline{2x^2+2} \quad 2 \\ -2/ \end{array} \Rightarrow \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{\overset{\text{resto}}{-2}}{x^2+1} + \overset{\text{cociente}}{2}$$

$$\text{Entonces: } \int \left[ \frac{-2}{x^2+1} + 2 \right] dx = -2 \int \frac{1}{x^2+1} dx + 2 \int dx$$

$$= -2 \operatorname{arctg}(x) + 2x + C$$

usando la tablita que está en la parte teórica.

En definitiva:

$$\boxed{\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) + 2 \operatorname{arctg}(x) - 2x + C}$$

$$e) f(x) = \sin^2(3x) \cos^3(3x) dx$$

Este hay que resolverlo por sustitución, con un truguito más. Tomamos  $T = \sin(3x)$

$$\Rightarrow dT = 3 \cos(3x) dx$$

Ahora, fijate que  $f(x)$  tiene el  $\cos(3x)$  al cubo, y en  $dt$  no está al cubo. Entonces:

$$\int \underbrace{\sin^2(3x)}_{t^2} \underbrace{\cos^2(3x)}_{1-t^2} \underbrace{\cos(3x)}_{\frac{dt}{3}} dx =$$

Esto sale de que  $\cos^2 + \sin^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 = 1 - \sin^2$

$$\int t^2(1-t^2) \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{3} \int t^2 dt - \frac{1}{3} \int t^4 dt$$

$$= \frac{1}{3} \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{9} \sin^3(3x) - \frac{1}{15} \sin^5(3x) + C}$$

f)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Para esta usamos una sustitución medio rara, pero bastante usada. Tomamos:  $x = \sin t$

(No  $t = \sin x$  como otras veces, sino al revés).

$$\Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cos t dt = -\cos t + C$$

$$\hookrightarrow (1-x^2 = 1 - (\sin t)^2 = \cos^2 t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos t)$$

$$= \boxed{-\cos(\arcsin(x)) + C}$$

donde la última igualdad sale de despejar  $\tau$  de  $x = \text{sen } \tau \Rightarrow \tau = \text{arc sen } x$ .

Nota: Todos los resultados de este punto los podés verificar de dos formas: fijándote en la tabla de integrales o derivando el resultado y viendo que coincida con la  $f(x)$  que estás integrando.

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

Tomamos  $\tau = \sqrt[6]{x+1}$  de manera que  $f(x)$

quede sin raíces; ya que:  $\sqrt[3]{x+1} = \tau^2$

$$\sqrt{x+1} = \tau^3$$

Por otra parte:  $d\tau = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6} dx = \frac{1}{6} \frac{1}{(\sqrt[6]{x+1})^5} dx$

$$d\tau = \frac{1}{6} \frac{1}{\tau^5} dx \Rightarrow dx = 6\tau^5 d\tau$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1}{\tau^2 - \tau^3} 6\tau^5 d\tau = 6 \int \frac{\tau^5}{\tau^2 - \tau^3} d\tau$$

$$= 6 \int \frac{\tau^5}{\tau^2(1-\tau)} d\tau = 6 \int \frac{\tau^3}{1-\tau} d\tau$$

$$\text{Dividiendo: } \frac{\tau^3}{1-\tau} = \frac{1}{1-\tau} - \tau^2 - \tau - 1$$

$$\text{Integrando: } \int \frac{\tau^3}{1-\tau} d\tau = \ln(|1-\tau|) - \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^2}{2} - \tau + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} dx = \boxed{\ln(|1 - \sqrt[6]{x+1}|) - \frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} - \sqrt[6]{x+1} + C}$$

5) Determinar la función  $f(x)$  sabiendo que:

a)  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{y} \quad f(8) = 3$

Conocemos la derivada de  $f(x)$ , integrando obtenemos la forma general de cualquier función que tenga esa derivada.

$$\int f'(x) dx = \int \frac{1}{3x^{2/3}} dx = \frac{1}{3} \int x^{-2/3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \boxed{\sqrt[3]{x} + C}$$

La función  $f(x)$  debe tener esa forma.

El valor de  $C$  se determina con la segunda condición:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + C \quad \text{con} \quad f(8) = \sqrt[3]{8} + C = 3$$

$$\Rightarrow f(8) = 2 + C = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 1}$$

Finalmente, llegamos a que:  $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x} + 1}$

b)  $f'': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \quad \text{y} \quad \text{que los puntos}$

$(1, 2)$  y  $(4, 6)$  pertenecen a la gráfica de  $f$ .

En este caso tenemos la derivada segunda de  $f$ , así que para obtener  $f(x)$  tenemos que integrar dos veces.

$$\int f''(x) dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^3}} dx = \int \frac{1}{2} x^{-3/2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-1}{\sqrt{x}} + C \rightarrow \text{forma de } f'(x)$$

$$\int f'(x) dx = \int \left( \frac{-1}{\sqrt{x}} + C \right) dx = \int \left( -x^{-1/2} + C \right) dx$$
$$= -\frac{x^{1/2}}{1/2} + C \cdot x + d$$
$$= -2\sqrt{x} + Cx + d \rightarrow \text{esta es la forma de } f(x)$$

una nueva constante, distinta de  $C$ .

Ahora hay que obtener los valores de las constantes usando las otras dos condiciones:  $f(1) = 2$

$$f(x) = -2\sqrt{x} + Cx + d$$

$$f(4) = 6$$

$$\begin{cases} f(1) = -2 + C + d = 2 & \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -2 \cdot 2 + C \cdot 4 + d = 6 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{Restando } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \Rightarrow 2 - 3C = -4 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$\text{Reemplazando } C=2 \text{ en } \textcircled{1} \Rightarrow -2 + 2 + d = 2 \Rightarrow \boxed{d=2}$$

Finalmente la  $f(x)$  que cumple las condiciones del enunciado es:

$$f(x) = -2\sqrt{x} + 2x + 2$$

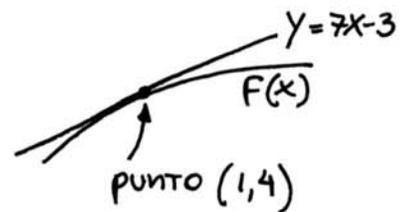
c) La ecuación de la recta tangente a la función, en el punto  $x=1$  es  $(y = 7x - 3)$  y

$$f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f''(x) = 12x$$

Sabemos que la recta tangente a una curva en un punto debe tener la misma pendiente que la curva y pasar por ese punto. Por lo tanto, de ese dato sacamos que:

- el punto  $(1, 4)$  pertenece a la gráfica de  $f(x)$  (porque la recta tangente en  $x=1$  vale 4)

- la pendiente de  $f(x)$  en  $x=1$  es igual a 7 (igual que la de la recta tangente), por lo tanto sabemos que  $f'(1) = 7$ .



Listo, ahora integramos  $f''$  dos veces, obteniendo:

$$f'(x) = 6x^2 + C \quad ; \quad f(x) = 2x^3 + Cx + d$$

Imponiendo las dos condiciones que obtuvimos recién:

$$f(1) = 4 \Rightarrow 2 + C + d = 4$$

$$f'(1) = 7 \Rightarrow 6 + C = 7 \Rightarrow \boxed{C = 1} \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

Entonces:

$$f(x) = 2x^3 + x + 1$$

6 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)  $y' - y \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

Resolver una ecuación diferencial implica encontrar la función  $y = f(x)$  general que satisfaga esa ecuación. Hay muchos trucos para resolver este tipo de ecuaciones, en este ejercicio vamos a presentar algunos.

Veamos este caso:  $y' = y \cdot \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \rightarrow$  Teniendo en un miembro  $\frac{y'}{y}$  pasamos a integrar, considerando que  $y = f(x)$ .

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx$$

Ahora viene el truco. Fíjate que buscamos la primitiva de  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  y que  $\ln f(x)$ , derivada, da justamente eso. Es decir:

$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) \Rightarrow$  Entonces,  $\ln(f(x))$  es una primitiva de  $\frac{f'(x)}{f(x)}$   
par regla de la cadena

Listo, ahora volvemos a la ecuación e integramos el otro miembro. (ponemos las constantes de integración juntas, en el miembro derecho)

$$\ln(f(x)) = -\frac{1}{x} + c$$

$$\text{Despejando } f(x): e^{\ln(f(x))} = e^{-\frac{1}{x} + c}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \underbrace{e^c}_{\text{otra constante}} \Rightarrow \boxed{f(x) = k e^{-\frac{1}{x}}}$$

Conclusión: Todas las funciones de esa forma ( $y = k e^{-\frac{1}{x}}$ ) cumplen  $y' - y \frac{1}{x^2} = 0$ . Esto lo podés verificar derivando  $f(x)$ , obteniendo  $y' = f'(x)$  y reemplazando en esa ecuación.

$$b) y' + ay = 0$$

Este tipo de ec. dif. es muy típico. El método para resolverlo es el mismo que el que usamos recién:

$$y' = -ay \Rightarrow \frac{y'}{y} = -a \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int -a dx$$

$$\Rightarrow \ln y = -ax + c \Rightarrow y = e^{-ax} e^c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k e^{-ax}}$$

$$c) y' + ay = b$$

Esta es una generalización de la anterior. La solución, en este caso, está compuesta por dos términos: uno es el de recien ( $k e^{-ax}$ ) y el otro uno constante, de manera que se verifique la ecuación.

Entonces:

$$y = k e^{-ax} + A$$

Reemplazamos eso en la ecuación para buscar el valor de  $A$  que verifique:

$$(k e^{-ax} + A)' + a(k e^{-ax} + A) = b$$

$$\cancel{-ak e^{-ax}} + \cancel{ak e^{-ax}} + aA = b \Rightarrow A = \frac{b}{a}$$

Finalmente:

$$y = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

---

7 Hallar la solución particular de la sig. ec. dif. para que satisfaga la condición inicial:  $y(0) = 1$

$$y' = \sqrt{2x} y$$

La solución general a esa ecuación es:

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{2x} \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int \sqrt{2x} dx \Rightarrow \ln y = \sqrt{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\Rightarrow y = k e^{2\sqrt{2}/3 \sqrt{x^3}}$$

Con la condición inicial  $y(0) = 1$  se define la constante  $k$ :

$y(0) = k = 1 \Rightarrow$  Finalmente la función  $y$  que cumple la ecuación dif. y la condición inicial es:

$$y = e^{2\sqrt{x^3}/3}$$

---

8 Calcular la siguiente integral:  $\int x f'(x^2) dx$

Hay que resolverla por sustitución, tomando  $\tau = x^2$

$$\Rightarrow d\tau = 2x dx \Rightarrow \frac{d\tau}{2} = x dx$$

$$\Rightarrow \int x f'(x^2) dx = \int f'(\tau) \frac{d\tau}{2} = \frac{1}{2} \cdot f(\tau) + C$$

$$= \frac{1}{2} f(x^2) + C$$

---

9 Hallar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f^2(x) f'(x) - x^2 = 0$  y  $f(1) = 2$

Primero despejamos:

$$f^2(x) f'(x) = x^2 \Rightarrow \text{integraremos: } \int f^2(x) f'(x) dx = \int x^2 dx$$

Usamos una sustitución:  $\tau = f(x) \Rightarrow d\tau = f'(x) dx$

$$\Rightarrow \int \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} + C \Rightarrow \frac{\tau^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow \underset{\tau=f(x)}{f^3(x)} = x^3 + \underbrace{3C}_{\text{otra constante}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^3 + C'}$$

Con la condición  $f(1) = 2$  sacamos  $C'$ :

$$f(1) = \sqrt[3]{1^3 + C'} = 2 \Rightarrow 1 + C' = 8 \Rightarrow \boxed{C' = 7}$$

Por lo tanto:  $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7}}$

10 Obtener las funciones "y" que cumplan la sig. ec. diferencial:

$$y' = \text{sen}(x) y^2$$

Este es otro tipo de ec. dif. La resolvemos de la sig. manera; usando  $y' = \frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \text{sen}(x) y^2$$

Pasando el  $dx$  a la derecha y el  $y^2$  a la izquierda, queda:

$$\frac{dy}{y^2} = \text{sen}(x) dx \xrightarrow{\text{integrando}} \underbrace{\int \frac{dy}{y^2}}_{\text{de este lado la variable es } y} = \underbrace{\int \text{sen}(x) dx}_{\text{de este lado, } x} \Rightarrow$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = -\cos(x) + C \Rightarrow \frac{1}{y} = \cos(x) - C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\cos(x) - C}}$$

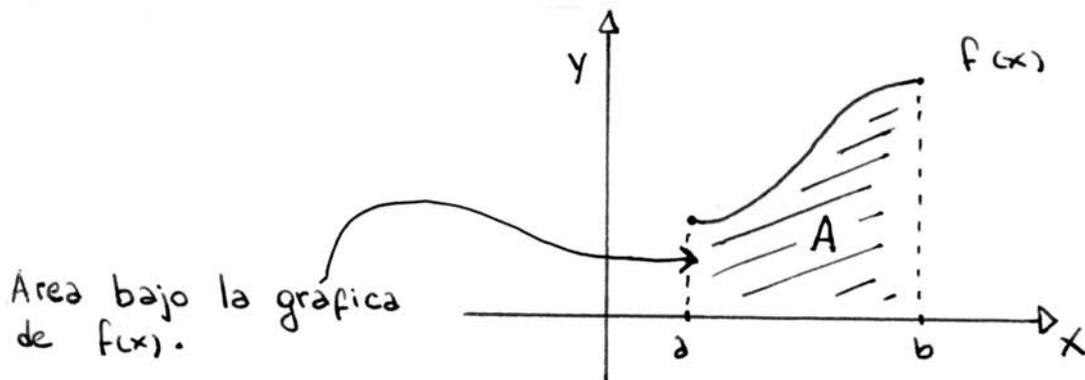
Nota: Las ec. del ej 6, a) y b) también las podías resolver con este método (próballo, dale).

### INTEGRAL DEFINIDA

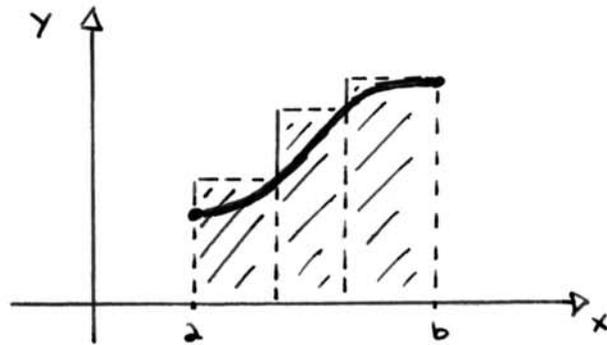
La integral definida. La integral de Riemman. Integral inferior y superior de Riemman. Funciones integrables, definición. Condiciones de integrabilidad. Integrabilidad de las funciones monótonas y de las funciones continuas. Propiedades de la integral de Riemman: linealidad y aditividad propiedades de positividad de la integral. Teorema del valor medio del cálculo integral. Función integral: teorema fundamental. Barrow.

La idea de "integral" es mucho mas vieja que la de derivada. La noción de integral llega hasta los antiguos griegos tratando de resolver problemas de áreas y volúmenes. En épocas mas recientes Keplér tiene que resolver volúmenes de sólidos de revolución y en general la integral definida es la herramienta que uno usa cuando tiene que calcular Areas, Volúmenes velocidad, espacio, etc. Pero como historicamente el problema surgió con áreas nosotros también lo haremos con áreas.

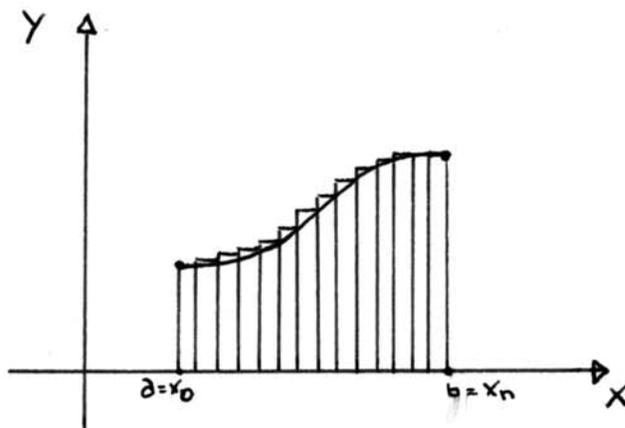
El problema que nos interesa es calcular el área de la región atrapada entre la gráfica de una función supongamos positiva en el intervalo  $[a,b]$  y el eje  $x$ :



Supongamos que no conocemos una fórmula para calcular el área  $A$  de la figura, entonces podemos calcular "aproximadamente" el área usando algunos rectángulos:

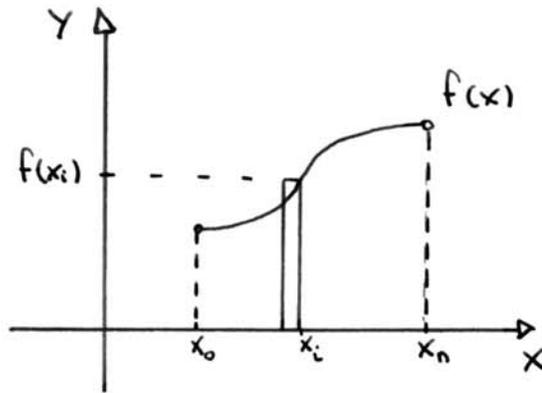


Para aproximarnos mejor podemos usar muchos más rectángulos:



Para esta última figura hemos dividido el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  segmentos iguales, la longitud de cada intervalo es  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Ya tenemos la base de cada rectángulo, las alturas de los rectángulos no son iguales, por

ejemplo la altura del último es  $h = f(x_n)$  y en general la altura del  $i$ -ésimo rectángulo es  $h_i = f(x_i)$ .



Como conocemos la base y la altura de cada rectángulo el área total es la suma de cada una de las áreas de los rectángulos: esta área es aproximadamente igual al área bajo la curva de  $f(x)$ :

$$A \approx f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_i) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

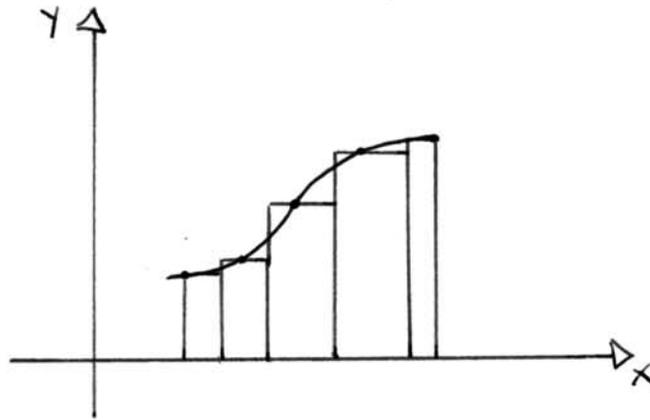
Cuando nosotros subdividimos el intervalo  $[a,b]$  hicimos lo que se llama una partición del intervalo  $[a,b]$ . Nosotros hicimos una partición en  $n$  intervalos iguales, pero la verdad es que no se necesita que sean todos iguales. Por ejemplo el primer subintervalo

$x_1 - x_0 = \Delta x_1$  y el segundo  $x_2 - x_1 = \Delta x_2$  y no tienen porque ser iguales:  $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$  y en general el intervalo  $i$ -ésimo mide  $\Delta x_i$ . Entonces el área bajo la curva de  $y = f(x)$  la podemos aproximar por

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Además tampoco es necesario que para hallar la altura de cada intervalo usemos su extremo derecho.

Podemos elegir cualquier valor  $x_i^*$  dentro del intervalo  $\Delta x_i$  y calcular su altura como  $f(x_i^*)$

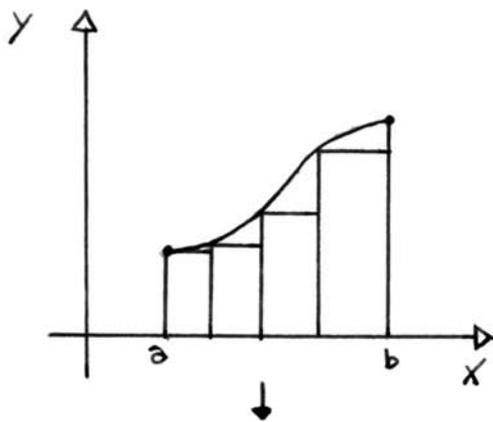


Aca vemos una partición que no divide en segmentos iguales y que las alturas estan tomadas en cualquier  $x_i^* \in \Delta x_i$ .

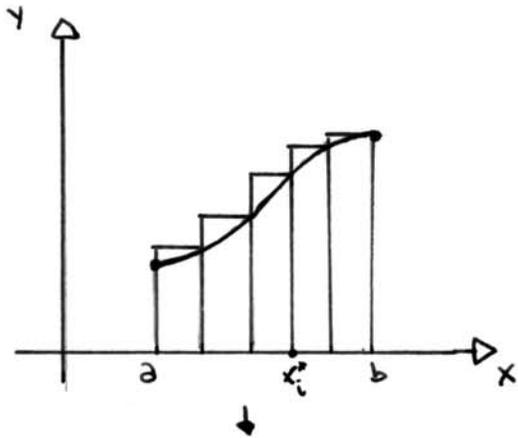
$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Estas sumas se llaman "Sumas de Riemann".

Para cada  $x_i^*$  que elijamos tenemos una suma de Riemann distinta. Habrá una que sea la más grande de todas y otra la menor.



Suma inferior:  $s$ .  
Los  $x_i^*$  son los del extremo izquierdo de cada intervalo.



Suma superior:  $S$ .  
Los  $x_i^*$  son los del extremo derecho de cada intervalo.

El área  $A$  bajo la curva debe estar entre estos 2 valores:

$$s \leq A \leq S$$

Nos damos cuenta que cuanto más numerosos sean los intervalos la suma inferior coincidirá con la superior. Los intervalos tendrán que ser más chiquitos.

Si los intervalos son tan cortos que tienden a cero entonces  $s$  es igual a  $S$  y tendremos el verdadero valor del área. Podemos decir que el área va a ser igual a cualquiera de las sumas si  $\Delta x \rightarrow 0$ : Entonces:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

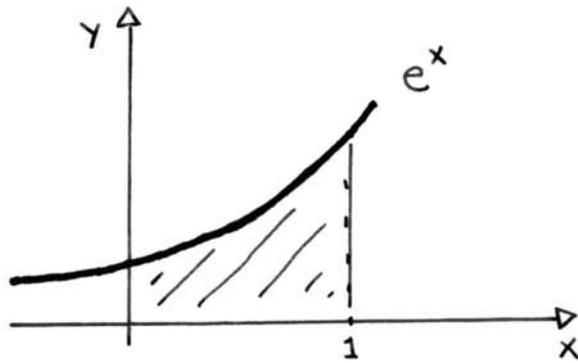
Esta fórmula es exacta y no aproximada.

Si pensamos que  $A$  es el límite de estas sumas podemos tener la definición de:

Integral definida

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Vamos a ver en un ejemplo como usar las sumas de Riemann para hallar el área bajo la curva de la función  $f(x) = e^x$  desde el valor  $x=0$  hasta el  $x=1$ :

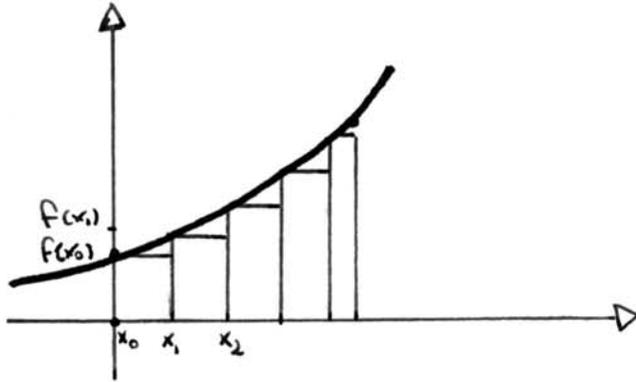


Divido el segmento  $[0, 1]$  en  $n$  partes iguales:

$$\Delta x = \frac{1}{n} \rightarrow x_0 = 0 ; x_1 = 0 + \Delta x = \frac{1}{n} ;$$

$$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{2}{n} ; \dots ; x_n = 0 + n\Delta x = \frac{n}{n} = 1 .$$

Como  $x_i^*$  tomemos los extremos izquierdos:



$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = e^0 = 1 ; x_1 = \frac{1}{n} \rightarrow f(x_1) = e^{\frac{1}{n}} = e^{\Delta x}$$

$$x_2 = 2\Delta x \rightarrow f(x_2) = e^{2\Delta x}$$

formemos la suma

$$A = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x$$

$$A = e^{x_0} \Delta x + e^{\Delta x} \cdot \Delta x + e^{2\Delta x} \cdot \Delta x + \dots + e^{(n-1)\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$A = \Delta x + e^{\Delta x} \cdot \Delta x + e^{2\Delta x} \cdot \Delta x + \dots + e^{(n-1)\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$A = \left( 1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x} \right) \Delta x$$

toda la expresión que se halla entre paréntesis es una progresión geométrica y la razón es  $e^{\Delta x}$ .

La fórmula de una progresión geométrica es:

$$\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{y } r \text{ es la razón. En nuestro problema}$$

todo queda:

$$A = \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \cdot \Delta x = (e - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

Para que esta suma  $A$  sea exacto el valor del área dijimos que teníamos que tomar el límite con  $\Delta x \rightarrow 0$

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = (e - 1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

El límite podemos resolverlo por L'Hopital y da 1

Entonces el área vale  $e - 1$ .

o podemos decir que la integral definida vale  $e^{-1}$ :

$$A = \int_0^1 e^x dx = e^{-1}$$

Podemos decir ahora que el límite de las sumas de Riemann definen integrales, y no tienen porque ser un área. Una integral definida puede dar negativa o nula, pero si el problema que tenemos que resolver es el de hallar un área, entonces si sera positiva.

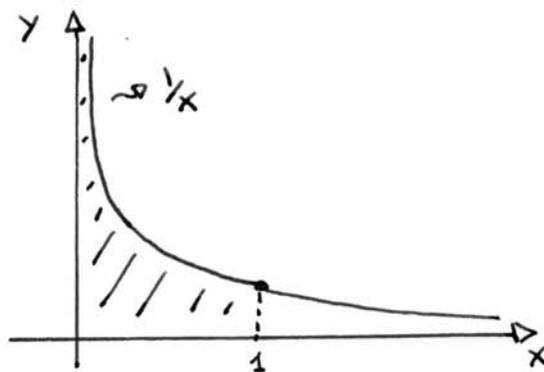
Conocemos ya las integrales definidas y su definición como el límite de una suma de Riemann.

Ahora podemos preguntarnos: ¿Qué condiciones tiene que cumplir una función  $f(x)$  para que su integral definida en el intervalo  $[a,b]$  exista?

Lo primero que tiene que ocurrir es que las sumas de Riemann tengan un límite  $L$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = L \quad \text{y } L \text{ tiene que}$$

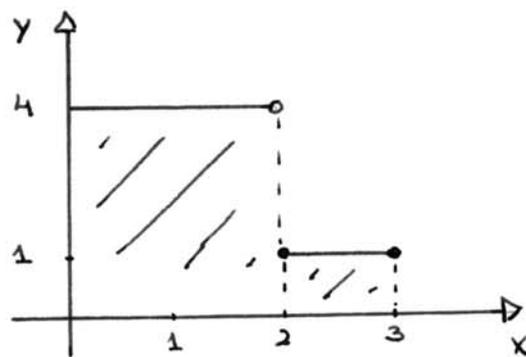
existir finito. También puede ser que la integral definida no exista, si la función  $f(x)$  no está definida en todos los valores  $x$  del intervalo, por ejemplo si  $f(x) = \frac{1}{x}$  y el intervalo es el  $[0,1]$ :



Vemos que  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  no existe, no existe finita el área porque  $f(x) = \frac{1}{x}$  no está definida y además no es "acotada" en el  $[0,1]$ .

No es necesario que  $f(x)$  sea continua para que sea integrable, claro que si es continua será automáticamente integrable. Veamos por ejemplo la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



$f(x)$  es discontinua en  $x=2$  pero acotada en  $[0,3]$  entonces  $\int_0^3 f(x)dx$  existe, el área total es la suma de cada una de las áreas de cada rectángulo. (En verdad deberíamos tomar el límite cuando  $x \rightarrow 2^-$ )

finalmente podemos decir que si  $f(x)$  es una función acotada en  $[a,b]$  y que tiene un número finito de discontinuidades en  $[a,b]$ , entonces  $f(x)$  es integrable en  $[a,b]$ .

Ahora ya sabemos cuando una función es integrable, podemos ver cuales son las propiedades mas importantes de la integral definida.

No vamos a mostrar las demostraciones de estas propiedades ya que las podés ver en cualquier libro.

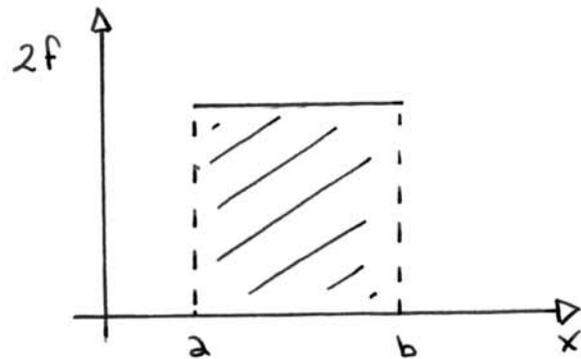
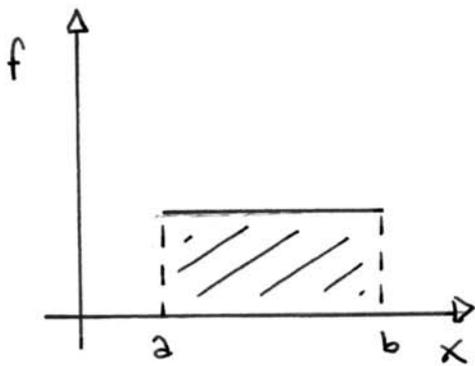
## Propiedades de la integral definida

propiedad 1: las constantes pueden salir fuera de la integral.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Para entender esta propiedad imaginemos que  $k=2$

Entonces  $k f(x)$  es  $2 f(x)$



Claramente vemos que si la función se duplica el área se duplica.

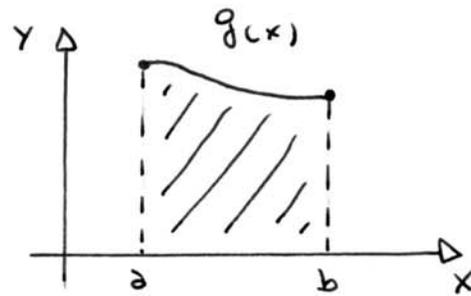
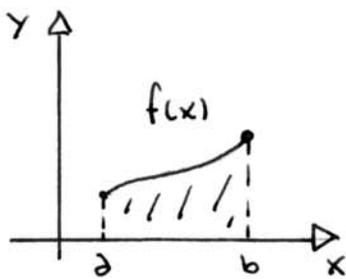
Propiedad 2: 
$$\int_a^b (f_1 + f_2) dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx$$

Esta propiedad es bastante clara: el área de dos regiones es la suma de las áreas.

Propiedad 3:

Si en el intervalo  $[a,b]$   $f(x)$  es menor o igual que otra función  $g(x)$  entonces:  $f(x) \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



El área bajo  $f(x)$  es menor al área bajo  $g(x)$ .

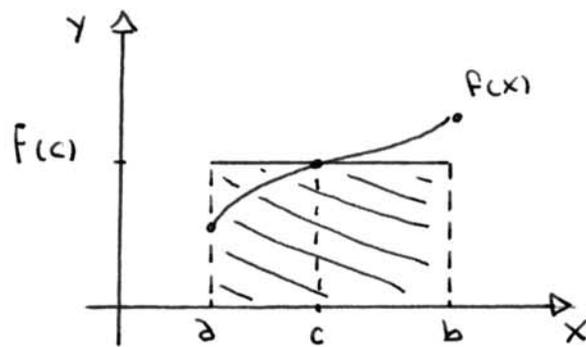
Propiedad 4: "Teorema del valor medio integral"

Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a,b]$  entonces existe un  $c \in [a,b]$  tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

Esto quiere decir que el valor del área bajo  $f(x)$  es igual al área de un "rectángulo" de base  $(b-a)$

y de altura  $f(c)$  siendo  $c$  un punto del intervalo.



Todas estas propiedades las hemos entendido pensando que la integral definida representa un área pero recordemos que la integral definida "no" tiene porque ser un área, por ejemplo puede ser el momento de inercia de un cuerpo rígido, y las propiedades son igualmente válidas.

Llegamos ahora a un punto muy importante:

¿Cómo calculamos una integral definida?

Armar una suma de Riemann y calcularle el límite es muy complicado; entonces ¿qué hacemos?

Por ejemplo como calculamos la siguiente integral

$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx$$

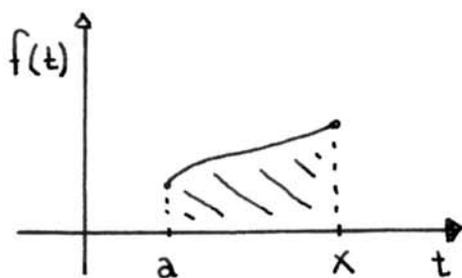
Para resolver este problema necesitamos la ayuda de el "teorema fundamental del cálculo" y la "regla de Barrow"

### Teorema fundamental del cálculo

Si el intervalo de integración es  $[a, x]$ , entonces la integral definida es una función de

$x$  :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x)$$



El área es una función de  $x$ .

El teorema nos dice que

$$F'(x) = f(x)$$

y sabemos que  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ .

Lo que dijimos recién no cambia si sumamos

una constante  $C$  :  $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$  porque

si derivamos la constante da cero.

Esta constante  $C$  es fácil de hallar: supongamos que el valor de  $x$  es  $a \Rightarrow$

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \quad ; \quad \text{pero la integral da}$$

cero: "No hay área desde  $a$  hasta  $a$ "  $\Rightarrow$

$$0 = F(a) + C \quad \rightarrow \quad -F(a) = C \quad \text{y con esto}$$

la fórmula queda: 
$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

y finalmente si elijo  $x$  igual a  $b$  tenemos la

### Regla de Barrow

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Con esta fórmula es que podemos calcular integrales definidas. Nosotros queríamos hallar

$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx \quad , \quad \text{entonces lo que tenemos}$$

que hacer es: primero buscamos una primitiva

de la función que esta dentro de la integral:

$$\int (x^2 + 2x + 1) dx = F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

y ahora la calculamos en el limite superior de la integral y en inferior:

$$F(1) = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$F(0) = 0$$

} Solo tenemos que restar estos valores:

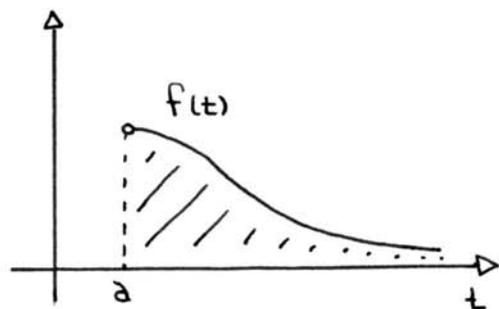
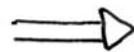
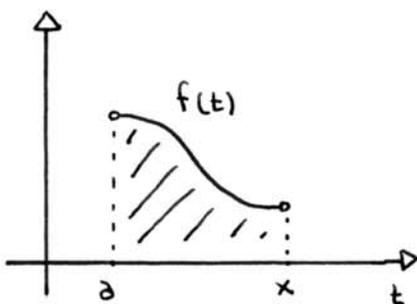
$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{7}{3} \quad \text{---}$$

Nos queda un último punto por examinar, cuando nosotros hablamos del área en función

de  $x$ :  $A(x) = \int_a^x f(t) dt$

que sucede si el valor de  $x$  es infinitamente grande

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \Rightarrow A = \int_a^{\infty} f(t) dt$$



parece que tenemos un área infinita, sin embargo si la función se pega al eje de las abscisas rápidamente, el valor del área puede ser finita. Estas integrales se llaman:

### Integrales impropias

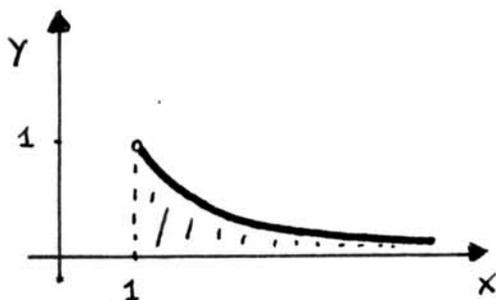
Una integral impropia tiene la forma:  $\int_a^{\infty} f(t) dt$

y para calcularla haremos:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{si este}$$

límite existe finito entonces diremos que la integral impropia converge, si no diremos que diverge.

Por ejemplo: Queremos hallar el área bajo la función  $f(x) = 1/x^2$  desde  $x=1$  hasta  $x=\infty$



Entonces planteamos la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^b$$

La barra significa que la primitiva la evaluamos primero en  $b$  y luego en  $1$ :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) \right) = 1$$

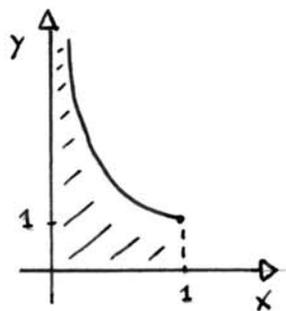
finalmente esta integral converge.

Puede pasarnos también que la integral sea impropia no porque un límite de integración tienda a infinito, sino porque la función tenga por ejemplo una asíntota vertical dentro del intervalo  $[a, b]$ :

Supongamos que queremos hallar la integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \text{vemos que la función } \frac{1}{x^2} \text{ tiene}$$

una asíntota vertical en  $x=0$

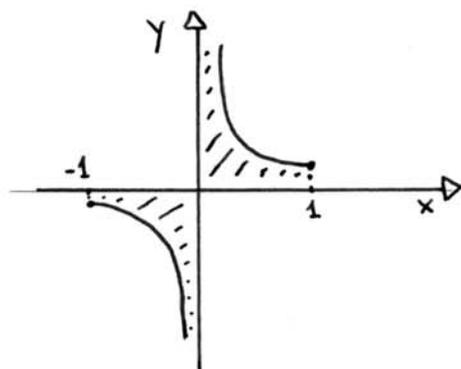


La cuenta que tendríamos que hacer es:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{1} + \frac{1}{\epsilon} \right)$$

y este límite da infinito, entonces la integral diverge.

Veamos un ejemplo más: queremos hallar  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$



Podemos comenzar por calcular 2 integrales:

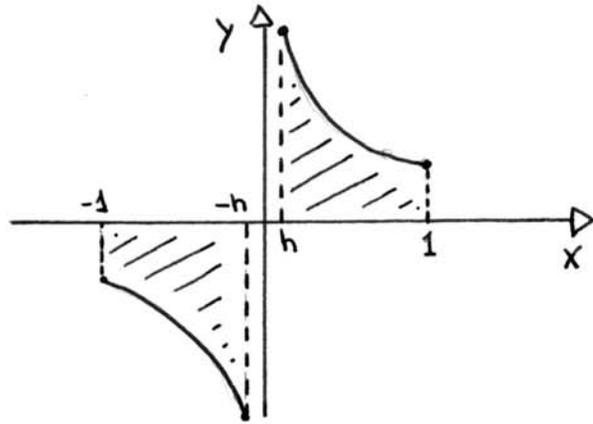
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \text{para hallar la primera}$$

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\epsilon_1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^-} \ln|x| \Big|_{-1}^{\epsilon_1} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^-} \ln|\epsilon_1| = -\infty$$

para hallar la segunda:

$$\lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon_2}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\epsilon_2}^1 = -\lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \ln \epsilon_2 = +\infty$$

y como ambas integrales divergen tenemos que decir que la integral impropia original diverge. Pero veamos otra forma de hallar esta integral:



Tomemos un mismo  $h$  a cada lado y hagamos tender a cero este valor  $h$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-h} \frac{1}{x} dx + \int_h^1 \frac{1}{x} dx \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \ln|x| \Big|_{-1}^{-h} + \ln x \Big|_h^1 \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \ln h - \ln h \right\} = 0 \quad \text{Ahora el resultado}$$

es cero. Esto se llama valor principal de Cauchy. Entonces si  $f(x)$  tiene una asíntota vertical en  $x=c$  dentro del

$[a,b]$ , el valor principal de la integral será:

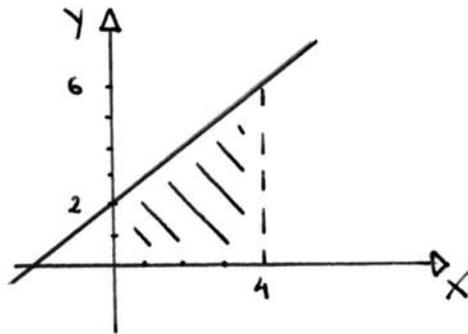
$$vp \int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-h} f(x) dx + \int_{c+h}^b f(x) dx \right\}$$

# EJERCICIOS

## EJERCICIO 1

Mediante las sumas de Riemann evaluar el área  $A$  bajo la gráfica de  $f(x) = x + 2$  en el intervalo  $[0, 4]$ .

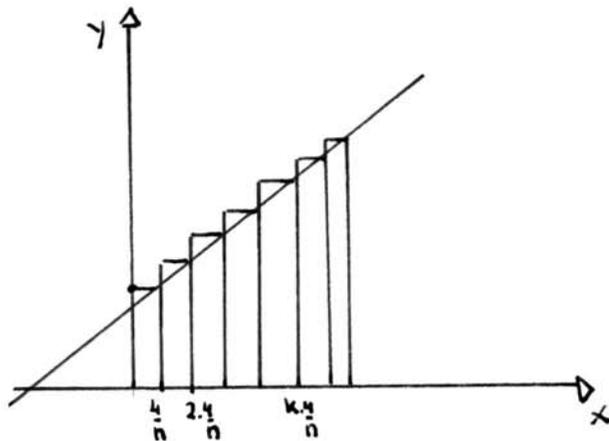
El área que nos piden es el área de un trapecio:



Si usamos  $n$  intervalos de igual amplitud, la amplitud de cada uno de ellos será:

$$\Delta x = \frac{4 - 0}{n} = \frac{4}{n} \quad \text{Entonces la suma de Riemann es:}$$

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$



Si como en la figura elegimos el  $x_i^*$  en el extremo izquierdo de cada intervalo, entonces en el primer intervalo elijo el 0; en el segundo el  $\frac{4}{n}$ ; en el tercero el  $2 \cdot \frac{4}{n}$  y en el  $k+1$ -ésimo el  $k \cdot \frac{4}{n}$

Entonces en general tendremos que las alturas de los rectángulos serán:  $f(k \cdot \frac{4}{n})$  y esto es:

$k \cdot \frac{4}{n} + 2$  y la suma de Riemann queda:

$$S = \sum_{k=1}^n \left( k \cdot \frac{4}{n} + 2 \right) \cdot \frac{4}{n} = \frac{4}{n} \left\{ \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{4}{n} + \sum_{k=1}^n 2 \right\}$$

$$S = \frac{4}{n} \left\{ \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 \right\}$$

La suma que contiene al 2 es:  $\sum_{k=1}^n 2 = 2n$  porque sería  $n$  veces sumar el 2. La segunda suma, la que tiene la  $k$ , ya no es tan fácil pero por suerte tenemos una fórmula:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{n} \left\{ \frac{4}{n} \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right\} = \frac{4}{n} \left\{ 2(n+1) + 2n \right\} \\ &= \frac{4}{n} \left\{ 4n + 2 \right\} = 16 + \frac{8}{n} \end{aligned}$$

para que esta suma nos de el área tenemos que

$$\text{tender } n \rightarrow \infty \Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 16 + \frac{8}{n} \right) = 16 .$$

El área del trapecio es entonces 16.

---

### Ejercicio 2.

Empleando la regla de Barrow hallar el área bajo la curva  $Y = X + 2$  en el intervalo  $[0, 4]$

### Solución:

El problema es el mismo que en el ejercicio 1 pero ahora para poder hallar el área usamos la integral definida:

$$A = \int_0^4 (x+2) dx$$

Para resolver esta integral primero tenemos que hallar una primitiva de la función  $Y = x + 2$  :

$$\int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x , \text{ elegí la primitiva que}$$

tiene la constante de Integración igual a cero, (siempre podemos hacer esto)

$$A = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^4 \quad \text{ahora esta cuenta la evalua-}$$

mos en el límite superior (4) y en el inferior (0)

y restamos estos valores:

$$A = \left( \frac{4^2}{2} + 2.4 \right) - \left( \frac{0^2}{2} + 2.0 \right) = 16.$$

El valor del área da lo mismo que con la suma de Riemann, como tenía que ser.

---

### Ejercicio 3.

Evaluar  $\int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2+1} dx$

### Solución:

El problema parece sencillo, buscamos una primitiva y luego aplicamos la regla de Barrow.

Empecemos entonces buscando una primitiva.

$\int x \cdot \sqrt{2x^2+1} dx$  podemos usar la sustitución:

$$2x^2 + 1 = u \rightarrow 4x dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{4x}$$

La integral queda:  $\int x \cdot \sqrt{u} \frac{du}{4x} = \frac{1}{4} \int u^{1/2} du$

Hacemos ahora esta integral:  $\frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{6} u^{3/2}$

Tenemos que volver a la variable  $x$ , entonces

Recordamos que  $u$  era  $2x^2+1 \rightarrow$  la primitiva es:

$\frac{1}{6} (2x^2+1)^{3/2}$ ; con esta primitiva usamos la

regla de Barrow:  $\frac{1}{6} (2x^2+1)^{3/2} \Big|_0^2 \rightarrow$

$$\frac{1}{6} (2 \cdot 2^2 + 1)^{3/2} - \frac{1}{6} (2 \cdot 0^2 + 1)^{3/2} = \frac{13}{3} \text{ finalmente:}$$

$$\int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2+1} dx = \frac{13}{3}$$

Ahora veamos otra manera muy útil de llegar a este mismo resultado; después de la sustitución  $2x^2+1 = u$  la integral nos quedó:

$$\frac{1}{4} \int u^{1/2} du$$
 , lo que hicimos fue integrar y

volver a la variable  $x$ ; pero podemos hacer otra cosa: No volveremos a la variable  $x$ ; en cambio usaremos otros límites de integración: los límites eran 0 y 2 para la  $x$ ; pero cuales serían para la letra  $u$ ?

Si  $x=0 \rightarrow U = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$  ; Si  $x=2 \rightarrow U = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$

Los límites para la letra  $u$  serían  $1, 9 \rightarrow$  podemos

hallar la integral  $\frac{1}{4} \int_1^9 U^{1/2} du$  y no tendremos

necesidad de volver a  $x$  ; veamos:

$$\frac{1}{4} \int_1^9 U^{1/2} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} U^{3/2} \Big|_1^9 = \left( \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} \right) \frac{1}{4} = \frac{13}{3}$$

Entonces:

$$\int_0^2 x \sqrt{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \int_1^9 U^{1/2} du = \frac{13}{3}$$

---

### Ejercicio 4.

Evaluar  $\int_1^e \ln x dx$

Solución:

Nuevamente el problema parece sencillo, buscamos una primitiva y luego aplicamos la regla de Barrow.

Ahora vamos a usar otra forma, evidentemente la integral se resuelve por el método de integración por partes, pero como influyen los límites

de integración en el método por partes?

Tenemos la siguiente fórmula:

$$\int_a^b v du = u.v \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

Usemos esta fórmula: en nuestro problema:

$$v = \ln x \quad \rightarrow \quad dv = \frac{1}{x} dx$$

$$du = dx \quad \rightarrow \quad u = x$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^e 1 \cdot dx \\ &= (e \cdot \underset{\downarrow}{1} - 1 \cdot \underset{\downarrow}{0}) - x \Big|_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_1^e \ln x \cdot dx = 1$$

Verificalo buscando directamente una primitiva y luego aplicando Barrow.

---

### Ejercicio 5.

Hallar la derivada de la función:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t^2 + t) dt$$

Solución:

Si pensamos que  $f(x)$  no es más que una integral definida, entonces podemos resolverla y luego hacer la derivación:

Una primitiva de la función integrada sería:

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \quad \text{y con esta primitiva usamos la regla de}$$

Barrow:

$$f(x) = \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x^3} = \left( \frac{(x^3)^3}{3} + \frac{(x^3)^2}{2} \right) -$$

$$\left( \frac{(x^2)^3}{3} + \frac{(x^2)^2}{2} \right) = \frac{x^9}{3} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} x^9 + \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{2} x^4 \quad \text{ahora derivamos:}$$

$$f'(x) = \frac{9}{3} x^8 + \frac{6}{6} x^5 - \frac{4}{2} x^3$$

$$f'(x) = 3x^8 + x^5 - 2x^3 \quad \therefore \quad \text{Esto fue mas}$$

o menos simple, pero puede pasarnos que encontrar la primitiva sea muy complicado; entonces podremos obtener la derivada de  $f(x)$  sin hacer la integral?

La respuesta es que sí; existe una fórmula que nos permite hacer esto: Si

$$f(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} g(t) dt \quad \text{entonces:}$$

$$f'(x) = g(V(x)) \cdot V'(x) - g(U(x)) \cdot U'(x)$$

Usemos esta fórmula a ver si llegamos a lo mismo:

en nuestro caso

$$g(t) = t^2 + t \quad ; \quad U(x) = x^2 \quad , \quad V(x) = x^3 \quad \rightarrow$$

$$f'(x) = \left( (x^3)^2 + (x^3) \right) \cdot 3x^2 - \left( (x^2)^2 + (x^2) \right) \cdot 2x$$

$$= \left( x^6 + x^3 \right) \cdot 3x^2 - \left( x^4 + x^2 \right) \cdot 2x$$

$$= 3x^8 + 3x^5 - 2x^5 - 2x^3$$

$$= 3x^8 + x^5 - 2x^3 \quad \leftarrow \text{ fue mucho mas fácil.}$$

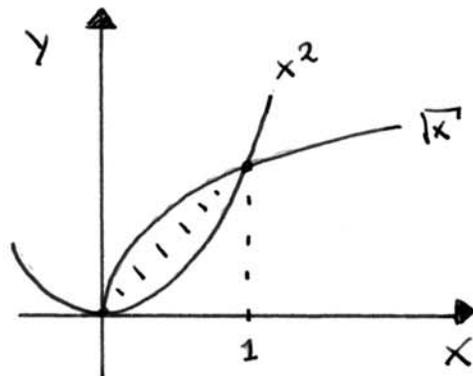
---

### Ejercicio 6.

Obtener el área de la región limitada por las gráficas de  $y = \sqrt{x}$  y  $y = x^2$

### Solución:

Comencemos dibujando ambas funciones para poder ver el área que nos piden:



Para hallar las intersecciones igualamos ambas funciones:

$$x^2 = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x^4 = x \quad \rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0$$

y las soluciones son  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$ .

Para hallar el área de una región encerrada por 2 funciones usamos la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (\text{función Superior} - \text{función inferior}) dx$$

En este problema la función superior es  $\sqrt{x}$  y

la función inferior es la parábola  $y=x^2 \rightarrow$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx - \int_0^1 x^2 dx$$

$$A = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left( \frac{2}{3} - 0 \right) - \left( \frac{1}{3} - 0 \right)$$

$$A = \frac{1}{3}$$

### Ejercicio 7.

Evaluar si es posible  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx$

Solución:

Podemos repartir la integral en otras dos integrales impropias:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$\downarrow$   
 $I_1$

$\downarrow$   
 $I_2$

Si ambas integrales,  $I_1, I_2$  convergen entonces la

integral original también converge, si alguna diverge, la original diverge.

Comencemos buscando una primitiva:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx \rightarrow \text{sustitución: } 1+e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$$

la integral queda:  $\int \frac{du}{u} = \ln u$  es decir:

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \ln(e^x+1)$$

Ahora buscamos  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{e^x+1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{e^x dx}{e^x+1} \rightarrow \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[ \ln(e^x+1) \right] \Big|_b^0 = \ln(e^0+1) - \lim_{b \rightarrow -\infty} \ln(e^b+1) \end{aligned}$$

pero  $\lim_{b \rightarrow -\infty} e^b = e^{-\infty} = 0$  con lo cual  $\ln(e^b+1) \rightarrow 0$

Asique  $I_1 = \ln(e^0+1) = \ln(2)$  converge.

Ahora tenemos que ver que pasa con  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{e^x dx}{e^x + 1} \rightarrow \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \ln(e^x + 1) \Big|_0^b \right\} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(e^b + 1) - \ln(e^0 + 1) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\infty \text{ porque } e^\infty = \infty} \end{aligned}$$

Así nos encontramos con que  $I_2$  diverge, entonces la conclusión final es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 1} \text{ diverge.}$$

---

### Ejercicio 8.

Evaluar  $\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$  ; si es posible

### Solución:

En este problema el intervalo de integración es  $[1, 5]$  y la función integranda  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{1/3}}$

tiene una discontinuidad en  $x=2$ ; que pertenece

al intervalo  $[1,5]$ . Entonces nuestra integral es una integral impropia.

Podemos separar la integral en otras dos:

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} + \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $I_1$   $I_2$

Vamos a buscar primero una primitiva:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \int (x-2)^{-1/3} dx = \frac{3}{2} (x-2)^{2/3}$$

Ahora buscamos  $I_1$ :

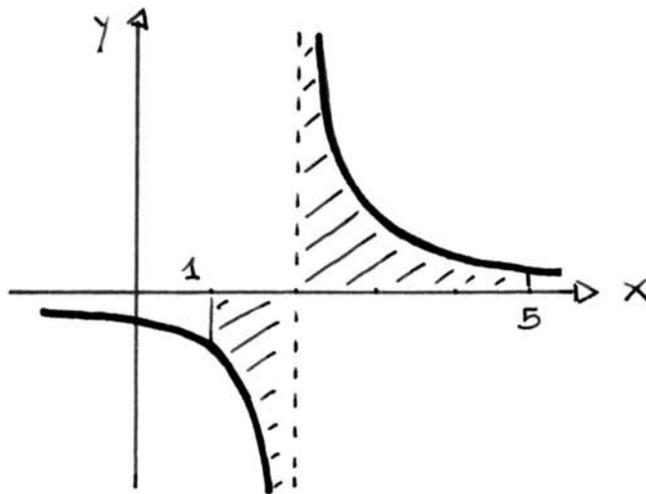
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 (x-2)^{-1/3} dx = \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_1^b (x-2)^{-1/3} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow 2^-} \left. \frac{3}{2} (x-2)^{2/3} \right|_1^b = \frac{3}{2} \left\{ \lim_{b \rightarrow 2^-} (b-2)^{2/3} - (-1)^{2/3} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \{ 0 - 1 \} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$I_1$  es convergente; ahora vamos a calcular  $I_2$ .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_2^5 (x-2)^{-1/3} dx = \lim_{b \rightarrow 2^+} \int_b^5 (x-2)^{-1/3} dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow 2^+} \left. \frac{3}{2} (x-2)^{2/3} \right|_b^5 = \frac{3}{2} \left( 3^{2/3} - \lim_{b \rightarrow 2^+} (b-2)^{2/3} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot 3^{2/3} = \frac{3^{5/3}}{2}
 \end{aligned}$$

Como  $I_2$  también converge  $\rightarrow$  la integral original converge y su valor es:  $-\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx \underline{1,62}$

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} \approx \boxed{1,62}$$



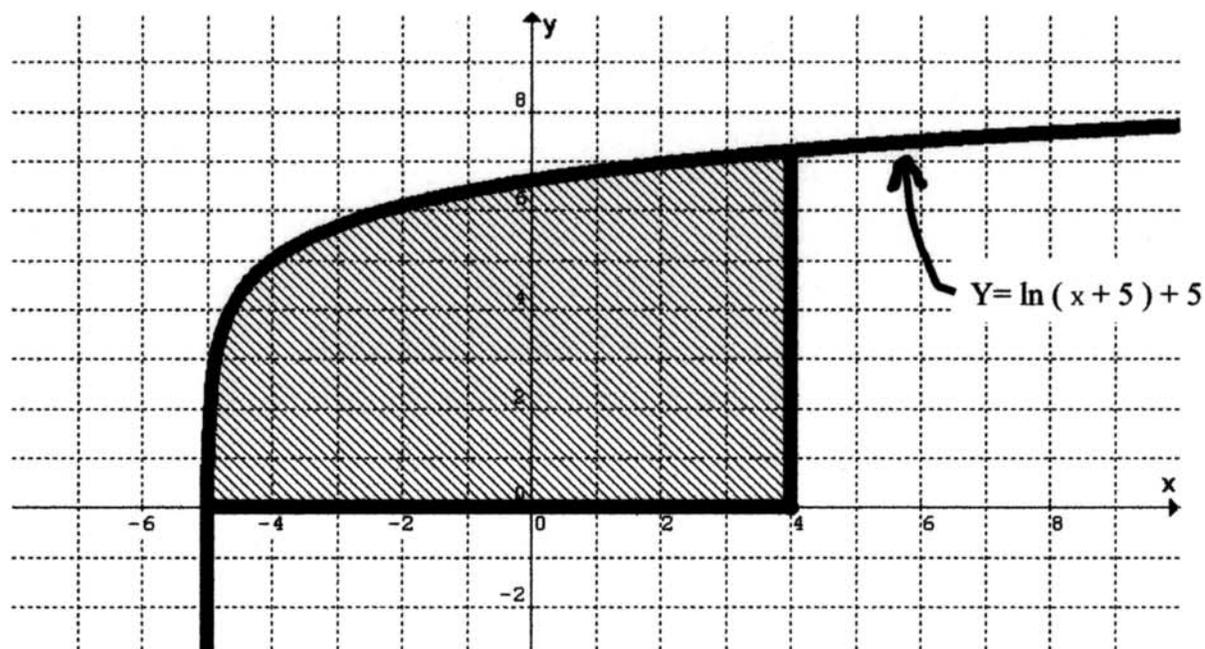
El valor hallado NO corresponde al área sombreada.

El área sería:  $|-3/2| + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 4,62$  --

# INTEGRALES.

## EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

---



ANÁLISIS MATEMÁTICO (28) Segundo Parcial

**ASIMOV**

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRES:

D.N.I.:

1	2	3	4	NOTA
M	R	X	R	2 (dos)

NOTA PARCIAL

INSCRIPTO EN:

SEDE 10 DIAS MARTES / miércoles

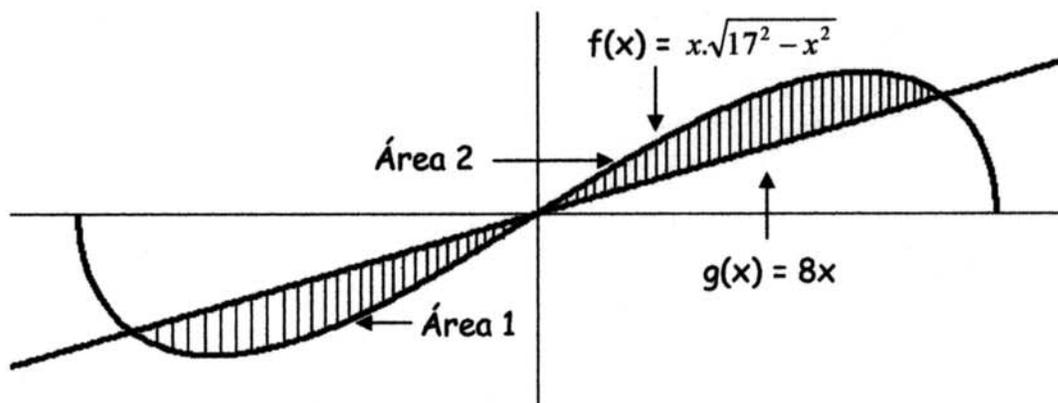
HORARIO 07:00 / 10:00 AULA 30

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

2. Calcular el área de la región limitada por el gráfico de  $f(x) = x\sqrt{17^2 - x^2}$  y la recta  $g(x) = 8x$ .

### Ejercicio 2

Éste es un ejercicio de áreas. Vamos a tener que calcular una integral. Pero antes de eso, veamos un gráfico de las funciones así sabemos qué cuentas hay que hacer.



Vemos que el área se divide en dos partes: Área 1 y Área 2. A ojo, parece que las dos áreas son iguales. Bueno, lo demostramos así podemos calcular una sola y multiplicar por dos (hacemos la mitad de cuentas).

¿Te acordás qué es una función impar? Rta: Es una función que cumple que  $f(x) = -f(-x)$ . En el gráfico, esto significaba que es simétrica respecto del centro de coordenadas.

Bueno, fijate que las dos funciones son impares  $\Rightarrow$  el gráfico es simétrico  $\Rightarrow$  las dos áreas son iguales.

$$\Rightarrow \text{Área} = 2 \cdot \text{Área 1}$$

La fórmula para calcular el área entre dos funciones es

$$\text{Área} = \int_a^b \text{techo} - \text{piso}$$

a y b son los límites de integración. En algunos problemas te dicen que tomes x entre dos valores. Como acá no nos dicen nada, los límites de integración van a ser

los puntos donde se cruzan las curvas. Los calculamos igualándolas:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x\sqrt{17^2 - x^2} = 8x$$

OJO: si  $x$  vale 0, no puedo tachar las  $x$ . Entonces, hay que ver por separado el caso en que  $x = 0 \Rightarrow$  las dos funciones son iguales. Ahora sí podemos tachar:

$$\sqrt{17^2 - x^2} = 8 \Rightarrow 17^2 - x^2 = 8^2 \Rightarrow x^2 = 17^2 - 8^2 = 225$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{225} = 15$$

$$\Rightarrow x = 15 \quad \text{ó} \quad x = -15$$

Como solamente vamos a calcular la primera área, tomamos  $a = -15$  y  $b = 0$ .

En el Área 1,  $g(x) > f(x) \Rightarrow g(x)$  es el techo y  $f(x)$  es el piso. Nos queda:

$$\text{Área 1} = \int_{-15}^0 \text{techo} - \text{piso} = \int_{-15}^0 g(x) - f(x) dx = \int_{-15}^0 8x - x\sqrt{17^2 - x^2} dx$$

Tenemos la integral de una resta. La podemos separar:

$$\int_{-15}^0 8x - x\sqrt{17^2 - x^2} dx = \int_{-15}^0 8x dx - \int_{-15}^0 x\sqrt{17^2 - x^2} dx$$

La primera integral es la más fácil. La calculamos directo:

$$\int_{-15}^0 8x dx = 8 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-15}^{x=0} = 4x^2 \Big|_{x=-15}^{x=0}$$

La segunda integral la podemos calcular haciendo una sustitución.

Tomamos  $u = 17^2 - x^2 \Rightarrow du = u' \cdot dx = -2x \cdot dx$ . Nos queda así:

$$\int_{-15}^0 x\sqrt{17^2 - x^2} dx = \int_{-15}^0 -\frac{1}{2}(-2x)\sqrt{17^2 - x^2} dx = \int_{-15}^0 -\frac{1}{2}\sqrt{u} du$$

Esto lo sabemos calcular.

$$\int_{-15}^0 -\frac{1}{2}\sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_{x=-15}^{x=0} = -\frac{1}{3} \cdot (17^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{x=-15}^{x=0}$$

Entonces, el Área 1 nos queda

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= 4x^2 \Big|_{x=-15}^{x=0} - \left[ -\frac{1}{3} \cdot (17^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{x=-15}^{x=0} \right] \\ &= \left[ [4 \cdot 0^2] - [4 \cdot (-15)^2] \right] - \left[ \left[ -\frac{1}{3} \cdot (17^2 - 0^2)^{3/2} \right] - \left[ -\frac{1}{3} \cdot (17^2 - (-15)^2)^{3/2} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Área 1} = 567$$

El Área total la calculamos como:

$$\text{Área} = 2 \cdot \text{Área 1} = 2 \cdot 567 = 1.134$$

$\Rightarrow$  El área entre las funciones es 1.134

3. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable tal que  $\int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx = 10$ . Calcular  $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx$ , sabiendo que  $f(1) = 14$ ,  $f(2) = 8$ .

**Ejercicio 3** Nos piden calcular:  $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx$ .

No sabemos cuál es la función, pero nos dan algunos datos. Por los datos que nos dan, parece que tenemos que calcular esto integrando por partes.

¿Te acordás como se hace?. La formula es así:

$$\int_a^b u \cdot v' dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u' \cdot v dx$$

Tenemos que escribir el integrando como un producto de dos funciones: una que sepamos integrar y otra que sepamos derivar. Nos dan datos sobre la derivada de  $f$ ; entonces tomamos  $f(2x) = u$ , y  $x^{-3} = v'$ . Entonces nos queda.

$$u = f(2x) \Rightarrow u' = [f(2x)]' = f'(2x) \cdot 2$$

$$v' = x^{-3} \Rightarrow v = \int v' = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2}$$

Ahora podemos calcular la integral:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx &= \int_{1/2}^1 f(2x) \cdot x^{-3} dx = \\ &= f(2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right) \Big|_{x=1/2}^{x=1} - \int_{1/2}^1 f'(2x) \cdot 2 \cdot x^{-3} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f(2x)}{x^2} \Big|_{x=1/2}^{x=1} - 2 \cdot \int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^3} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{f(2 \cdot 1)}{1^2} - \frac{f(2 \cdot 1/2)}{(1/2)^2} \right] + 2 \cdot \int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}[f(2)-4f(1)] + \int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx$$

Estos datos los tenemos. Nos dicen que  $f(2) = 8$ ;  $f(1) = 14$  y  $\int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx = 10$

Entonces, la integral nos queda:

$$\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx = -\frac{1}{2}[f(2)-4f(1)] + \int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx = -\frac{1}{2}[8-4 \cdot 14] + 10$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx = 34$$

D ANALISIS MATEMATICO (28) Segundo Parcial

**ASIMOV**

TEMA 3

APELLIDO Y NOMBRES: \_\_\_\_\_

D.N.I: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	NOTA

NOTA PRIMERA PARCIAL

INSCRIPTO EN: \_\_\_\_\_  
SEDE \_\_\_\_\_ DIAS \_\_\_\_\_

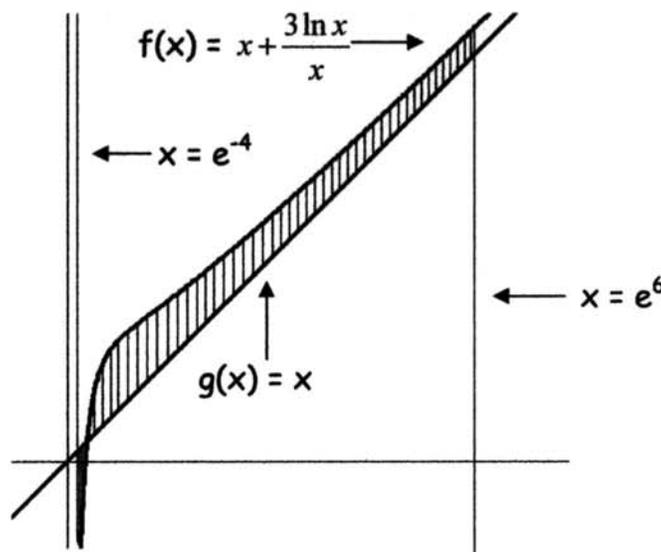
HORARIO \_\_\_\_\_ AULA \_\_\_\_\_

**En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta**

2. Dadas  $f(x) = x + \frac{3 \ln(x)}{x}$  y  $g(x) = x$ , calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de  $f$  y  $g$  para  $x \in [e^{-4}; e^6]$ .

### Ejercicio 2.

Nos piden que calculemos el área entre  $x = e^{-4}$  y  $x = e^6$ . Esto es porque las curvas se cortan una sola vez. Entonces, no existe un "área entre las curvas". Nos tienen que decir de dónde a dónde calcular el área. Fíjate en el gráfico:



Vemos que el área está dividida en dos partes. Se dividen donde se cruzan las funciones. Este punto lo averiguamos igualándolas, y despejando  $x$ :

$$x + \frac{3 \ln x}{x} = x \Rightarrow \frac{3 \ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Entonces tenemos dos regiones: una entre  $e^{-4}$  y 1; y otra entre 1 y  $e^6$ . Para calcular el área, necesitamos saber cuál de las dos funciones es más grande. En la primera parte,  $g(x)$  está por arriba de  $f(x) \Rightarrow g$  es el techo y  $f$  es el piso. En la segunda parte, es al revés. El área total la calculamos como la suma de las dos áreas:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{e^{-4}}^1 g(x) - f(x) dx + \int_1^{e^6} f(x) - g(x) dx = \\ &= \int_{e^{-4}}^1 x - \left( x + \frac{3 \ln x}{x} \right) dx + \int_1^{e^6} x + \frac{3 \ln x}{x} - x dx = \\ &= - \int_{e^{-4}}^1 \frac{3 \ln x}{x} dx + \int_1^{e^6} \frac{3 \ln x}{x} dx \end{aligned}$$

La integral que hay que calcular la misma. Entonces, calcular la integral indefinida, y después la definimos en cada caso.

$$\int 3 \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \text{Podemos hacer la sustitución } u = \ln(x) \Rightarrow du = u' \cdot dx = 1/x \cdot dx$$

$$\int 3 \frac{\ln x}{x} dx = \int 3u du = 3 \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int 3 \frac{\ln x}{x} dx = 3 (\ln x)^2$$

Ahora podemos calcular el área:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= - \int_{e^{-4}}^1 \frac{3 \ln x}{x} dx + \int_1^{e^6} \frac{3 \ln x}{x} dx = - \left[ \frac{3}{2} (\ln x)^2 \right]_{x=e^{-4}}^{x=1} + \frac{3}{2} (\ln x)^2 \Big|_{x=1}^{x=e^6} \\ &= - \left[ \left( \frac{3}{2} (\ln 1)^2 \right) - \left( \frac{3}{2} (\ln e^{-4})^2 \right) \right] + \left[ \left( \frac{3}{2} (\ln e^6)^2 \right) - \left( \frac{3}{2} (\ln 1)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$= -\left[\left(\frac{3}{2} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot (-4)^2\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2} \cdot 6^2\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0^2\right)\right]$$

$$= 24 + 54 = 78 \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = 78$$

3. Hallar  $f$  derivable tal que  $f(0) = 1$  y  $\frac{f'(t) - f(t)}{e^t} = 4te^{3t}$ .

Sugerencia:  $\left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' = \frac{f'(t) - f(t)}{e^t}$ .

### Ejercicio 3.

Nos dan el valor de la función en un punto, y el otro dato es que :

$$\frac{f'(t) - f(t)}{e^t} = \left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' = 4t \cdot e^{3t}$$

¿Cómo hacemos para calcular  $f$ ? Mirá: nos dan la derivada de  $\frac{f(t)}{e^t}$ .

Si integramos esto, y pasamos multiplicando  $e^t$ , nos queda  $f(t)$ . Entonces:

$$\frac{f(t)}{e^t} = \int \left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' dt = \int 4te^{3t} dt$$

¿Cómo integramos esto? No podemos hacer ninguna sustitución. Entonces, la única posibilidad que nos queda es integrar por partes. Tomamos:

$$u = 4t \Rightarrow u' = 4$$

$$v' = e^{3t} \Rightarrow v = \int v' = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3} \cdot e^{3t}$$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$\int 4te^{3t} dt = 4t \cdot \frac{1}{3} e^{3t} - \int 4 \cdot \frac{1}{3} e^{3t} dt$$

$$\frac{f(t)}{e^t} = \frac{4}{3} e^{3t} - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3t} + C\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = e^t \left(\frac{8}{9} e^{3t} - C\right) \Rightarrow f(t) = \frac{8}{9} \cdot e^{4t} - C \cdot e^t$$

Como calculamos una integral indefinida, nos quedó una constante  $C$ . ¿Cómo la calculamos? Para eso tenemos que usar el dato de que  $f(0) = 1$ .



$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_b^{1/2} 0 - \frac{2x-1}{3x+1} dx + \int_{1/2}^a \frac{2x-1}{3x+1} - 0 dx \\ &= - \int_b^{1/2} \frac{2x-1}{3x+1} dx + \int_{1/2}^a \frac{2x-1}{3x+1} dx\end{aligned}$$

Como la integral es la misma en los dos casos, calculamos la integral indefinida y después la definimos en cada caso, así integramos una sola vez:

$$\int \frac{2x-1}{3x+1} dx = \int (2x-1) \cdot (3x+1)^{-1} \Rightarrow \text{solamente podemos integrar por partes}$$

Tomamos  $\Rightarrow u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2$

$$\Rightarrow v' = (3x+1)^{-1} \Rightarrow v = \int v' = \int (3x+1)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+1)$$

$$\int uv' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$\int (2x-1) \cdot (3x+1)^{-1} = (2x-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+1) - \int 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+1) dx$$

Para calcular la segunda integral, tenemos que hacer una sustitución:

$$u = 3x + 1 \Rightarrow du = u' \cdot dx = 3 dx.$$

$$\int \frac{2}{3} \cdot \ln(3x+1) dx = \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln(3x+1) \cdot 3 dx = \int \frac{2}{9} \cdot \ln(u) du.$$

¿Te acordás como era la integral del logaritmo?. Nos da así:

$$\int \frac{2}{9} \cdot \ln(u) du = \frac{2}{9} \cdot [\ln(u) \cdot u - u] = \frac{2}{9} \cdot [\ln(3x+1) \cdot (3x+1) - (3x+1)]$$

La integral nos queda:

$$\int (2x-1) \cdot (3x+1)^{-1} = (2x-1) \cdot \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{2}{9} \cdot [\ln(3x+1) \cdot (3x+1) - (3x+1)]$$

Ahora reemplazamos esto en el cálculo del Área

$$\text{Área} = - \int_b^{1/2} \frac{2x-1}{3x+1} dx + \int_{1/2}^a \frac{2x-1}{3x+1} dx =$$

Como las cuentas son muy largas, vamos a calcular las dos áreas por separado.

$$\begin{aligned}\text{Área 1} &= - \int_b^{1/2} \frac{2x-1}{3x+1} dx = - \left[ (2x-1) \cdot \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{2}{9} \cdot [\ln(3x+1) \cdot (3x+1) - (3x+1)] \right]_{x=0}^{x=1/2} = \\ &= - \left[ \left( 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \frac{\ln(3 \cdot \frac{1}{2} + 1)}{3} - \frac{2}{9} \cdot \left[ \ln\left( 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \left( 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \right] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ (2 \cdot 0 - 1) \cdot \frac{\ln(3 \cdot 0 + 1)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(3 \cdot 0 + 1) \cdot (3 \cdot 0 + 1) - (3 \cdot 0 + 1)] \right] \\
= & - \left[ 0 \cdot \frac{\ln(5/2)}{3} - \frac{2}{9} \left[ \ln\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \right] \right] + \left[ (-1) \cdot \frac{\ln(1)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(1) \cdot 1 - 1] \right] = \\
= & \left[ \frac{2}{9} \cdot \ln(5/2) \cdot \frac{5}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{2} \right] + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} \cdot \ln(5/2) - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Que cuenta larga, no?. Bueno, ahora lo mismo para la segunda parte:

$$\begin{aligned}
\text{Área 2} &= \int_{1/2}^3 \frac{2x-1}{3x+1} dx = \left[ (2x-1) \cdot \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(3x+1) \cdot (3x+1) - (3x+1)] \right]_{x=1/2}^{x=3} = \\
&= \left[ (2 \cdot 3 - 1) \cdot \frac{\ln(3 \cdot 3 + 1)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(3 \cdot 3 + 1) \cdot (3 \cdot 3 + 1) - (3 \cdot 3 + 1)] \right] - \\
&\quad \left[ (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) \cdot \frac{\ln(3 \cdot \frac{1}{2} + 1)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(3 \cdot \frac{1}{2} + 1) \cdot (3 \cdot \frac{1}{2} + 1) - (3 \cdot \frac{1}{2} + 1)] \right] \\
&= \left[ 5 \cdot \frac{\ln(10)}{3} - \frac{2}{9} [\ln(10) \cdot 10 - 10] \right] - \left[ 0 \cdot \frac{\ln(5/2)}{3} - \frac{2}{9} \left[ \ln(5/2) \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \right] \right] = \\
&= \frac{5}{3} \cdot \ln(10) - \frac{20}{9} \cdot \ln(10) + 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ln(5/2) - \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{2} = \\
&= \ln(10) \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{20}{9} \right) + \frac{20}{9} - \frac{5}{9} + \frac{5}{9} \cdot \ln(5/2) = \\
&= \left( -\frac{5}{9} \right) \ln(10) + \frac{5}{9} \cdot \ln(5/2) + \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Veamos cómo nos queda el área total:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \text{Área 1} + \text{Área 2} = \\
&= \frac{5}{9} \cdot \ln(5/2) - \frac{1}{3} + \left( -\frac{5}{9} \right) \ln(10) + \frac{5}{9} \cdot \ln(5/2) + \frac{5}{3} = \\
&= \frac{4}{3} + \frac{10}{9} \cdot \ln(5/2) - \frac{5}{9} \cdot \ln(10) \cong 1,07 \\
&\Rightarrow \text{El área es } 1,07 \text{ aproximadamente}
\end{aligned}$$

**Nota:** en ejercicios como este, muy largos, no hay problema si te equivocas en un signo o en alguna cuenta. Lo importante es que esté bien planteado.

3. Hallar  $G(x)$  tal que  $G(\frac{2}{3\pi}) = 3$  y  $G'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \text{sen}(\frac{2}{x})$  para  $x > 0$ .

### Ejercicio 3.

Nos dan la derivada de la función. Si queremos encontrar la función original, tengo que integrar :

$$G'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow G(x) = \int \frac{1}{x^3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) dx$$

¿Como integramos esto?. No parece que salga ni con una sustitución ni por partes. Pero podemos hacer un cambio de variable para que quede más pasable:

$$u = 1/x \Rightarrow du = u' \cdot dx = -1/x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2}{x}\right) dx = \int -\frac{1}{x^2} \cdot -\frac{1}{x} \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) dx = \int -u \cdot \text{sen}(2u) du$$

No la pudimos calcular, pero quedó algo más fácil. Ahora podemos integrar esto por partes. Tomamos:

$$f = -u \Rightarrow f' = -1 \quad y$$

$$v' = \text{sen}(2u) \Rightarrow v = \int v' = \int \text{sen}(2u) du = -1/2 \cdot \cos(2u)$$

$$\int f \cdot v' = f \cdot v - \int f' \cdot v$$

$$\begin{aligned} \int -u \cdot \text{sen}(2u) du &= (-u) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2u)\right) - \int (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2u)\right) du = \\ &= \frac{1}{2} u \cdot \cos(2u) - \int \frac{1}{2} \cos(2u) = \frac{1}{2} u \cdot \cos(2u) - \frac{1}{4} \text{sen}(2u) + C. \end{aligned}$$

Ahora volvemos a la variable original, y tenemos la función:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u \cdot \cos(2u) - \frac{1}{4} \text{sen}(2u) + C &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4} \text{sen}\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) + C \\ \Rightarrow G(x) &= \frac{\cos(2/x)}{2x} - \frac{1}{4} \text{sen}(2/x) + C \end{aligned}$$

¿Y la constante  $C$ ? Apareció porque calculamos una integral indefinida. Para calcularla, tenemos que usar el dato de que  $G(2/(3\pi)) = 3$

$$G(2/(3\pi)) = \frac{\cos\left(\frac{2}{2/3\pi}\right)}{2 \cdot \frac{2}{3\pi}} - \frac{1}{4} \text{sen}\left(\frac{2}{2/3\pi}\right) + C = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} \cos(3\pi) - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(3\pi) + C = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot 0 + C = 3 \Rightarrow C = 3 + \frac{3}{4} \cdot \pi$$

La función nos queda:

$$G(x) = \frac{\cos(2/x)}{2x} - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2/x) + 3 - \frac{3}{4} \cdot \pi$$

B. ANALISIS MATEMATICO (28) Segundo Parcial

**ASIMOV**

TEMA 3

APPELLIDO Y NOMBRES: \_\_\_\_\_

D.N.I: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN: \_\_\_\_\_

SEDE: \_\_\_\_\_

DIAS: \_\_\_\_\_

PRÁCTIC

HORARIO: \_\_\_\_\_

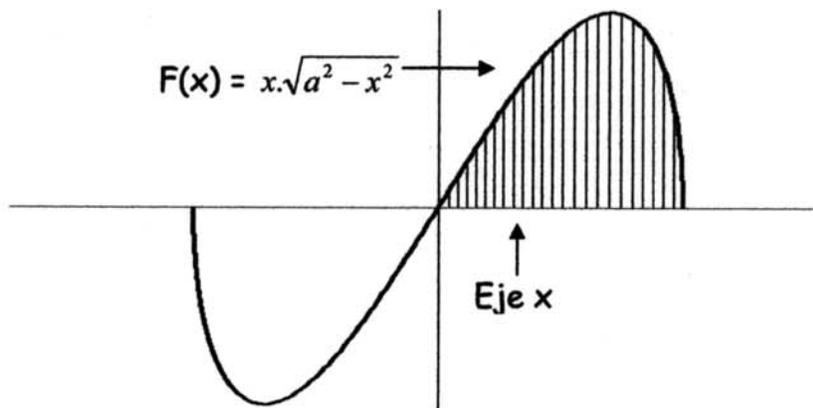
AULA: \_\_\_\_\_

**En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta**

2. Considere la región del primer cuadrante limitada por la curva  $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$  y el eje  $x$ . Hallar todos los  $a > 0$  para los cuales el área de la región es mayor que 9.

### EJERCICIO 2

Sin importar cuánto vale  $a$ , el gráfico de la función tiene esta forma:



Como solamente nos hablan del área del primer cuadrante, calculamos el área rayada. Fíjate que el eje  $x$  ( $y = 0$ ) es el piso, y la función  $f(x)$  es el techo. Para poder plantear la integral, necesitamos saber dónde se cortan  $f(x)$  y el eje  $x$ . Para eso, los igualamos y resolvemos la ecuación:

$$x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow a^2 = x^2 \Rightarrow |x| = |a|$$

Como nos dicen que  $a$  es positivo y  $x$  también (todos los puntos del primer cuadrante tienen abscisa positiva), los puntos son  $x = 0$  y  $x = a$ .

Entonces, el área la calculamos como:

$$\text{Área} = \int_0^a \text{techo} - \text{piso} = \int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Esta integral la podemos calcular haciendo una sustitución:

$$u = a^2 - x^2 \Rightarrow du = u' \cdot dx = -2x dx$$

$$\int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^a \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{x=a} \sqrt{u} du$$

Llegamos a una integral que podemos calcular directamente. Nos queda:

$$-\frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{x=a} \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Rightarrow \text{Área} = -\frac{1}{3} \cdot (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \left[ -\frac{1}{3} \cdot (a^2 - a^2)^{3/2} \right] - \left[ -\frac{1}{3} \cdot (a^2 - 0^2)^{3/2} \right] = \frac{1}{3} \cdot a^3$$

Nos tendría que haber quedado  $|a|^3$ , pero como  $a$  es positivo, sacamos el módulo

Obviamente, el área nos quedó dependiendo de  $a$ . Nos piden los valores de  $a$  para los que esta área es menor a 9. Entonces tenemos que calcular:

$$\frac{1}{3} \cdot a^3 > 9 \Rightarrow a^3 > 9 \cdot 3 \Rightarrow a > \sqrt[3]{27} \Rightarrow a > 3$$

$\Rightarrow$  El área es mayor a 9, cuando  $a$  es mayor a 3

3. Demostrar que la función  $F(x) = \int_{x^2}^{3x^2} t \operatorname{sen}(t^4) dt + \int_0^{\pi/3} t \operatorname{cos}(3t) dt$  es constante.  
Calcular el valor de dicha constante.

### Ejercicio 3.

Tenemos la función  $F(x) = \int_{x^2}^{3x^2} t \operatorname{sen}(t^4) + \int_0^{\pi/3} t \operatorname{cos}(3t) dt$  y queremos ver si es constante (en el enunciado dicen que sí, pero hay que demostrarlo).

El truco para este ejercicio es que la primera integral vale 0. No importa lo que hay en el integrando, si los dos límites de integración son iguales, el resultado es 0.

Entonces nos queda:

$$F(x) = 0 + \int_0^{\pi/3} t \cos(3t) dt = \int_0^{\pi/3} t \cos(3t) dt$$

Esta integral nos da un número, que no depende de  $x \Rightarrow F(x)$  es constante  
 Esa constante es, justamente, el valor de la integral. ¿Cómo la calculamos?  
 No podemos hacer ninguna sustitución que sirva  $\Rightarrow$  usamos el otro método:  
 integramos por partes. Para esto, tomamos:

$$u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos(3t) \Rightarrow v = \int v' = \int \cos(3t) dt = 1/3 \cdot \text{sen}(3t)$$

$$\int_a^b u \cdot v' = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u' \cdot v$$

$$\int_0^{\pi/3} t \cdot \cos(3t) dt = t \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3t) \Big|_{t=0}^{t=\pi/3} - \int_0^{\pi/3} 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3t) dt$$

$$= t \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3t) \Big|_{t=0}^{t=\pi/3} - \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(3t) \right) \Big|_0^{\pi/3}$$

$$\Rightarrow \int t \cdot \cos(3t) dt = t \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3t) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3t) \Big|_{t=0}^{t=\pi/3}$$

$$= \left[ \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{9} \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right] - \left[ 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(3 \cdot 0) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3 \cdot 0) \right] =$$

$$= 0 + 1/9 \cdot (-1) - [0 + 1/9 \cdot 1] = -2/9$$

La función nos queda:

$$F(x) = \int_0^{\pi/3} t \cdot \cos(3t) dt = -2/9$$

# SUCESIONES Y SERIES

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

# SUCESIONES y SERIES

Sucesión. definición. Convergencia. Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas. El número e. Definición de serie numérica. Ejemplos. Convergencia de una serie. Propiedades de las series convergentes. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Serie geométrica. Serie armónica. Criterios de convergencia para series de términos no negativos: comparación, de la raíz, del cociente, de la integral. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Teorema de Leibniz. Series funcionales. Series de potencias. Serie de Taylor de una función. Operaciones con series de potencias. Aplicaciones al cálculo del número e y logaritmos.

---

## Definición de sucesión:

Si a cada entero  $n$  está asociado un número real  $a_n$ , entonces, el conjunto ordenado:

$$\boxed{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots}$$

define una sucesión.

Se puede pensar, también, a una sucesión como una función cuyo dominio son los enteros. La imagen del entero  $n$  es  $a_n$ , el término  $n$ -ésimo de la sucesión.

Una forma de definir una sucesión es a través de la fórmula para obtener sus términos. Por ejemplo:

$$\left\{ a_n = \frac{1}{n} \right\} \text{ es la sucesión: } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

## Convergencia:

Una sucesión  $\{a_n\}$  tiene límite  $L$  si para cada  $\epsilon$ , perteneciente a los reales positivos, existe un

$N$  positivo (que en general dependerá de  $\epsilon$ ) tal que:

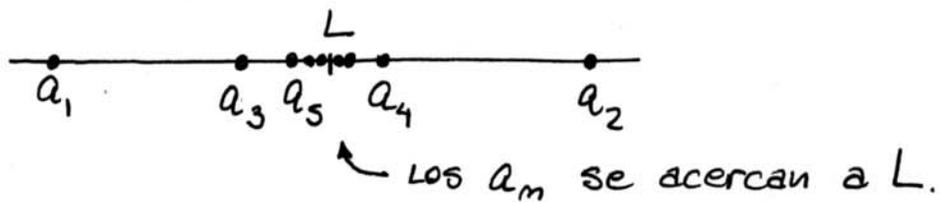
$$|a_m - L| < \epsilon \text{ para todo } m \geq N$$

En ese caso decimos que la sucesión converge a  $L$  y lo escribimos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = L \quad \text{ó} \quad a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L$$

Esto significa que los valores de  $a_m$  se van acercando tanto a  $L$  que siempre voy a encontrar un  $N$  a partir del cual la distancia de  $a_m$ , para  $m \geq N$ , a  $L$  sea menor a  $\epsilon$  (por más chico que elija el  $\epsilon$ ).

Gráficamente:



Una sucesión que no converge se llama divergente.

Esto puede pasar por dos razones:

- Los términos de la sucesión crecen indefinidamente, tendiendo a  $+\infty$  o  $-\infty$ . (Ej:  $a_m = m$ )
- Los términos toman valores alternados, haciendo que la sucesión oscile sin tender a ningún valor ( $a_m = (-1)^m \Rightarrow 1, -1, 1, -1, \dots$  oscila).

### Sucesiones monótonas:

- Una sucesión es creciente si:  $a_n \leq a_{n+1}$   
para todo  $n \geq 1$   
(Fácil, los términos van aumentando su valor a medida que  $n$  crece)
- Una sucesión es decreciente si:  $a_n \geq a_{n+1}$   
para todo  $n \geq 1$ .

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

### Sucesiones acotadas:

Una sucesión  $\{a_n\}$  es acotada si existe un número positivo  $M$  tal que  $|a_n| \leq M$  para todo  $n$ .  
(O sea, cualquier término de la sucesión que se me ocurra agarrar va a ser menor a  $M$ ).

Teorema: Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Entonces, con este teorema podés decidir si una sucesión monótona converge o no viendo si encontrás alguna cota para sus términos.

Ejemplo:  $\{a_n = \frac{1}{n}\}$  es decreciente  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$   
y también es acotada porque como  $n \geq 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{n} \leq 1$ . Por el teorema anterior, concluimos que  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  es una sucesión convergente.

Por otra parte este teorema se entiende intuitivamente. Si los  $a_n$  vienen creciendo y creciendo, pero no pueden pasar un cierto valor  $M$ , entonces seguro van a tener que tender a algún valor menor o igual a  $M$ .

Teorema del sandwich :)

Muchas veces te van a pedir que decidas si una sucesión es convergente o no y, en caso en que lo sea, buscar el límite. Muchas veces encontrar el límite es fácil si reemplazás  $n$  por  $x$  y usás los métodos de la unidad II. Otras veces no es posible resolver la indeterminación por ese camino. En algunos casos te puede servir este teorema:

Si  $a_n, b_n$  y  $c_n$  son sucesiones tales que:

$a_n \leq b_n \leq c_n$  y además  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

entonces:  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

Ejemplo: Dada una  $b_n$  tal que:

$$\frac{m^2+1}{3m^2-1} \leq b_m \leq \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{4}$$

podemos obtener el límite de  $b_m$  sacando los límites de las sucesiones que la acotan, si estos límites son iguales coincidirán con el límite de  $b_m$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2+1}{3m^2-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + \overset{\rightarrow 0}{1/m^2}}{3 - \overset{\rightarrow 0}{1/m^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \underbrace{(4)^{1/m}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, por el teorema del sandwich:

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \frac{1}{3}}$$

### Definición de sucesiones por recurrencia:

Como vimos, una sucesión se puede definir a través de la forma del término general (por ej:  $a_m = m^{1/2}$ ).

Otra forma de definir una sucesión es por recurrencia. En este caso, el valor de un término depende del valor de los términos anteriores. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_m = m \cdot a_{m-1} \end{cases} \Rightarrow \text{La sucesión es: } a_1 = 1; a_2 = 2 a_1 = 2$$

$$\begin{matrix} \leftarrow \text{para } m \geq 2 \\ a_3 = 3 a_2 = 6; a_4 = 4 a_3 = 24; \text{ etc...} \end{matrix}$$

Es necesario definir el valor  $a_1$  aparte, ya que todos los otros valores de la sucesión dependerán de éste.

### Subsucesiones:

Dada una sucesión  $\{a_m\} = a_1, a_2, a_3, \dots$

se pueden tomar infinitas subsucesiones tomando sólo ciertos términos de esta sucesión (respetando el orden de aparición en  $\{a_m\}$ ). Es decir, dado un conjunto de números  $\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$  tal que:  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  y  $k_i$  naturales,

$$\boxed{\{b_m\} = \{a_{k_m}\} = a_{k_1}; a_{k_2}; a_{k_3}; \dots}$$

es una subsucesión de  $\{a_m\}$ .

Ejemplo:  $\{a_m\} = 0; 3; 5; 9; -1; 10; 1; 5; \dots$

Dos posibles subsucesiones serían:

$$\{b_m\} = 0; 5; -1; 1; \dots \quad (\text{con } k_1=1; k_2=3; k_3=5; k_4=7\dots)$$

$$\{c_m\} = 3; 9; 1; 5; \dots \quad (\text{con } k_1=2; k_2=4; k_3=7; k_4=8\dots)$$

### Teorema:

Dada una sucesión  $\{a_m\}$  convergente, cualquier subsucesión suya también será convergente y tendrá el mismo límite.

Como conclusión de este teorema podemos decir que, si dada una sucesión encontramos dos subsucesiones con distinto límite; entonces la suc. original **no** es convergente.

Definición de serie:

Dada una sucesión:  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$

Podemos armar una nueva sucesión de manera que el término  $S_m$  de esa sucesión sea igual a la suma de los  $m$  primeros términos de  $\{a_m\}$   
Es decir:

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{k=1}^m a_k$$

Esta sucesión  $\{S_m\}$  de "sumas parciales" se llama serie.

Por ejemplo: La serie correspondiente a la sucesión  $\{a_m = \frac{1}{m}\}$  es  $\{S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}\}$

Convergencia:

Dado que una serie es un caso particular de sucesión, el criterio de convergencia es el mismo. Es decir, la serie es convergente si existe un  $S$  tal que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$$

Al límite  $S$  se le llama suma y se escribe:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

$\swarrow$   
 $S_m$

Notación: Para indicar los términos de una serie usaremos  $\boxed{\sum a_n}$ .

Propiedad de las series convergentes:

Dadas dos series convergentes  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  y dos constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , la nueva serie  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$  también converge y su suma viene dada por:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Si la serie  $\sum a_n$  es convergente entonces:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . (O sea, los términos de la sucesión correspondiente a esa serie tienden a cero).

Otra forma de expresar este teorema es:

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{la serie } \sum a_n \text{ no converge}}$$

Este es un teorema muy útil. Si te preguntan si una serie  $\sum a_n$  converge o no y vos verificás que la sucesión  $a_n$  diverge, o tiene límite no nulo, podés afirmar que  $\sum a_n$  diverge y punto.

Ejemplo:  $\sum \sqrt{m}$  es una serie no convergente.

Esto se prueba de forma directa viendo que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m} = \infty \text{ y no cero.}$$

Ojo: si llegás a que  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m$  sí tiende a cero, eso no te asegura que la serie  $\sum a_m$  sea convergente, solo que es posible que lo sea.

Serie geométrica:

Las series geométricas tienen la forma  $\sum x^m$  donde  $x$  es un número real fijo.

Estas series se suelen empezar con  $m=0$ , o sea que  $S_m$  será:

$$S_m = \sum_{k=0}^m x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^m$$

Podemos obtener la fórmula para el término  $S_m$  de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \ominus \quad S_m = 1 + x + x^2 + \dots + x^m \\ \quad x \cdot S_m = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{m+1} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_m \\ x \cdot S_m \end{array}} \right\} \cdot x$$

Multiplico por  $x$  la de arriba y las resto.

$$(1-x)S_m = 1 - x^{m+1} \Rightarrow \boxed{S_m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}} \quad x \neq 1$$

Para  $x=1$  es fácil:  $S_m = 1 + 1 + \dots + 1 = m+1$

Teniendo la fórmula podemos calcular el límite (si es que existe) de esta serie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \quad \text{si } |x| < 1$$

Si  $|x| \geq 1$  el límite tiende a  $\infty$  y la serie no converge.

Entonces: Si  $|x| < 1$ , la serie  $\sum x^n$  converge y su suma es  $\frac{1}{1-x}$ .

Ejemplo: Obtener la suma para la serie  $\sum_{k=1}^m \frac{2}{3^{k-1}}$

Primero la llevamos a la forma de la serie geométrica:

$$\sum_{k=1}^m \frac{2}{3^k 3^{-1}} = \frac{2}{3^{-1}} \sum_{k=1}^m 3^{-k} = 6 \cdot \left[ \sum_{k=0}^m (3^{-1})^k - 1 \right]$$

Las constantes las podés sacar factor común   
 Le agrego el término para  $k=0$  y se lo resto afuera (vale  $(3^{-1})^0 = 1$ )

Ahora si sacamos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 6 \left( \sum_{k=0}^m (3^{-1})^k - 1 \right) \right] = 6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^m (3^{-1})^k \right] - 6$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{1 - 3^{-1}} - 6 = 3$$

con la fórmula de la serie geom.

Serie armónica:

La serie armónica es  $\sum \frac{1}{n}$ . Se puede demostrar que esta serie es divergente.

Si tomamos la forma más general:

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

se puede demostrar que sólo será convergente si  $p > 1$ . Es decir:

$\sum \frac{1}{n^p}$	converge si $p > 1$
	<u>no</u> converge si $p \leq 1$

↗ (ver demostración más adelante)

### Criterios de convergencia para series de términos no negativos.

Muy pocas veces es posible obtener la suma de una serie. (como en el caso de las geométricas).

Lo que en general se puede saber es si es convergente o no. Hasta ahora tenemos un criterio: si los términos  $a_n$  no tienden a 0, seguro no converge.

Pero en caso de que sí tiendan a 0 habrá que probar por algún método si efectivamente converge.

A continuación vamos a ver algunos métodos para el caso en que los  $a_n$  son positivos o cero, pero nunca negativos.

#### Criterio de comparación

Si  $a_n \geq 0$  y  $b_n \geq 0$  para todo  $n \geq 1$ , y existe una constante positiva  $C$  tal que:

$$a_n \leq C b_n$$

para todo  $n$ , entonces, si  $\sum b_n$  converge,  $\sum a_n$  también converge.

La conclusión de este teorema se puede formular también de la siguiente manera: si  $\sum a_m$  no converge  $\sum b_m$  tampoco lo hará.

Nota: Si se suprimen un  $N^\circ$  finito de términos al principio de una serie la convergencia o divergencia no se ve afectada. Por lo tanto, el teorema anterior también vale si sólo se verifica  $a_m \leq c b_m$  para  $m \geq N$  (donde  $N$  es un  $N^\circ$  fijo).

Ejemplo: Queremos saber si  $\sum \frac{1}{m!}$  es convergente.

Suponemos que sí y para probarlo buscamos una  $b_m$  que la acote y para la cual sepamos que converge. Veamos

$$m! = \underbrace{m \cdot (m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\substack{m-1 \text{ factores mayores} \\ \text{o iguales a } 2.}} \geq \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{m-1 \text{ veces}} = 2^{m-1}$$

$$\Rightarrow m! \geq 2^{m-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{m-1}} \geq \frac{1}{m!} \Rightarrow \boxed{2 \cdot 2^{-m} \geq \frac{1}{m!}}$$

Entonces:  $b_m = 2^{-m}$  y  $c = 2$

Como  $\sum b_m$  converge (geométrica con  $x = \frac{1}{2}$ ), sabemos que  $\boxed{\sum \frac{1}{m!}}$  también converge.

Nota: También podés usar este criterio para probar que alguna serie  $\sum b_m$  diverge, buscando algu-

na  $\sum a_m$  que diverja tal que  $a_m \leq cb_m$ .

Criterio de comparación por paso al Límite

Si  $a_m \geq 0$  y  $b_m \geq 0$  para todo  $m \geq 1$  y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = 1$$

entonces  $\sum a_m$  converge  $\iff \sum b_m$  converge

Si, en cambio; ese límite es cero la implicación sólo va hacia la izquierda ( $\sum b_m$  converge  $\implies \sum a_m$  converge).

Nota: Cuando  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = 1$  se dice que  $\{a_m\}$  y  $\{b_m\}$  son sucesiones asintóticamente iguales.

Ejemplo: La serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$  es no convergente.

Esto lo sabemos porque la comparamos con la serie armónica  $\sum \frac{1}{m}$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{m}}}{\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m(m+1)}}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{m}} = 1$$

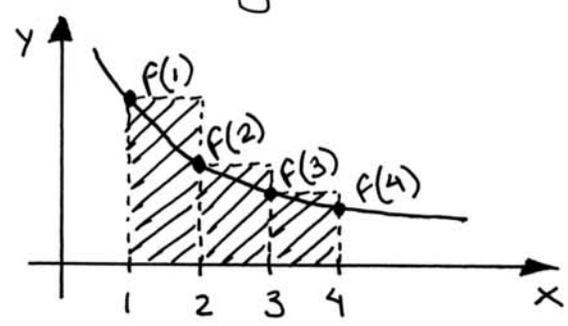
Como  $\sum \frac{1}{m}$  no converge y es asintóticamente igual a  $\sum \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$  deducimos que tampoco ésta converge.

Criterio de la integral: Sea  $f(x)$  una función positiva decreciente, definida para todo real  $x \geq 1$

Sean:  $S_m = \sum_{k=1}^m f(k)$  y  $T_m = \int_1^m f(x) dx$

para  $m \geq 1$ . Entonces o ambas sucesiones  $\{S_m\}$  y  $\{T_m\}$  convergen, o ambas divergen.

Gráficamente:



$T_m$  es igual al área bajo la curva  $f(x)$  desde  $x=1$  hasta  $m$ .  $S_m$ , en cambio, es igual a la suma de las áreas de los cuadraditos (cuya área es, justamente,  $f(k)$ ) hasta  $m$ . Lo que el teorema dice (y que acá no vamos a demostrar) es que ambas sucesiones se comportan igual: o las dos convergen, o las dos divergen.

Ejemplo: Vamos a demostrar que la serie  $\sum \frac{1}{m^p}$  converge sólo si  $p > 1$ . Para eso usamos el teorema anterior con  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , entonces:

$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^p}$  (es, justamente, la serie armónica generalizada  $\sum \frac{1}{m^p}$ )

y  $T_m = \int_1^m \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^m = \frac{m^{1-p} - 1}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(|x|) \Big|_1^m = \ln(m) & \text{si } p = 1 \end{cases}$

Ahora vemos si  $T_m$  converge o no y en qué casos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^{1-p} - 1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } 1-p < 0 \text{ (} p > 1 \text{)} \\ \infty & \text{si } 1-p > 0 \text{ (} p < 1 \text{)} \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(m) = \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Entonces:  $T_m$  sólo converge si  $p > 1$ . Por el teorema,  $S_m$  se comportará igual.

### Criterio de la raíz (Cauchy)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos no negativos tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- Entonces:
- Si  $l < 1$ ,  $\sum a_n$  converge
  - Si  $l > 1$ ,  $\sum a_n$  diverge
  - Si  $l = 1$ , no se puede saber sobre la convergencia de  $\sum a_n$ .

Entonces, este criterio es muy práctico y útil siempre que  $l$  no te de 1. (En ese caso hay que pasar a usar algún otro criterio)

Ejemplo:  $\sum n^{-n}$  converge?

Usamos el criterio de la raíz:

$l$  es menor q' 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 (< 1)$$

Por lo tanto  $\sum n^{-n}$  sí converge.

### Criterio del cociente (D'Alembert)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- Entonces:
- Si  $l < 1$ ,  $\sum a_n$  converge
  - Si  $l > 1$ ,  $\sum a_n$  diverge
  - Si  $l = 1$ , no se sabe.

Ejemplo: Decidir si  $\sum \frac{n!}{n^n}$  converge o no.

Hacemos  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  para usar el criterio del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! / (n+1)^{n+1}}{n! / n^n} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

usando  $\begin{cases} (n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 1 = (n+1) \cdot n! \\ (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1) \end{cases}$

NOTA: La sucesión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es una sucesión que aparece por todos lados. Se puede demostrar que es monótona creciente y que, además, es acotada. Por lo tanto, por uno de los teoremas que vimos en la parte de sucesiones, podemos deducir que converge. El límite al cual converge es el número  $e$ .

O sea que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182 \dots$$

Entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{m+1} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{m+1}{m}} \right)^m =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{e} \Rightarrow e < 1$$

tiende a "e", como dijimos recién

Por lo tanto  $\sum \frac{n!}{n^n}$  converge.

### Series Alternadas:

Hasta ahora vinimos tratando con series de términos no negativos. Las series alternadas son aquellas cuyos términos son positivos y negativos de forma alternada. Es decir, son de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 \dots + (-1)^{k-1} a_k + \dots$$

donde los  $a_k > 0$ .

Regla de Leibniz: Si  $\{a_m\}$  es una sucesión monótona decreciente con límite cero, la serie alternada

$$\sum (-1)^{m-1} a_m \text{ converge.}$$

Además, si  $S$  es la suma de esa serie alternada y  $S_m$  la suma parcial hasta  $m$ , se tiene:

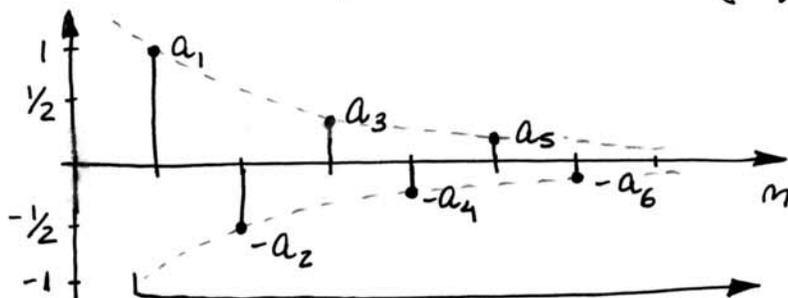
$$0 < (-1)^m (S - S_m) < a_{m+1}$$

Entonces, lo que dice Leibniz es: si en vez de tomar la suma total de la serie,  $S$ , se toma la suma parcial hasta  $m$ ,  $S_m$ , el error " $S - S_m$ " cumple lo siguiente:

- $(-1)^n \cdot (S - S_m) > 0 \Rightarrow 0$  sea que el signo del error es  $(-1)^n$ , que es el signo del primer término no sumado en  $S_m$ .
- $(-1)^n (S - S_m) < a_{m+1} \Rightarrow$  el valor del error es menor que el valor absoluto del primer término no sumado en  $S_m$ .

Ejemplo:  $a_m = \frac{1}{m}$  es monótona decreciente y su límite es cero. Por la regla de Leibniz sabemos que  $\sum (-1)^{m-1} \frac{1}{m}$  converge.

Gráficamente, la sucesión  $(-1)^{m-1} \frac{1}{m}$  es:



$S$  es la suma de todos estos valores



$S_5$  es la suma hasta  $m=5$

$S - S_5$  es la suma desde  $m=6$  en adelante.

Leibniz dice, por ejemplo, que: (con  $m=5$ )

$$0 < -(S - S_5) < \frac{1}{6}$$

## Convergencia absoluta y condicional

Como vimos recién, la serie  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  converge.

Sin embargo  $\sum \frac{1}{n}$  no converge. Esto implica que, dada una serie  $\sum a_n$  convergente ( $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  en el ejemplo), la serie  $\sum |a_n|$  no necesariamente converge. ( $|a_n| = \frac{1}{n}$  porque al sacar el módulo desaparece el signo).

El siguiente teorema dice que, en cambio, la implicación inversa sí vale:

Teorema: Dada una serie  $\sum a_n$ , si  $\sum |a_n|$  converge, entonces  $\sum a_n$  también converge.

Entonces se define:

Serie absolutamente convergente: Una serie  $\sum a_n$  es abs. conv. si  $\sum |a_n|$  converge.

Serie condicionalmente convergente: Una serie  $\sum a_n$  es cond. conv. si  $\sum a_n$  converge pero  $\sum |a_n|$  diverge.

Por lo tanto, la serie  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  es condicionalmente convergente.

Por otra parte, la serie  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  es absolutamente convergente porque  $\sum \frac{1}{n^2}$ , como sabemos, es convergente.

## Series de funciones

Hasta ahora hemos tratado con sucesiones y series cuyos términos eran números reales. Ahora vamos a considerar sucesiones  $\{f_n\}$  donde cada término es una función real. Cada una de estas funciones  $f_n(x)$  tiene un dominio  $D$ , común para todas. Para cada  $x \in D$  podemos construir otra sucesión  $\{f_n(x)\}$  de números, donde los términos son los correspondientes valores de las funciones en  $x$ .

Queda definida, entonces, la función límite  $f$ :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{con } x \in S$$

donde  $S$  es el conjunto de puntos  $x$  para los cuales la sucesión  $\{f_n(x)\}$  converge.

Decimos así, que la sucesión  $\{f_n\}$  converge a  $f$  en el conjunto  $S$ .

Ejemplo: Tomamos  $f_n(x) = x^n$  con  $0 \leq x \leq 1$  (o sea que  $D = [0; 1]$ ). La función límite es:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En este caso  $S$  coincide con  $D$  porque  $\{f_n(x)\}$  converge para todo  $x$  en  $D$ .

Una serie de funciones es, como debés suponer, una sucesión de sumas parciales de términos de una sucesión de funciones  $\{f_n\}$ . Entonces, los términos de una serie de funciones son:

$$\sum_{k=1}^n f_k = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

↪ Término enésimo de la serie.

También en este caso, para cada  $x$ , habrá una serie numérica correspondiente,  $\sum f_n(x)$ .

Series de potencias: Tomando los términos

$f_n(x) = a_n (x-a)^n$ , la serie de funciones correspondiente se llama serie de potencias de  $x-a$ .

Para cada  $x$  la serie numérica correspondiente tiene términos de la forma:

$$\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + \dots + a_n (x-a)^n$$

Estas series convergerán o no dependiendo de los  $a_n$  y del valor de  $x$ .

Radio de convergencia: es el "radio" del intervalo de centro " $a$ " para el cual se cumple que:

- para todos los  $x$  pertenecientes a ese entorno la serie de potencias converge.
- para todos los  $x$  exteriores a él la serie diverge.

Ejemplo: Buscamos el radio de convergencia para la serie de potencias  $\sum \frac{1}{n!} x^n$  ( $a=0$ , en este caso).

Para eso vamos a usar el criterio del cociente. Como, si  $x < 0$ , esa no es una serie de términos positivos, para poder usar el criterio vamos a probar conv. abs. Si  $\sum \left| \frac{1}{n!} x^n \right|$  converge  $\Rightarrow \sum \frac{1}{n!} x^n$  converge.

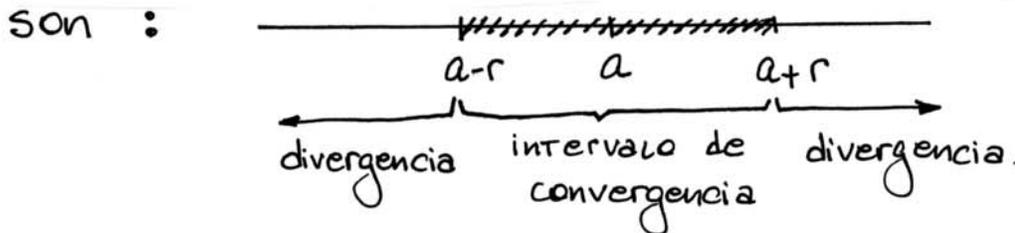
estos son los  $a_n$  para el criterio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n!} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

Concluimos, entonces, que la serie  $\sum \frac{1}{n!} x^n$  converge absolutamente para cualquier valor de  $x$ .

Entonces, el radio de convergencia de esta serie de potencias es  $\infty$ . (converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

Gráficamente, el intervalo y el radio de convergencia son :



Finalmente, cada serie de potencias define una función suma cuyo valor en cada  $x$  del intervalo de conv. es:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \rightsquigarrow \text{o sea, } f(x) \text{ es el límite de la serie } \sum a_n (x-a)^n$$

(en los  $x$  en que este límite es finito)

Se dice, entonces, que la serie representa la función  $f$  en el intervalo  $(a-r; a+r)$  y se la denomina desarrollo en serie de  $f$  según potencias de  $a$ .

Propiedades de las funciones representadas por series de potencias

Teorema 1: Si una función está representada por la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \leftarrow (*)$$

en el intervalo  $(a-r; a+r)$ ; entonces será continua en ese intervalo y su integral en cualquier intervalo  $[a-R; a+R]$  (con  $R < r$ ) podrá calcularse integrando la serie término a término.

Por ejemplo, para todo  $x \in (a-r; a+r)$  se tiene

$$\int_a^x f(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^x (\tau-a)^k d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$$

representación en serie de  $\int_a^x f$

Por otra parte, se puede demostrar que el radio de convergencia de la serie original y el de la serie integrada son iguales ( $r$  en ambos casos)

Teorema 2: Si una función  $f$  está representada por la serie de potencias  $(*)$  en el intervalo  $(a-r; a+r)$  de convergencia; entonces existe la derivada  $f'(x)$

para cada  $x$  del intervalo de conv. y vale:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-a)^{k-1} \quad (\text{el término para } k=0 \text{ desaparece porque es constante y al derivar se va}).$$

Además, el radio de conv. de esta serie derivada también es igual a  $r$  (como para la serie original).

### Serie de Taylor generada por una función

Si a la expresión  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$  la derivamos  $m$  veces queda

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k! a_k (x-a)^{k-m} \quad (\text{el único término que no depende de } (x-a) \text{ es el q' tiene } k=m)$$

y evaluando en  $x=a$ :  $f^{(m)}(a) = m! a_m$

Entonces:

$$a_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \quad \text{para cada } m \geq 0$$

Y esa es la forma de calcular los coeficientes de la representación en serie de potencias de  $f(x)$ .

Teorema: Si dos series de potencias,  $\sum a_m (x-a)^m$  y  $\sum b_m (x-a)^m$ , tienen la misma función suma  $f(x)$

en un cierto entorno de "a"; entonces  $a_m = b_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$

Entonces, toda función que tenga derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto entorno al punto "a" (infinitamente derivable, diremos) tiene la

siguiente representación en serie de potencias

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

donde  $f^{(0)}(a)$  (el primer término de la sumatoria) es, simplemente,  $f(a)$ , la función sin derivar evaluada en "a".

Esta representación se llama Serie de Taylor generada por  $f$  alrededor del punto "a".

Como ya debés haber notado, los términos de esta serie son los mismos que los del polinomio de Taylor. Es decir, las sumas parciales de esta serie son los polinomios de Taylor de distintos órdenes de  $f(x)$ .

---

FIN TEORÍA DE SERIES

# EJERCICIOS

1 Obtener el término general de la siguiente sucesión:

$$-1; \frac{1}{8}; -\frac{1}{27}; \frac{1}{64}; \dots$$

Fíjate que los denominadores, en cada término, coinciden con  $m^3$  (1, 8, 27, 64...). y que, además, el signo es alternado pudiéndose expresar como  $(-1)^m$ . Entonces:

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m^3} \quad m \geq 1$$

Nota: No hay un método mecánico para resolver ejercicios como este, es simplemente al tanteo, probando distintas opciones a ver cuál da.

2 Obtener los 5 primeros términos de la siguiente sucesión (expresada de forma recurrente):

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_m = a_{m-1} + 2^m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para } m > 1 \\ \text{(cada término depende del} \\ \text{término anterior.)} \end{array}$$

Bueno, es fácil:  $a_1 = \boxed{3}$

$$a_2 = a_{2-1} + 2^2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = \boxed{7}$$

$$a_3 = a_2 + 2^3 = 7 + 8 = \boxed{15}$$

$$a_4 = a_3 + 2^4 = 15 + 16 = \boxed{31}$$

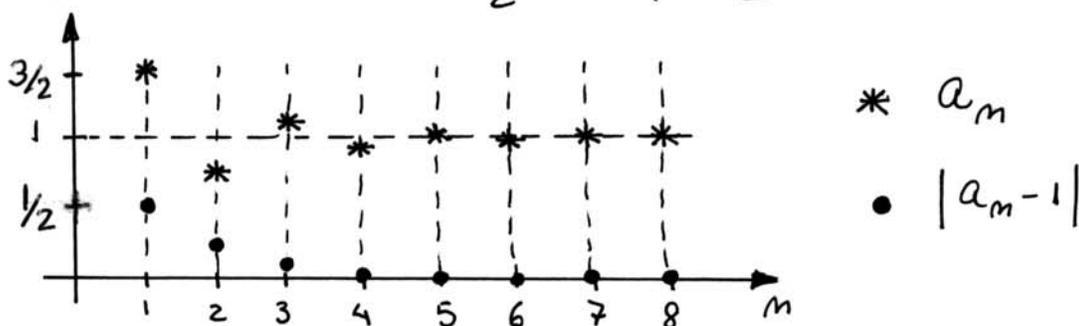
$$a_5 = a_4 + 2^5 = 31 + 32 = \boxed{63}$$

3) Dada  $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  /  $a_m = 1 - \frac{(-1)^m}{2^m}$

a) Completar la siguiente tabla y representar:

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_m$	$3/2$	$3/4$	$9/8$	$15/16$	$33/32$	$63/64$	$129/128$	$255/256$
$ a_m - 1 $	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	$1/128$	$1/256$

$$\hookrightarrow |a_m - 1| = \left| 1 - \frac{(-1)^m}{2^m} - 1 \right| = \frac{1}{2^m}$$



Como se ve en el gráfico, los términos  $a_m$  oscilan alrededor de 1, acercándose cada vez más. Los términos  $|a_m - 1|$  son monótonamente decrecientes, acercándose a 0.

b) Calcular el límite de la sucesión  $\{a_m\}$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{(-1)^m}{2^m} \right) = \boxed{1}$$

$\hookrightarrow (-1)^m$  oscila, pero es acotada. Como  $2^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ , entonces

$$\frac{(-1)^m}{2^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Entonces, como era evidente del gráfico, el límite de la sucesión es 1.

c) Hallar todos los  $n$  tales que la distancia entre  $a_n$  y el límite sea menor que  $0,1$ .

La distancia entre  $a_n$  y  $1$  es  $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n}$ .

Ponemos la condición:  $|a_n - 1| < 0,1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2^n} < 0,1 \Rightarrow \frac{1}{0,1} < 2^n \Rightarrow 10 < 2^n \Rightarrow$$

$$\log_2 10 < n \Rightarrow 3,32 < n \Rightarrow \boxed{n \geq 4}$$

Entonces, de  $a_4$  en adelante se cumple lo pedido

4 Demostrar por definición que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 - n + 1} = 3$$

↳ El límite se puede obtener con los mismos métodos que se usan para variable real (como si en vez de  $n$  dijera  $x$ ). Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{3}{\cancel{3n^2}} + \overset{0}{\cancel{1}}}{\underset{1}{\cancel{n^2}} - \underset{0}{\cancel{n}} + \underset{0}{\cancel{1}}} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

(Las flechitas significan "tiende a").

En este ejercicio se pide que compruebes que ese es el límite por definición. La def. de límite dice que  $3$  es el límite de  $\{a_n\}$  si: para cada  $\epsilon$  (real positivo) existe un  $N$  (positivo y dependiente de  $\epsilon$ )

Tal que:  $|a_m - 3| < \epsilon$  para todo  $m \geq N$

Entonces, para verificar eso, empezamos imponiendo la condición  $|a_m - 3| < \epsilon$  y buscamos luego el  $N$  a partir del cual eso se cumple. Si ese  $N$  existe, se prueba que 3 era efectivamente el límite de la sucesión:

$$\left| \frac{3m^2 + 1}{m^2 - m + 1} - 3 \right| = \left| \frac{\cancel{3m^2} + 1 + 3m^2 + 3m - 3}{m^2 - m + 1} \right|$$

$$= \left| \frac{3m - 2}{m^2 - m + 1} \right| < \epsilon \iff \underline{\text{condición *}}$$

Ahora se hace la siguiente cadena de desigualdades para simplificar la búsqueda del  $N$  a partir del cual se cumple la condición.

$$\frac{3m - 2}{m^2 - m + 1} \stackrel{\textcircled{1}}{<} \frac{3m}{m^2 - m + 1} \stackrel{\textcircled{2}}{<} \frac{3m}{m^2 - m} \stackrel{\textcircled{3}}{<} \frac{3m}{m^2 - \frac{1}{2}m^2} \stackrel{\textcircled{4}}{<} \frac{3m}{\frac{1}{2}m^2}$$

si  $m > 2$

$$= \frac{3m}{\frac{1}{2}m^2} = \frac{6}{m} < \epsilon \iff \text{a esto se redujo la condición *}$$

$$\frac{6}{m} < \epsilon \implies \frac{6}{\epsilon} < m \implies \text{Simplemente tomando}$$

a  $N$  igual al primer entero mayor a  $\frac{6}{\epsilon}$  (para el  $\epsilon$  que quieras), se cumple la condición \*. Por lo tanto se ha probado que 3 es el límite de la sucesión  $\{a_m\}$ .

Justificaciones: Todas las desigualdades obtenidas tienen como meta llegar a una expresión simple del tipo  $C/m < \epsilon$  (donde  $C$  es una cte.).

① En esta expresión sacamos las barras de módulo. Podemos hacer eso si consideramos que:

$$\begin{cases} 3m-2 > 0 & \rightarrow \text{esto es verdad si } m > 2/3 \\ m^2-m+1 > 0 & \rightarrow \text{esto es verdad siempre porque} \\ & m^2-m+1 \text{ es una parábola hacia arriba U,} \\ & \text{sin raíces (o sea, su valor es siempre } > 0) \end{cases}$$

Entonces, poniendo como condición que  $m > 2/3$  (lo cual no tiene sentido en este caso porque eso siempre es verdad, ya que  $m \geq 1$ , pero podría tener sentido si hubiera dado una condición del tipo  $m > 3$ ), se pueden sacar las barras de módulo.

② Esta desigualdad sale, simplemente de que:  
 $3m-2 < 3m$  (siempre).

③ Como  $\underbrace{m^2-m+1}_{\text{valores positivos}} > \underbrace{m^2-m}_{\text{valores positivos}} \Rightarrow \frac{3m}{m^2-m} > \frac{3m}{m^2-m+1}$   
por eso puedo pasar dividiendo sin dar vuelta la desigualdad.

④ Este es el truguito final. Consideramos  $m > 2$ , entonces:  $\frac{1}{2}m > 1 \xrightarrow{\cdot m} \frac{1}{2}m \cdot m > m \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m^2 > m \xrightarrow{\cdot (-1)} -\frac{1}{2}m^2 < -m \xrightarrow{+m^2} m^2 - \frac{1}{2}m^2 < m^2 - m$$

$$\Rightarrow \frac{3m}{m^2 - m} < \frac{3m}{m^2 - \frac{1}{2}m^2}$$

Listo, el resto sale directo.

Podemos decir, entonces, que  $|a_m - 3| < 0,01$  (por ejemplo) si  $m > \frac{6}{0,01} = 600$ . O sea, desde  $N = 601$  en adelante, los términos de la sucesión están a menos de 0,01 de distancia al 3.

**5** Usando el teorema de intercalación probar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \infty$$

Hay que buscar dos sucesiones  $a_m$  y  $c_m$  tales que:

$$a_m \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2m}} \leq c_m$$

y que, además, tengan límite  $\infty$ . (En realidad cuando  $L$  es  $\infty$  basta con encontrar  $a_m$  que sea menor y que tienda a  $\infty$ ).

Para eso vemos que todos los sumandos de la serie

tienen la forma  $\frac{1}{\sqrt{m+i}}$ , con  $i < m$ , y, entonces:

$$m+i \leq 2m \quad (i < m) \Rightarrow \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{m+i} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{m+i}} \geq \frac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2m}}}_{m \text{ sumandos}} \geq \frac{m}{\sqrt{2m}} = \frac{\sqrt{m}}{2}$$

Con eso obtuvimos  $a_m = \frac{\sqrt{m}}{2}$ , la cual, obviamente, tiene límite  $\infty$ .

Además, como  $m+i \geq m \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \frac{1}{\sqrt{m+i}} \Rightarrow$

$$\frac{m}{\sqrt{m}} \geq \frac{1}{\sqrt{m}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \sqrt{m} \geq \frac{1}{\sqrt{m}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Y así tenemos  $C_m = \sqrt{m}$  cuyo límite también es  $\infty$ .

6) Calcular los siguientes límites utilizando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n-1]{(3n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m \cdot m}$

llamamos  $m = 3n-1$  ( $m$  ya no es entero)

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[m]{m}}_1 \underbrace{\sqrt[m]{m}}_1 = \boxed{1}$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[n]{n \cdot n}}{\sqrt[n]{2^n}} \right]^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt[n]{n \cdot n}}{2} \right]^n = \boxed{0}$$

$\downarrow$   
 $1/2$

7) Demuestre que la siguiente sucesión es no convergente.  $\{a_n = (-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Esta sucesión es :  $-1; 1; -1; 1; \dots; -1; 1; -1; \dots$

Los términos con  $n$  par forman una subsucesión  $b_n = 1$  cuyo límite es  $1$ .

Los términos con  $n$  impar forman una subsucesión  $c_n = -1$  cuyo límite es  $-1$ .

Como los límites de dos subsucesiones de  $a_n$  son distintos, entonces  $a_n$  no converge (no tiene límite)

---

8) Demostrar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Falsa: Para demostrarlo ponemos un contraejemplo y listo. Con  $a_n = n$  y  $b_n = n^2$  se cumple la hipótesis (los límites son  $\infty$ ) pero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 1$$

b) Toda sucesión acotada es convergente.

Falsa: Un contraejemplo es la sucesión del ej 7.  $a_n = (-1)^n$  es acotada:  $|a_n| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$  y sin embargo, como ya probamos, no es convergente.

---

9) Calcular, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a)  $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n - 1}$

b)  $a_n = \left( \frac{3n+2}{3n+1} \right)^{2n}$

c)  $a_m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$

d)  $a_m = \frac{2m!}{m!-1}$

e)  $a_m = \sqrt{m(m+4)} - m$

f)  $a_m = \log(m+c) - \log(m)$

a)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m + 1}{2^m - 1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2^m}} = \boxed{1}$

b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{3m+2}{3m+1}\right)^{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3m+1}\right)^{2m} =$   
 ↳ divido:  $\frac{3m+2}{3m+1} \frac{3m+1}{1}$

(Vamos a usar  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ , así que tratamos de llevarlo a esa forma).

$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{3m+1}\right)^{3m+1} \right]^{\frac{1}{3m+1} \cdot 2m} = \boxed{e^{2/3}}$   
 todo esto tiende a "e"      esto tiende a "2/3"

c)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^m}{2^m} = \boxed{0}$

Esto se debe a que  $\frac{1}{2^m}$  es una sucesión convergente con límite igual a cero. y  $(-1)^m$  es una sucesión no convergente (oscilante), pero acotada.

d)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m!}{m!-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{m!-1}{m!}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{m!}} = \boxed{2}$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{n(n+4)} - n}_{\text{indeterminación } (\infty - \infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n+4)} - n)(\sqrt{n(n+4)} + n)}{\sqrt{n(n+4)} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+4)}^2 - n^2}{\sqrt{n(n+4)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + n^2}{\sqrt{n(n+4)} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{n(n+4)}}{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = \boxed{2}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} [\log(n+c) - \log(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \log\left(\frac{n+c}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{c}{n}\right) = \log(1) = \boxed{0}$$

Viste? No tiene nada raro, es lo mismo que que antes pero con  $n$  en vez de  $x$ ...

10 Para las siguientes sucesiones:

$$\{a_n\} = -2; 0; 2; -2; 0; 2; \dots$$

$$\{b_n\} = \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \dots$$

Obtener:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

a) Esta sucesión no tiene límite (es oscilante).  
Fíjate que hay 3 subsucesiones que tienen  $\neq$  límite:

$$\{a'_m\} = -2; -2; -2; \dots \rightsquigarrow \text{Límite} = -2$$

$$\{a''_m\} = 0; 0; 0; \dots \rightsquigarrow \text{Límite} = 0$$

$$\{a'''_m\} = 2; 2; 2; \dots \rightsquigarrow \text{Límite} = 2$$

b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ . ; obvio, no? Esta sucesión es

$$b_m = \frac{1}{m} \text{ para } m \geq 5, \text{ así que converge a } 0.$$

c) Como  $\{a_m\}$  es acotada ( $|a_m| \leq 2$ ), aunque no converja,  
y  $\{b_m\}$  tiene límite  $= 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (a_m b_m) = 0$

$$d) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} m a_m$$

Para la sucesión  $\{m a_m\}$  hay 3 subsucesiones, una con límite  $-\infty$ , otra con límite 0 y otra  $\infty$ .  
Por lo tanto, no tiene límite.

---

11 Para la sucesión  $a_m = 1 + \frac{1}{m}$  decir si:

- Crece o decrece
- Converge o diverge
- Es acotada o no.

Los primeros términos son:  $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \dots$

O sea:  $2; 1,5; 1,33; 1,25; \dots$

Evidentemente es decreciente. Para probarlo comparás

$$a_n \text{ con } a_{n+1}: a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Como } n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n > a_{n+1}} \rightsquigarrow \text{sucesión } \underline{\text{monótona decreciente}}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = \boxed{1} \Rightarrow \text{converge}$$

$$c) \left| 1 + \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow \text{es } \underline{\text{acotada}}.$$

Nota: Como es monótona decreciente y acotada, necesariamente debía ser convergente.

Ahora pasamos a los ejercicios de series

**12** Determinar si las siguientes series, de términos positivos,  $\sum a_n$ , son convergentes o no.

$$a) a_n = \frac{n+1}{2^n}$$

Vamos a usar el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)+1 / 2^{n+1}}{n+1 / 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right) \frac{2^n}{2^{n+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Como  $l = \frac{1}{2}$ , que es menor que 1, por el criterio del cociente  $\sum a_n$  converge.

$$b) a_m = \frac{n}{n+1}$$

Este es muy fácil. Usamos la condición necesaria para la convergencia de una serie. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  no es cero  $\Rightarrow$  la serie  $\sum a_n$  no converge.

$$c) a_m = \frac{n!}{(n+2)!}$$

Primero simplificamos  $a_m$ :

$$a_m = \frac{n!}{(n+2)(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Y ahora podemos usar el criterio de paso al límite con  $b_m = \frac{1}{n^2}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+2}{n} \frac{n+1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \boxed{1} \end{aligned}$$

Como  $b_m = \frac{1}{n^2}$  es una armónica generalizada con  $p=2$ , sabemos que  $\sum b_m$  converge y como el límite del cociente dió 1  $\Rightarrow \sum a_m$  también converge.

$$d) a_m = n e^{-n^2}$$

Podemos usar el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} e^{-n^2/n}$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^2/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

$$e) a_n = \frac{\log n}{n \sqrt{n^2+1}}$$

Vamos a usar dos criterios en este caso. Primero el de paso al límite con  $b_n = \frac{\log n}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log n}{n \sqrt{n^2+1}}}{\frac{\log n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \boxed{1}$$

Como el límite del cociente dió 1, sabemos que  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  se comportan igual. Pero todavía no sabemos cómo se comporta  $\sum b_n$ , así que vamos a usar el criterio integral para ver eso:

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} \Rightarrow T_n = \int_1^n \frac{\log x}{x^2} dx$$

Para integrar eso buscás en la tabla (o lo hacés "por partes"), obteniendo:

$$T_n = \left[ -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^n = -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1$$

El límite de la sucesión  $T_n$  es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1 \right] = \boxed{1}$$

Por lo tanto, la sucesión  $T_m$  converge.

Por el criterio de la integral, la serie  $\sum_{k=1}^m f(k)$  (o sea  $\sum_{k=1}^m \frac{\log k}{k^2}$ ) se comporta igual que  $T_m$ .

Conclusión:  $\sum b_m$  converge y por lo tanto  $\sum a_m$  también converge.

$$f) a_m = \frac{3^m m!}{m^m}$$

Vamos a usar el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{m+1}}{a_m} &= \frac{\frac{3^{m+1} (m+1)!}{(m+1)^{m+1}}}{\frac{3^m m!}{m^m}} = \frac{3^{m+1} (m+1)!}{3^m m!} \cdot \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} = \\ &= \frac{\cancel{3^m} 3 \cancel{(m+1)!} m^m}{\cancel{3^m} \cancel{(m+1)!} (m+1)^m \cancel{(m+1)}} = \frac{3 m^m}{(m+1)^m} = 3 \left( \frac{m}{m+1} \right)^m \\ &= 3 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \right)^m = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{3}{e} > 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sum a_m$  no converge.

$$g) a_m = \frac{(m!)^2}{2^{m^2}}$$

Usamos también el criterio del cociente.

$$\begin{aligned} \frac{a_{m+1}}{a_m} &= \frac{\frac{((m+1)!)^2}{2^{(m+1)^2}}}{\frac{(m!)^2}{2^{m^2}}} = \frac{((m+1)m!)^2}{(m!)^2} \cdot \frac{2^{m^2}}{2^{(m+1)^2}} \\ &= (m+1)^2 2^{m^2 - (m+1)^2} = (m+1)^2 2^{-2m-1} = \frac{(m+1)^2}{2^{2m+1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{2^{2n}} = 0$$

(Eso probalo como quieras, es fácil. Una manera: en el ej 12.a probamos que  $\sum \frac{n+1}{2^n}$  converge, con lo cual  $\frac{n+1}{2^n}$  debe tener límite igual a cero y por lo tanto  $\frac{(n+1)^2}{2^{2n}} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2^n}$  también tiene límite igual a cero.)

Listo, como el límite dió  $< 1 \Rightarrow \sum a_n$  converge

$$h) a_n = (n^{1/n} - 1)^n$$

Usamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n^{1/n} - 1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1/n} - 1) = \boxed{0}$$

Listo! Como  $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$  converge. (esto tiende a 1 (es  $\sqrt[n]{n}$ )).

**13** Sabiendo que  $a_n > 0$  (términos positivos) y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n a_n) = \frac{1}{2}$ ; probar que  $\sum 4a_n$  diverge.

Vamos a usar el criterio del paso al límite.

Como vimos, este criterio dice que si:  $a_n \geq 0$  y  $b_n \geq 0$

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow \sum a_n$  y  $\sum b_n$  se comportan igual.

Nota: No importa, en realidad, cuánto valga ese límite siempre que sea una constante distinta de 0 y de  $\infty$ .

Entonces, por el enunciado:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum a_m \text{ y } \sum \frac{1}{m} \text{ se comportan}$$

igual. Como  $\sum \frac{1}{m}$  diverge  $\Rightarrow \sum a_m$  diverge.

Además, si  $\sum a_m$  diverge, evidentemente  $\sum 4a_m$  también diverge, ya que  $\sum 4a_m = 4 \cdot \sum a_m$  y, entonces, ambas deben comportarse igual.

14 Determine la convergencia absoluta o condicional de las siguientes series alternadas.

a)  $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

Primero vamos a probar si  $\sum \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \right| = \sum \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ ;

converge, porque si esa serie converge, entonces la serie alternada original también converge (convergencia absoluta). Para eso, usamos el criterio de paso al límite con  $b_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$  (de la cual sabemos que diverge porque es una serie armónica generalizada con  $p = \frac{1}{2} < 1$ ).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{m}}{m+100}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+100} = \boxed{1}$$

Por lo tanto;  $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  también diverge.

Con esto probamos que la serie alternada  $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  no converge absolutamente. Tenemos que ver, entonces, si converge condicionalmente, es decir, si  $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  tiene suma finita. Para eso quisiéramos usar Leibniz, pero para usar Leibniz necesitamos que los términos  $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$  sean monótonamente decrecientes. Vamos a ver si esto es así o no. Planteamos que lo es, o sea, que  $a_{n+1} < a_n$  y vemos a qué llegamos:

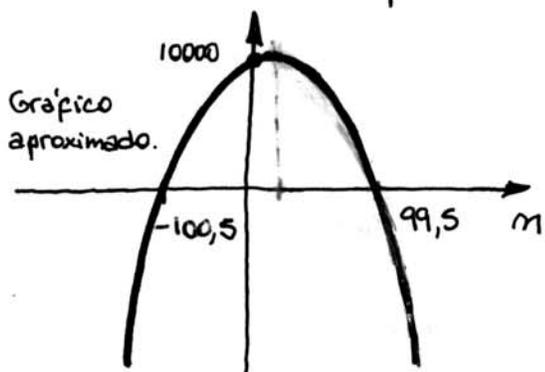
$$\left[ \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n+101}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}_{a_n} \right] \text{ elevo al cuadrado. } \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{(n+101)^2} < \frac{n}{(n+100)^2} \Rightarrow (n+1)(n+100)^2 < n(n+101)^2 \Rightarrow$$

$$(n+1)(n^2 + 200n + 10000) < n(n^2 + 202n + 10201)$$

$$\cancel{n^3} + 200n^2 + 10000n + \cancel{n^3} + 200n^2 + 10000n < \cancel{n^3} - 202n^2 - 10201n < 0$$

$-n^2 - n + 10000 < 0$  ← Ahora hay que ver si esto es verdad. Graficamos, para eso, la parábola:



↪ O sea que:  $-n^2 - n + 10000 < 0$

es verdad sólo para  $n \geq 100$

Es decir que sólo a partir de  $n=100$  la sucesión  $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$  es monot. decreciente.

Sabiendo eso, podemos hacer lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+100} (-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{99} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+100}}_{\text{esta suma es finita segura, ya que tiene un número finito de términos}} + \underbrace{\sum_{k=100}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+100}}_{\text{esta serie sí cumple las condiciones de Leibniz. (tiene términos monot. dec y con límite igual a 0)}}$$

Por lo tanto, la suma total es suma de un término finito y una serie que cumple Leibniz y por lo tanto, converge.

Conclusión  $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$  converge condicionalmente

b)  $\sum (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}$

Probemos primero si  $\sum \frac{n^{37}}{(n+1)!}$  converge o no.

Usamos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{37}}{(n+2)!}}{\frac{n^{37}}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{37} \frac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{37} \frac{1}{n+2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Entonces  $\sum \frac{n^{37}}{(n+1)!}$  converge y, por lo tanto,

$\sum (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}$  converge absolutamente.

Nota: No importa cuál sea el exponente de  $(-1)$  en la serie alternada, al fin y al cabo, la diferencia es una constante multiplicativa. Es decir, la serie

$\sum (-1)^m a_m$  es igual a la serie  $(-1) \sum (-1)^{m-1} a_m$  y ese  $(-1)$  afuera no cambia la convergencia.

$$c) \sum (-1)^m a_m \quad \text{con} \quad a_m = \begin{cases} 1/m^3 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1/m^2 & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

Nota: Acá no podríamos usar Leibniz porque la sucesión  $a_m$  no es monótonamente decreciente. (Por ejemplo, para  $m=3$  vale  $1/27$  y para  $m=4$  vale  $1/16$ , entonces  $a_3 < a_4 \Rightarrow$  no es decreciente)

Probamos la convergencia de  $\sum a_m$ . No podemos usar el criterio del cociente porque mirá lo que pasa:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \begin{cases} \frac{1/(m+1)^3}{1/m^2} = \frac{m^2}{(m+1)^3} & \text{si } m \text{ es par (} m+1, \text{ impar)} \\ \frac{1/(m+1)^2}{1/m^3} = \frac{m^3}{(m+1)^2} & \text{si } m \text{ es impar (} m+1, \text{ par)} \end{cases}$$

Como esos dos límites dan  $\neq$ , no sirve usar este criterio.

Lo hacemos de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{ impar}} \frac{1}{k^3}$$

Entonces,  $\sum a_m$  es suma de dos series, de las cuales sabemos que convergen  $\left( \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{k^2} < \sum_{\forall k} \frac{1}{k^2} \right)$  y como  $\sum_{\forall k} \frac{1}{k^2}$  converge  $\Rightarrow \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{k^2}$  también converge. Lo mismo podemos decir sobre  $\sum_{k \text{ impar}} \frac{1}{k^3}$ . y, por lo

Tanto, también converge.

Conclusión:  $\sum (-1)^n a_n$  converge absolutamente

15 Demostrar que si  $\sum a_n$  es absolutamente convergente entonces  $\sum a_n^2$  es convergente. Dar un contraejemplo para la recíproca.

Vamos a usar el criterio de comparación por paso al límite (la segunda parte) que dice que: dadas  $\{d_n\}$  y  $\{c_n\}$  de términos positivos, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{c_n} = 0 \Rightarrow \text{si } \sum c_n \text{ converge, entonces } \sum d_n$$

también converge.

Vamos a usar:  $d_n = a_n^2 = |a_n|^2$  } son de términos positivos.  
 $c_n = |a_n|$  }

$$\text{Entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|^2}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$$

Como sabemos, por hipótesis, que  $\sum a_n$  es abs. conv, entonces sabemos que  $\sum |a_n|$  es convergente y, por lo tanto  $\sum c_n$  es convergente. Además, debido a que  $\sum |a_n|$  es conv. se debe cumplir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

Por lo tanto, el límite de  $\frac{d_n}{c_n}$  da cero y  $\sum c_n$  converge  $\Rightarrow \sum d_n = \sum a_n^2$  converge.

Buscamos, ahora, un contraejemplo para la recíproca:  
Es fácil. Tomamos  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum a_n^2$  sí converge,  
pero  $\sum a_n$  no.

**16** Si la suma de los  $n$  primeros términos de una serie es:  $\frac{n+2}{2n} - 1$ , analizar la convergencia de esta serie y hallar el término  $a_{10}$ .

Una serie  $\sum a_n$  es, en definitiva, una sucesión. cuyos términos son las sumas parciales (hasta  $n$ ) de los  $a_n$ . El enunciado está diciendo que estos términos son iguales a " $\frac{n+2}{2n} - 1$ ". Es decir:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n+2}{2n} - 1$$

Es muy fácil, teniendo estos términos, analizar la convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+2}{2n} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Para obtener el término  $a_{10}$  vemos que:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10+2}{2 \cdot 10} - 1 = -0,4 = S_{10}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \frac{9+2}{2 \cdot 9} - 1 = -0,389 = S_9$$

restando estas dos

$$\Rightarrow S_{10} - S_9 = a_{10} = -0,011$$

17) Dada la serie alternada  $\sum (-1)^{m-1} \frac{2^m a^m}{m}$  :

a) Obtener los valores de  $a$  para los cuales la serie converge absolutamente.

b) Para  $a = \frac{1}{4}$ , obtener el valor de la suma con error menor a 0,001.

a) Usamos el criterio de la raíz con  $a_m = \frac{2^m a^m}{m}$  para ver si converge absolutamente:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{2^m a^m}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot a}{\sqrt[m]{m}} = 2a$$

Para que sea convergente:  $l = 2a$  tiene que ser  $< 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$

Si  $a > \frac{1}{2} \Rightarrow$  seguro diverge.

Si  $a = \frac{1}{2}$ , el  $l$  es = 1 y el criterio no sirve.

Igual, en ese caso:  $a_m = \frac{2^m (\frac{1}{2})^m}{m} = \frac{1}{m}$  y sabemos que  $\sum \frac{1}{m}$  diverge.

En conclusión:  $\sum (-1)^{m-1} \frac{2^m a^m}{m}$  converge absolutamente ( $\sum \frac{2^m a^m}{m}$  converge) sólo si  $a < \frac{1}{2}$

b) Para  $a = \frac{1}{4} \Rightarrow$  la serie es  $\sum (-1)^{m-1} \frac{1}{2^m m}$

La sucesión  $\frac{1}{2^m m}$  es monótonamente decreciente y su límite es cero. Por lo tanto, por Leibniz, sabemos que esa serie converge (lo cual ya sabíamos del punto a)) y que, además:

$$0 < (-1)^m (S - S_m) < a_{m+1} \quad \left( S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k k} \right)$$

Calcular  $S$  es imposible, así que la podemos aproximar con la suma parcial  $S_m$ . El error cometido en ese caso será (en módulo) menor a  $a_{m+1}$ .

En el enunciado piden un error menor a 0,01.

Con eso sacamos  $m$ , la cantidad de términos que debemos sumar para obtener la aproximación:

$$(-1)^m \underbrace{(S - S_m)}_{\text{error}} < a_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1} (m+1)} < 0,01 =$$

↑ signo del error

↘ De esta condición sale  $m$ .

Esa condición es una ecuación "trascendente" (no tiene solución explícita); para resolverla vas probando:

con  $m=3 \Rightarrow a_{m+1} = 0,015$ , no sirve

$m=4 \Rightarrow a_{m+1} = 0,00625 \Rightarrow$  sirve!

Entonces,  $S_4$  aproxima a  $S$  con un error menor al pedido.

$$S_4 = \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{1}{2^k k} = -\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 4}$$

$S_4 = -0,401$

18 Analizar la convergencia de la serie  $\sum a_n$   
con  $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+2)}}$

Veamos,  $\sum a_n$  esta formada por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+2}}}_{\text{serie de términos positivos}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k(k+2)}}}_{\text{serie alternada}}$$

Si las dos series que la componen convergen, entonces  $\sum a_n$  también convergerá, siendo su "suma" la suma de las "sumas" (☺) de esas dos series.

Entonces demostramos por separado:

- Para  $\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$  usamos el criterio del paso al límite con  $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ , que por ser una armónica generalizada con  $p = \frac{3}{2} > 1$ , sabemos que converge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+2}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} = \boxed{1}$$

Por lo tanto,  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+2}}$  converge

- Para  $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+2)}}$  usamos Leibniz. La sucesión  $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$  es, evidentemente, monótona decreciente y su límite es cero. Por lo tanto, converge.

Listo, entonces  $\sum a_n$  converge.

19 Sabiendo que la suma parcial de los  $n$  primeros términos de una serie es  $S_n = \frac{n+2}{n^2-1}$ , obtener el término general  $a_n$ . Es convergente esta serie?

Para obtener  $a_n$ :

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{n+2}{n^2-1} = \sum_{k=1}^n a_k \\ S_{n-1} &= \frac{n-1+2}{(n-1)^2-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \end{aligned} \right\} \text{restando}$$

$$\frac{n+2}{n^2-1} - \frac{n+1}{n^2-2n} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k}_{\left[ = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n \right]} = \boxed{a_n}$$

Por lo tanto; haciendo la resta:

$$\boxed{a_n = \frac{-n^2-3n+1}{(n^2-1)n(n-2)}} \quad \text{para } n \neq 1 \text{ y } n \neq 2$$

Que la serie converge es evidente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{0} \leftarrow \text{su suma es } 0$$

20 Si la serie  $\sum \frac{a_n}{2^n}$  es convergente ( $a_n > 0$ ).

Qué se puede decir sobre la convergencia de:

a)  $\sum \frac{a_n}{(-2)^n}$

b)  $\sum \frac{a_n}{3^n}$

a) De la parte teórica sabemos que:  
si  $\sum |b_m|$  converge  $\Rightarrow \sum b_m$  converge

Tomando  $b_m = \frac{a_m}{(-2)^m} \Rightarrow |b_m| = \frac{|a_m|}{|(-2)^m|} = \frac{a_m}{2^m}$  ( $a_m > 0$  por hip)

Por el enunciado sabemos que  $\sum \frac{a_m}{2^m}$  converge, por lo tanto  $\sum \frac{a_m}{(-2)^m}$  también converge.

b) Usamos el criterio del paso al límite, con  $b_m = \frac{a_m}{2^m}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_m}{3^m}}{\frac{a_m}{2^m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m}{3^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = \boxed{0}$$

Como  $\sum \frac{a_m}{2^m}$  converge y le dió 0  $\Rightarrow \sum \frac{a_m}{3^m}$  también converge.

---

21 Si  $a_m > 0$  y  $\sum a_m$  converge, probar que  $\sum \frac{1}{a_m}$  diverge.

Es re fácil, mirá: si  $\sum a_m$  converge  $\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$

y por lo tanto  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m} \neq 0$ .

Sabiendo ya que los términos  $\frac{1}{a_m}$  de la serie  $\sum \frac{1}{a_m}$  no tienen límite nulo, queda probado que  $\sum \frac{1}{a_m}$  va a diverger. (u oscilar).

Ahora pasamos a Series de Potencias.

22) Determinar el radio de convergencia para las siguientes series de potencias y analizar el comportamiento de las mismas en los extremos del intervalo de convergencia obtenido.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$  (desarrollo alrededor de  $a = -3$ )

Vamos a probar convergencia absoluta para poder usar el criterio del cociente (el cual precisa series de términos positivos). Si  $\sum |a_n|$  conv.  $\Rightarrow \sum a_n$  conv.

$$|a_n| = \left| \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right| = \frac{|x+3|^n}{(n+1)2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x+3|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{|x+3|^n}{(n+1)2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+3|^{n+1}}{|x+3|^n} \frac{(n+1)}{(n+2)} \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |x+3| \left( \frac{n+1}{n+2} \right) \frac{1}{2} = \boxed{\frac{|x+3|}{2} = l}$$

↙ tiende a 1

Por el criterio del cociente, si  $l < 1$ , la serie converge:

$$l = \frac{|x+3|}{2} < 1 \Rightarrow \underbrace{|x+3|}_{\text{distancia al } (-3) \text{ menor que } 2} < 2$$

Por lo tanto  $\boxed{r=2}$  es el radio de convergencia. Y el intervalo es:  $(-3-2; -3+2) = (-5; -1)$

Ahora veamos en los extremos del intervalo.

$$x = -1 \Rightarrow a_m = \frac{2^m}{(m+1)2^m} = \frac{1}{m+1}$$

Comparando con  $b = \frac{1}{m}$  se llega a que  $\sum a_m$  no converge para  $x = -1$ .

$$x = -5 \Rightarrow a_m = \frac{(-2)^m}{(m+1)2^m} = (-1)^m \cdot \frac{1}{m+1}$$

En este caso, como  $\frac{1}{m+1}$  es monot. dec. y su límite es cero; por Leibniz podemos decir que la serie alternada  $\sum (-1)^m \frac{1}{m+1}$  sí converge.

Por lo tanto:  $\sum a_m$  converge para  $x \in [-5; -1)$

Nota: Se puede probar que fuera del intervalo  $[-5; -1)$  la serie no converge, ni siquiera condicionalmente (que es lo que en realidad importa y no la conv. absoluta). Esto se hace viendo que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^m}{(m+1)2^m} \neq 0$  en esos casos.

$$b) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x-1)^m}{m!} \quad (a=1 \text{ en este caso})$$

Usamos, otra vez, el criterio del cociente con:

$$|a_m| = \left| \frac{(-1)^m (x-1)^m}{m!} \right| = \frac{|x-1|^m}{m!}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x-1|^{m+1}}{(m+1)!}}{\frac{|x-1|^m}{m!}} = \lim_{m \rightarrow \infty} |x-1| \frac{m!}{(m+1)!} = 0$$

Conclusión: esta serie converge para todo valor de  $x$ .

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 1) \frac{x^n}{n^n} \quad (a=0)$$

Esta serie no es de términos positivos ni alternada, es una mezcla. Lo que podemos hacer es dividirla en dos sumas y ver qué pasa con cada una:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 1) \frac{x^n}{n^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^n}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}}_{(2)}$$

Vamos a ver si convergen de forma absoluta (1) y (2). En ambos casos el v.a. de  $a_n$  es el mismo:  $|a_n| = \frac{|x|^n}{n^n}$ . Con el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{1}{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{1}{n+1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = 0 \end{aligned}$$

tiende a 0      tiende a  $e^{-1}$

Por lo tanto, las series (1) y (2) convergen para cualquier valor de  $x$  y, entonces,  $\sum ((-1)^n + 1) \frac{x^n}{n^n}$  también converge para todo valor de  $x$  (el radio de convergencia es  $\infty$ ).

d)  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$  con  $a_m = 1; 3x; x^2; 3x^3; x^4; \dots; 3x^m; x^{m+1}$

Vamos a buscar, primero, la expresión de la serie.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m &= 1 + 3x + x^2 + 3x^3 + x^4 + \dots + 3x^m + x^{m+1} + \dots \\ &= \underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots}_{\sum_{m=0}^{\infty} x^{2m}} + \underbrace{3x + 3x^3 + 3x^5 + \dots}_{3x \cdot [1 + x^2 + x^4 + \dots]} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} + 3x \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} \\ &\stackrel{(*)}{=} (1 + 3x) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (x^2)^m \quad \leftarrow \text{Usamos la fórmula de la geométrica y sacamos la expresión (con base } x^2) \\ &= \boxed{(1 + 3x) \cdot \frac{1}{1 - x^2}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Si } |x^2| < 1} \end{aligned}$$

(Para  $|x^2| > 1 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (x^2)^m$  diverge y entonces  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$  diverge).

Veamos los casos extremos:

- $x=1 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m \stackrel{on(*)}{=} (1+3) \sum_{m=0}^{\infty} 1 \Rightarrow \underline{\text{diverge}}$
- $x=-1 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m = (1-3) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} ((-1)^2)^m \Rightarrow \underline{\text{diverge}}$

Conclusión sólo converge si:

$$|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \boxed{r=1} \text{ y el intervalo de convergencia es } \boxed{(-1; 1)}$$

23 Hallar la serie de Taylor en  $x_0 = 0$  para cada una de las siguientes funciones, indicando el intervalo de convergencia de las series obtenidas.

a)  $f(x) = \frac{1}{x+a}$  con  $a \neq 0$

Queremos expresar  $f(x)$  como serie de Taylor alrededor de  $x_0 = 0$ . O sea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n$$

Como vimos en la teoría los  $a_n$  deben tener la forma:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

en la teoría lo llamamos "a"

Obtenemos primero la forma de la derivada enésima  $f^{(n)}(x_0)$ :

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x+a)^2} \Rightarrow f^{(1)}(0) = \frac{-1}{a^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+a)^3} \Rightarrow f^{(2)}(0) = \frac{2}{a^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x+a)^4} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{-6}{a^4}$$

Usando  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}$$

Entonces, la expresión en serie de Taylor de  $f(x)$  alrededor de  $x_0 = 0$  es:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \cdot x^n$$

Ahora veamos cuándo esta expresión converge (y de paso verificamos los  $a_n$  obtenidos). En este caso podemos reconstruir la expresión usando la fórmula de la geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \left( \frac{(-1)x}{a} \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{-x}{a} \right)} \quad \text{si } \left| \frac{-x}{a} \right| < 1$$

Es decir: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} x^n = \frac{1}{a+x} \quad \text{si } |x| < |a|$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es  $|a|$ .

En los extremos:

$$x = a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a} \Rightarrow \text{oscila, porque}$$

las sumas parciales valen  $\frac{1}{a}; 0; \frac{1}{a}; 0; \dots$

$$x = -a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-a)^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \Rightarrow \text{diverge, las sumas}$$

parciales dan  $\frac{n}{a}$  lo cual tiende a  $\infty$ .

Listo, entonces, el intervalo de conv. es  $\boxed{(-a, a)}$

$$b) f(x) = a^x \text{ con } a > 0$$

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \text{ con } x_0 = 0$$

$$f^{(1)}(x) = a^x \ln(a) \Rightarrow f^{(1)}(0) = \ln(a)$$

$$f^{(2)}(x) = a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(a) \Rightarrow f^{(2)}(0) = \ln^2(a)$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \ln^m(a)$$

Entonces, la expresión en serie de Taylor para  $a^x$  es:

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$$

Buscamos ahora el intervalo de convergencia usando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(\ln a)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{(\ln a)^n x^n}{n!} \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a)^{n+1}}{(\ln a)^n} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a) |x| \frac{1}{n+1} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es  $\infty$  y el intervalo es  $(-\infty; \infty)$ .

$$c) f(x) = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cos x (-\sin x) \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = -2[-\sin^2 x + \cos^2 x] \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = -2$$

$$f^{(3)}(x) = -2 \left[ -2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) \right]$$

$$= 8 \left[ \operatorname{sen} x \cos x \right] \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

volvimos a la  
forma de  $f^{(1)}(x)$  sólo  
que el  $(-2)$  quedó multiplicado por  $(-4)$ .

$$f^{(4)}(x) = 8 \left[ -\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \right] \Rightarrow f^{(4)}(0) = 8$$

Ya vemos que  $f^{(5)}(0)$  va a ser 0 y que  
 $f^{(6)}(0)$  va a ser  $8 \cdot (-4) = -32$ . Y así...

Entonces; la expresión en serie es:

$$\cos^2 x = 1 + \frac{(-2)}{2!} x^2 + \frac{8}{4!} x^4 + \frac{(-32)}{6!} x^6 + \dots$$

Y, tanteando y con bastante paciencia, se  
puede expresar esa suma de la sig. manera:

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m} \quad (*)$$

(Comprabalo si querés, desarrollá la suma y vas a ver  
que te dan los términos de arriba).

Ahora veamos la convergencia de la serie del segun-  
do término de la expresión en serie (\*).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{m+1} 2^{2(m+1)-1} x^{2(m+1)}}{(2(m+1))!} \right|}{\left| \frac{(-1)^m 2^{2m-1} x^{2m}}{(2m)!} \right|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{2m+1}}{2^{2m-1}} \frac{(2m)!}{(2m+2)!} \frac{x^{2m+2}}{x^{2m}}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{2^{-1}} \frac{1}{(2m+2)(2m+1)} x^2 = \boxed{0}$$

Por lo tanto esa serie converge para todo valor de  $x$ , el intervalo de convergencia son todos los reales.

**24** Calcular  $\ln(1,1)$  con un error menor a  $0,0001$ .

Para esto vamos a usar la expresión en serie de  $\ln(1+x)$  y vamos a evaluar esa expresión en  $x=0,1$ . Como ese  $x$  es cercano a  $0$ , el desarrollo en serie lo hacemos alrededor de  $x_0=0$ .

Como  $\ln(1+x)$  es la integral de  $1/(1+x)$  y como el desarrollo en serie para  $1/(1+x)$  ya lo tenemos (ej. 23.a con  $a=1$ ), vamos a usar la propiedad de integración (ver parte teórica) para calcular la serie de  $\ln(1+x)$ .

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^m \quad \text{para } |x| < 1 \quad \text{del ej 23.a}$$

Integrando y sabiendo que la serie se puede integrar término a término:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int_0^x x^m dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

(El radio de conv. es el mismo que para  $1/(1+x)$ , como dice la propiedad).

La representación en serie de  $\ln(1+x)$ , entonces, es una serie alternada. Los términos  $a_m = \frac{x^{m+1}}{m+1}$  por otra parte son monótonamente decrecientes (siempre que  $x < 1$  y  $x > 0$ .) y tienen límite nulo. Por lo tanto, podemos usar Leibniz y decir que:

$$(-1)^m (S - S_m) < a_{m+1}$$

donde  $S$  es la suma total y  $S_m$  es la suma parcial de los  $m$  primeros términos.

El enunciado pide que calculemos la suma para  $x = 0,1$  (que aproxima a  $\ln(1,1)$ ) con un error menor al  $0,0001$ . Para eso hay que sumar  $m$  términos donde  $m$  debe cumplir:

$$a_{m+1} < 0,0001$$

El  $a_{m+1}$  correspondiente a  $x = 0,1$  es:

$$a_{m+1} = \frac{(0,1)^{m+2}}{m+2} < 0,0001 \Rightarrow \text{esto se cumple con } \boxed{m=2}$$

De manera que sólo debemos calcular los primeros 3 términos,

$$\ln(1+0,1) \approx \frac{(-1)^0 0,1^1}{1} + \frac{(-1)^1 0,1^2}{2} + \frac{(-1)^2 0,1^3}{3}$$

$$\Rightarrow \ln(1,1) \approx 0,1 - 0,005 + 0,00033 \Rightarrow \boxed{\ln(1,1) \approx 0,0953}$$

# Sucesiones y series

---

**EJERCICIOS  
SACADOS DE  
PARCIALES**

ANÁLISIS MATEMÁTICO (28) Segundo Parcial

**ASIMOV**

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRES:

D.N.I.:

1	2	3	4	NOTA
M	R	X	R	2 (dos)

NOTA PRIMER PARCIAL

INSCRIPTO EN:

SEDE 10 DIAS PARTES / miércoles

HORARIO 09:00 / 10:00 AULA 30

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

4. Hallar todos los valores de  $p > 0$  para los que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4^{n+1} n!}{n^n} \right)^{5p-1}$  es convergente.

PROMOCIONA	FINAL 16/7 10hs	RECUP 1ro / 2do 7/7 10hs	INSUFICIENTE
------------	-----------------	--------------------------	--------------

**Ejercicio 4.**

Nos piden los valores de  $p$  para los que la serie  $\sum \left( \frac{4^{n+1} n!}{n^n} \right)^{5p-1}$  converge.

Veamos. ¿Qué sabemos sobre series que convergen? Sabemos dos criterios muy importantes para demostrar cuando una serie converge o no: el de D'Alembert y el de la raíz. Entonces, acá vamos a tener que usar uno de los dos.

Como aparece un factorial, conviene usar D'Alembert (si estas cuentas te parecen difíciles, mejor no uses el criterio de la raíz).

$\sum \left( \frac{4^{n+1} n!}{n^n} \right)^{5p-1} \Rightarrow$  la sucesión es  $a_n = \left( \frac{4^{n+1} n!}{n^n} \right)^{5p-1}$ . Calculamos el límite de D'Al:

OJO con esto: no es muy difícil de entender lo que hay que hacer. Calculamos el límite de D'Alembert. La serie converge cuando ese límite es menor a 1.

Lo que se complica son las cuentas. Vamos a hacerla de a poco:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{4^{(n+1)+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \right)^{5p-1}}{\left( \frac{4^{n+1} n!}{n^n} \right)^{5p-1}}$$

Podemos escribirlo distinto:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4^{(n+1)+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 4^{n+1} \cdot n!} \right)^{5p-1} \Rightarrow \text{Acordate que } (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4^{(n+1)} \cdot 4^1 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 4^{n+1} \cdot n!} \right)^{5p-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 \cdot n^n}{(n+1)^n} \right)^{5p-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 4 \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right)^{5p-1}$$

¿ Te acordás de cómo se calcula e ? Bueno, acá tenemos exactamente lo mismo, pero al revés. Entonces, nos da  $e^{-1}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = (4 \cdot e^{-1})^{5p-1} \cong (1,47)^{5p-1}$$

A nosotros nos interesa cuándo la serie converge; o sea, cuando este límite es menor a 1, o sea, los valores de p que cumplen

$$\Rightarrow (1,47)^{5p-1} < 1$$

Para que el resultado sea 1, tiene que ser  $(1,47)^0$  i. Para que el resultado sea menor, voy a tener que usar un exponente más chico. Entonces nos queda:

$$5p - 1 < 0 \Rightarrow 5p < 1 \Rightarrow p < 1/5$$

$$\Rightarrow \text{la serie converge cuando } p < 1/5$$

D ANALISIS MATEMATICO (28) Segundo Parcial



TEMA 3

APELLIDO Y NOMBRES: \_\_\_\_\_

D.N.I: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	NOTA

NOTA PRIMERA PARCIAL \_\_\_\_\_

INSCRIPTO EN: \_\_\_\_\_

SEDE \_\_\_\_\_ DIAS \_\_\_\_\_

HORARIO \_\_\_\_\_ AULA \_\_\_\_\_

**En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta**

4. Hallar todos los  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+9)^n}{\sqrt{7n+6}}$  es convergente.

PROMOCIONA	FINAL 16/7 10hs	RECUP 1ro/2do 7/7 10hs	INSUFICIENTE
------------	-----------------	------------------------	--------------

**Ejercicio 4.**

Tenemos la serie  $\sum \frac{(2x-9)^n}{\sqrt{7n+6}}$  y queremos saber para qué valores de x converge.

¿ Cuándo converge una serie ? Cuando se cumplen los criterios de convergencia: D'Alembert o la raíz. ¿Cuál ? Cualquiera de los dos, el que sea más fácil: si se cumple uno se cumple el otro. En este caso, parece más fácil usar el criterio de la raíz. Este criterio dice que hay que calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

$\sum \frac{(2x-9)^n}{\sqrt{7n+6}} \Rightarrow$  la sucesión es  $a_n = \frac{(2x-9)^n}{\sqrt{7n+6}}$ . Calculamos el límite de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2x-9)^n}{\sqrt{7n+6}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2x-9)^n}}{\sqrt[n]{7n+6}}$$

En el numerador se tacha la n de la potencia con la n de la raíz. El numerador tiende a 1, porque el límite de la raíz enésima de cualquier cosa que no esté elevada a la n es 1. Acordate de esto que es el truco para resolver todas las raíces enésimas. Entonces, el límite nos queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |2x - 9|$$

El criterio nos dice que la serie converge cuando este límite es menor a 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow |2x - 9| < 1 &\Rightarrow -1 < 2x - 9 && \text{y} && 2x - 9 < 1 \\ -1 + 9 < 2x &&& && 2x < 1 + 9 \\ 8 / 2 < x &&& && x < 10 / 2 \\ 4 < x &&& && x < 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in (4 ; 5)$$

$\Rightarrow$  La serie converge para cualquier x en el intervalo (4 ; 5)

B ANALISIS MATEMATICO (28) Segundo Parcial



TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRES:

D.N.I: 31.523.725

1	2	3	4	NOTA
M	B	M	R	3 (tres)

NOTA PRIMER PARCIAL  
5 (cinco)

INSCRIPTO EN:  
SEDE Ciudad DIAS 20-11-20  
HORARIO 10 a 13hs AULA 326

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

4. Determinar el valor de  $a > 0$  para que la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{a^n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} (x-4)^n \text{ tenga radio de convergencia igual a } 2.$$

PROMOCIONA	FINAL 15/7 10hs	RECUP 1ro/2do 7/7 10hs	INSUFICIENTE
------------	-----------------	------------------------	--------------

**Ejercicio 4.**

Tenemos la serie  $\sum \frac{5^n}{a^n} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} (x-4)^n$  y nos dicen que tiene radio de convergencia 2.

¿Qué significa esto? Esto significa que la serie converge cuando  $|x - 4|$  es menor a 2. Pero nuestra incógnita no es x, es a. ¿Cómo podemos saber para qué valores de a la

serie converge, siendo  $|x - 4| < 2$ ? Tenemos que usar alguno de los criterios. En este caso, conviene usar el de Cauchy, porque cuando calculemos la raíz enésima, se simplifican todas las cuentas.

$$\sum \frac{5^n}{a^n} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} (x-4)^n \Rightarrow \text{la sucesión es } a_n = \frac{5^n}{a^n} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} (x-4)^n.$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{5^n}{a^n} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} \cdot (x-4)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|5^n|}}{\sqrt[n]{|a^n|}} \cdot \sqrt[n]{\left| \left( \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 \right)^n \right|} \cdot \sqrt[n]{|(x-4)^n|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{|a|} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 |x-4|. \text{ Como } n \text{ tiende a } \infty, 3/n \text{ tiende a } 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{|a|} \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 |x-4| = \frac{5}{|a|} \cdot (1+0)^2 |x-4| = \frac{5|x-4|}{|a|}$$

Según Cauchy, para que la serie converja, este límite tiene que ser menor a 1:

$$\frac{5|x-4|}{|a|} < 1 \Rightarrow |a| > 5 \cdot |x-4|$$

$$\Rightarrow |x-4| < |a| / 5$$

Fijate que este es el radio de convergencia. ¿Qué quiere decir esto? La serie converge cuando  $|x - 4|$  es menor al radio de convergencia: esa es justamente la definición de radio de convergencia. Para que el radio de convergencia sea exactamente 2, tiene que ser:

$$|a| / 5 = 2 \Rightarrow |a| = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\Rightarrow a = 10 \text{ ó } a = -10$$

Hay dos valores de  $a$  para los que el radio de convergencia es 2. Como nos piden que demos el valor positivo, la respuesta es:

$a = 10$
----------

**ASIMOV**

B ANALISIS MATEMATICO (28) Segundo Parcial

TEMA 3

APELLIDO Y NOMBRES: \_\_\_\_\_

D.N.I.: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN: \_\_\_\_\_

SEDE: \_\_\_\_\_ DIAS: \_\_\_\_\_

HORARIO: \_\_\_\_\_ AULA: \_\_\_\_\_

PROMOCIONA
------------

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

4. Hallar el intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^{n+1}}$ .
- Analizar la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA 1º/2º	INSUFICIENTE
------------	-------------	----------------	--------------

**Ejercicio 4.**

Queremos hallar el intervalo de convergencia de la serie  $\sum \frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^{n+1}}$ .

¿Qué es el intervalo de convergencia? Es el intervalo de los valores de  $x$  para los que la serie converge. ¿Cómo lo hallamos? Como siempre, usando uno de los criterios de convergencia. Conviene usar el de Cauchy.

$$\sum \frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^{n+1}} \Rightarrow \text{la sucesión es } \frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^n \cdot 3}$$

Cauchy dice que calculemos el límite de la raíz enésima del módulo. O sea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n-1)(x-4)^n}{(n+2)^2 \cdot 3^n \cdot 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1} \cdot \sqrt[n]{|(x-4)^n|}}{\sqrt[n]{(n+2)^2} \cdot \sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{3}}$$

El criterio de Cauchy sirve de mucho, porque la raíz enésima (cuando  $n \rightarrow \infty$ ), de cualquier cosa que no esté elevada a la  $n$ , tiende a 1. Y cuando tenemos algo elevado a la  $n$ , se tacha la  $n$  de la potencia con la  $n$  de la raíz. Entonces nos queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1 \cdot |x-4|}{1 \cdot 3 \cdot 1} = |x-4| / 3$$

La serie converge cuando este límite es menor a 1 (Criterio de Cauchy):

$$|x-4| / 3 < 1 \Rightarrow |x-4| < 3.$$

$$-3 < x-4 \Rightarrow -3+4 < x$$

y

$$x-4 < 3 \Rightarrow x < 3+4$$

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x < 7 \Rightarrow x \in (1; 7)$$

$\Rightarrow$  El intervalo de convergencia es  $(1; 7)$

F ANALISIS MATEMATICO (28) 2do Parcial

DIF REC

**ASIMOV**

TEMA 4

APELLIDO Y NOMBRES: \_\_\_\_\_

D.N.I: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN : SEDE: \_\_\_\_\_ DIAS: \_\_\_\_\_

HORARIO: \_\_\_\_\_ AULA: \_\_\_\_\_

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

4. Hallar todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$  para los que converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n} (x-4)^n.$$

#### Ejercicio 4.

Ya sabemos qué tenemos que hacer: es lo mismo que estuvimos haciendo hasta ahora. Calculamos el límite de Cauchy.

$\sum (-1)^n \cdot \frac{n^3}{2^n} \cdot (x-4)^n$ . La sucesión es  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^3}{2^n} \cdot (x-4)^n$ . El límite nos queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \cdot \frac{n^3}{2^n} \cdot (x-4)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|} \cdot \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{2^n}} \cdot \sqrt[n]{|(x-4)^n|}.$$

Podemos tachar las  $n$  de las raíces con las  $n$  de las potencias.  $\sqrt[n]{n^3}$  tiende a 1, porque la raíz  $n$ -ésima (cuando  $n \rightarrow \infty$ ) de cualquier cosa que no esté elevada a la  $n$ , tiende a 1. La cuenta nos quedó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-4| / 2 \Rightarrow \text{la serie converge cuando este límite es menor a 1}$$

$$|x-4| / 2 < 1 \Rightarrow |x-4| < 2 \Rightarrow -2 < x-4 \text{ y } x-4 < 2$$

$$-2 + 4 < x \text{ y } x < 4 + 2 \Rightarrow 2 < x < 6$$

$\Rightarrow$  La serie converge para  $x \in (2; 6)$

Nota: si hubiéramos usado el criterio de D'Alembert, ¿hubiera dado lo mismo?. Sí, porque hay un teorema llamado Cauchy implicado a D'Alembert, que dice que los dos límites son iguales. Por eso es que podemos usar el que más convenga. Fijate que el límite de D'Alembert es mucho más complicado de calcular.

A ANALISIS MATEMATICO (2B) Segundo Parcial

APELLIDO Y NOMBRES:

~~XXXXXXXXXX~~ MARIA CARRERA

**ASIMOV**

TEMA 2

1 2 3 4

$\mathbb{R}^2$   $\mathbb{R}$   $\mathbb{R}$   $\mathbb{M}^+$

NOTA

INSCRIPTO EN:

SEDE: Ciudad DIAS: Lu - Mi - Ju

HORARIO: 7-10 AULA: 325

NOTA 1er

PARCIAL

2

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

4. Hallar todos los  $x \in \mathbb{R}$  tales que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^{n-2}}{2^n + 3^n}$  es convergente.

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA 1º/2º	INSUFICIENTE
------------	-------------	----------------	--------------

#### Ejercicio 4.

Nos preguntan para qué valores de  $x$  la serie  $\sum \frac{n^3 x^{n-2}}{2^n + 3^n}$  converge

¿Sabés cómo se hace?. Sí, sí: usando Cauchy o D'Alembert. Vamos a usar el de Cauchy porque es más fácil.

$\sum \frac{n^3 x^{n-2}}{2^n + 3^n} \Rightarrow$  la sucesión es  $a_n = \frac{n^3 x^{n-2}}{2^n + 3^n}$ . Lo voy a escribir de una forma un poco más

cómoda para hacer las cuentas  $\Rightarrow a_n = \frac{n^3 x^n x^{-2}}{3^n [(2/3)^n + 1]}$ . Fijate que si no lo escribimos así, no

podemos calcular el límite del denominador. Calculamos el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 x^n x^{-2}}{3^n [(2/3)^n + 1]}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{|x^n|} \cdot \sqrt[n]{|x^{-2}|}}{\sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{(2/3)^n + 1}}$$

Acordate que la raíz de cualquier cosa que no esté elevada a la  $n$ , tiende a 1. Además, como  $n$  tiende a  $\infty$ ,  $(2/3)^n$  tiende a 0. Entonces nos queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1 \cdot |x| \cdot 1}{3 \cdot 1} = |x| / 3$$

¿Qué dice el criterio de Cauchy? Dice que la serie converge cuando ese límite es menor a 1. Entonces, para calcular  $x$ , planteamos:

$$|x| / 3 < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

⇒ La serie converge para  $x \in (-3 ; 3)$

---

Consejos para el examen:

Practicá ejercicios parecido a los "ejercicio 3". Muchas veces, en clase no se la da bolilla a este tipo de ejercicios, pero en el parcial siempre lo toman.

Conclusión: a todo el mundo le va mal en el ejercicio 3.

Te cuento cuáles son los errores más comunes en los parciales:

- En los ejercicios de calcular áreas siempre viene bien hacer un gráfico. ¿Qué pasa si el área te da negativa? Rta: No puede ser, área negativa no tiene sentido. Revisá bien el problema: lo más probable es que te hayas confundido en qué función era el techo y cuál el piso (pasa bastante más de lo que te imaginás).

- Lo mismo pasa con los ejercicios de Taylor: mucha gente se olvida del factorial. Todo un ejercicio bien hecho malogrado por un maldito factorial.

- En los ejercicios de series: no te olvides del módulo

OJO: Un error tonto te puede costar todo el problema. Bienvenido a Análisis I.

---

# INDICE

# INDICE

## **Página**

<b>2</b>	.....	<b>INTEGRAL INDEFINIDA</b>
<b>3</b>		Primer teorema fundamental del cálculo.
<b>3</b>	.....	Continuidad de la integral indefinida.
<b>4</b>		Función primitiva. Relación con la integral indefinida
<b>6</b>	.....	Integración inmediata.
<b>7</b>		Integración por sustitución.
<b>9</b>	.....	Integración por partes.
<b>10</b>		Integración por fracciones simples.
<b>17</b>	.....	<b>Ejercicios.</b>
<b>35</b>	.....	<b>CÁLCULO INTEGRAL.</b>
<b>40</b>		Integral definida.
<b>46</b>	.....	Propiedades de la integral definida.
<b>50</b>		Regla de Barrow.
<b>52</b>	.....	Integrales impropias.
<b>56</b>		Ejercicios.
<b>71</b>	.....	Ejercicios sacados de parciales
<b>85</b>	.....	<b>SUCESIONES Y SERIES</b>
<b>86</b>		Definición de sucesión. Convergencia.
<b>88</b>	.....	Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas.
<b>89</b>		Teorema del sandwich.
<b>90</b>	.....	Definición de sucesiones por recurrencia.
<b>91</b>		Subsucesiones.
<b>92</b>	.....	Definición de serie. Convergencia.
<b>93</b>		Condición necesaria para la convergencia de una serie.
<b>94</b>	.....	Serie geométrica - Serie armónica.
<b>96</b>		Criterios de convergencia para series de términos no negativos.
<b>96</b>	.....	Criterio de comparación.
<b>98</b>		Criterio por paso al límite y de la integral

100.....	Criterio de Cauchy y de D'Alembert
102	Series alternadas. Regla de Leibniz.
104.....	Convergencia absoluta y condicional
105	Series de funciones.
106.....	Series de potencias. Radio de convergencia.
108	Propiedades de las funciones representadas por series de potencias.
109 .....	Serie de Taylor generada por una función.
111	Ejercicios
148.....	Ejercicios sacados de parciales

## **Temas que están en la parte 1:**

Funciones - Continuidad - Derivadas - Taylor